

4.双対空間

この章からは、線形空間と線形写像のさまざまな標準的構成法を解説する。まず §4.1 で、双対空間を定義する。線形空間 V の双対空間 V^* は、線形写像 $V \rightarrow K$ 全体のなす線形空間である。有限次元線形空間の双対空間には、もとの線形空間の基底の双対基底がある。

§4.2 では、線形空間の部分空間が定める双対空間の部分空間や、線形空間からその双対空間の双対空間への標準写像を調べる。線形写像 $f : V \rightarrow W$ に対し、双対写像とよばれる、逆向きの線形写像 $f^* : W^* \rightarrow V^*$ が定まる。§4.3 では、これを調べる。

§4.4 では、線形写像 $V \rightarrow W$ 全体のなす線形空間 $\text{Hom}(V, W)$ を考える。 V と W がベクトルの空間のときは、 $\text{Hom}(V, W)$ は行列の空間と考えることができる。双対空間は、 $\text{Hom}(V, W)$ の $W = K$ という特別な場合にあたる。双対空間は、特に重要な対象であるし、このような抽象的な構成になれるために、 §4.1 で先に導入した。