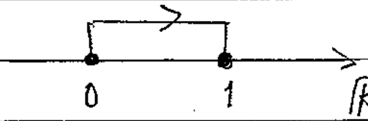
(§9 基本群の定義とその基本的な性質 (つづき))

$I = [0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \le t \le 1\} =$ 

$\partial I = \{0,1\} \subset I$

(X, x_0): 点つき空間

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\mathrm{def}}{=} [(I,\partial I),(X,x_0)] = (X,x_0)^{(I,\partial I)}/\simeq$$

基本群

今日やること

- $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ 但, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \ni 1$
- X : path-conn のとき 群 $\pi_1(X,x_0)$ の同型類は、基点 $x_0 \in X$ のとり方によらない $\Leftarrow$ 基本亜群 (fundamental groupoid)
- X : path conn のとき
  $\pi_1(X,x_0)^{abel} \cong H_1(X,x_0)$
- van Kampen の定理

$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$p : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}x}$

Thm 9.9 (写像 p の CHP)

$\forall X$: compact metric space

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ (x,0) \in X \times I \arrow[r, "\forall F"'] & S^1 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{F}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

<u>回転数</u> $\ell \in (S^1,1)^{(I,\partial I)} \longmapsto \tau(\ell) \in \mathbb{Z}$

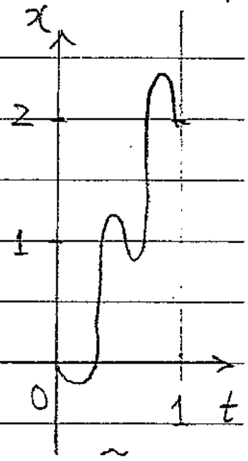
$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\ell"'] \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{\ell}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\exists ! \ \tilde{\ell} : I \to \mathbb{R}$ conti. map.

s.t. $\begin{cases} p \circ \tilde{\ell} = \ell : I \to \mathbb{R} \\ \tilde{\ell}(0) = 0 \end{cases}$

(ℓ の lift)

$\tau(\ell) := \tilde{\ell}(1) \in p^{-1}(1) \cong \mathbb{Z}$ ℓ の回転数



$x = \tilde{\ell}(t)$

$\tau(\ell) = 2$

<u>定理 9.11</u>

$\tau : \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$

(証) (1) homotopy 不変

(2) 準同型

(3) 単射

(4) 全射

(1) ($\Leftarrow$ p の CHP)

$\ell \simeq \ell' : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ とする.

L : ℓ を ℓ' につなぐ homotopy

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\tilde{\ell} : \ell \text{ の lift}"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathbb{R} \arrow[d] \\ I \times I \arrow[r, "L"'] \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{L}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\tilde{L}(t, 1) = \tilde{\ell}'(1)$ ($\Leftarrow$ lift の一意性)

$\tilde{L}(1, s) \in \mathbb{Z}$

$s \in I$ について conti $\Rightarrow$ const

ゆえに

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\ell}(1) & = & L(1,s) & = & \tilde{\ell}'(1) \\ \| & & & & \| \\ \tau(\ell) & & & & \tau(\ell') \end{array}$$

//

(2) $\ell_1, \ell_2 \in (S^1, 1)^{(I, \partial I)}$

$\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2$: それぞれの lift

$$\tilde{\ell}(t) = \begin{cases} \tilde{\ell}_1(2t) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \tilde{\ell}_1(1) + \tilde{\ell}_2(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

これは $\ell_2 \cdot \ell_1$ の lift

(3) $l \in (S^1, 1)^{(I, \partial I)}$, $\tau(l) = 0$ とする.

$\tilde{l}$: lift $\tilde{l}(0) = \tilde{l}(1) = 0$

$L(t,s) := p(s\tilde{l}(t))$

$\Rightarrow L : (I, \partial I) \times I \to (S^1, 1)$

$\Rightarrow [\tilde{l}] = e \in \pi_1(S^1, 1)$ //

(4) $l_0 : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$, $t \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}t}$

$\tilde{l}_0(t) = t$. ゆえに $\tau(l_0) = \tilde{l}_0(1) = 1 \in \mathbb{Z}$ 生成元 //

<u>命題 9.12</u> $l : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ C^∞ map

$$\Rightarrow \tau(l) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_l \frac{dz}{z}$$

<u>命題 9.13</u> $n \in \mathbb{Z}$.

$f_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto f_n(z) := z^n$

$\Rightarrow f_{n*} = (n\text{倍写像}) : \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ↺

<u>基本亜群</u> (⇝ 基本群の基点のとりかえをしらべる)

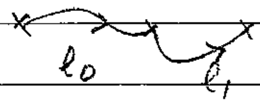
X : top. sp.

$x_0, x_1 \in X$

$\Pi X(x_0, x_1) := [(I, 0, 1), (X, x_0, x_1)]$

$= \{ l : I \to X$: conti. map. $l(0) = x_0$, $l(1) = x_1 \} /$ 端点をとめ homotopy

<u>合成</u> $x_0, x_1, x_2 \in X$



$\Pi X(x_1, x_2) \times \Pi X(x_0, x_1) \to \Pi X(x_0, x_2)$

$([l_1], [l_0]) \longmapsto [l_1 \cdot l_0]$ well-defined

但. $(l_1 \cdot l_0)(t) = \begin{cases} l_0(2t) & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ l_1(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

No. Date

($x_0 = x_1$ のとき $\Pi X(x_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$)

補題 9.14 $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X$

(1) $([l_2]\cdot[l_1])\cdot[l_0] = [l_2]\cdot([l_1]\cdot[l_0]) \in \Pi X(x_0, x_3)$

($\forall [l_\alpha] \in \Pi X(x_\alpha, x_{\alpha+1})$, $\alpha = 0, 1, 2$)

(2) $\forall [l] \in \Pi X(x_0, x_1)$

$[l]e_{x_0} = e_{x_1}[l] = [l] \in \Pi X(x_0, x_1)$

(但, $e_x := [\forall t \mapsto x] \in \Pi X(x, x) = \pi_1(X, x)$)

(3) $[\bar{l}]\cdot[l] = e_{x_0} \in \Pi X(x_0, x_0)$

$\forall [l] \in \Pi X(x_0, x_1)$. (但, $\bar{l}(t) := l(1-t)$)

ΠX object : X の点

morphism : path の homotopy 類) 圏になっている

$\mathrm{Object}(\Pi X) = X$: 集合

すべての射は同型) $\Longrightarrow$ 亜群という

$x_0, x_1 \in X$ 同じ path-comp にある

$\Pi X(x_0, x_1) \neq \phi$

$\alpha \in \Pi X(x_0, x_1)$

$\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$

$\gamma \longmapsto \alpha_*(\gamma) := \alpha\gamma\alpha^{-1}$ これは同型である

ゆえに

補題 9.15 X : path-comm

$\Longrightarrow$ $\pi_1(X, x_0)$ の群としての同型類は基点 $x_0 \in X$ のとり方によらない

$\Longrightarrow$ $\pi_1(X)$ と書くが function ではない!

X : top.sp

定義 X：単連結 simply connected, 1-connected

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 0) X : path-conn

1) $\pi_1(X) = \{1\}$ —

補題 9.17 X, Y top.sp

$f : X \to Y$ homotopy equivalence (基点は考えない)

$\Longrightarrow \forall x_0 \in X,\ f_* : \pi_1(X, x_0) \underset{\text{同型}}{\xrightarrow{\cong}} \pi_1(Y, f(x_0))$. —

(証明略 プリント p.8)

基本群のAbel化

X : path-conn のとき $\pi_1(X)^{abel} \cong H_1(X ; \mathbb{Z})$ —

群のAbel化 G : 群.

$G^{abel} := G/[G,G]$ Abel化

$[G,G] = (\{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$ の生成する部分群$) \triangleleft G$

$p : G \to G^{abel},\ x \mapsto x \bmod [G,G]$

普遍性 $\forall A$: abelian group

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\forall f : \text{homom}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\
G^{abel} \arrow[ur, "\exists \bar{f} : \text{homom}"'] &
\end{tikzcd}$$

—

例 ① $\mathfrak{S}_3^{abel} \cong \mathbb{Z}/2$

(∵) $(12)(23)(12)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ゆえに $\mathfrak{A}_3 \subset [\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3]$

sign : $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \cong \mathbb{Z}/2$ ゆえに $\mathfrak{A}_3 \supset [\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3]$ //

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836A 7mm ruled 31 lin

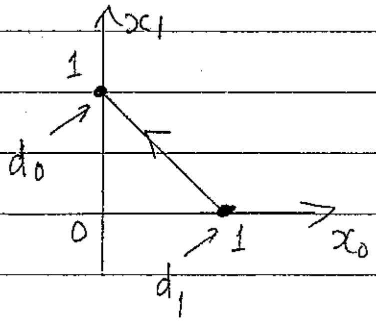
② $^\forall n \geq 2$, sign: $\mathfrak{S}_n^{abel} \cong \mathbb{Z}/2$

③ $^\forall n \geq 3$, $^\forall K$: 体

$\det: GL(n,K)^{abel} \cong K^\times$

④ $SL(2,\mathbb{Z})^{abel} \cong \mathbb{Z}/12$ $\left(\Leftarrow \text{保型形式} \quad q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau},\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\right)$

(X, x_0) 点つき空間



$I \cong \Delta^1$, $t \mapsto (1-t, t)$, 同一視

$X^I = X^{\Delta^1}$ とみなす

$l: (I, \partial I) \to (X, x_0)$ conti. map について

$\partial_1 l = l(1) - l(0) = x_0 - x_0 = 0 \in S_0(X)$

$l \in Z_1(S_*(X))$

$\Downarrow$

$[l] \in H_1(X)$ がきまる

<u>定理9.21</u> X: path-conn とする

$$\varphi: (X, x_0)^{(I,\partial I)} \longrightarrow H_1(X;\mathbb{Z})$$
$$l \longmapsto [l] \quad \text{自然な写像}$$

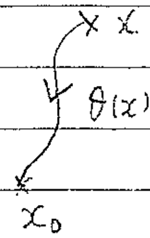
$\Longrightarrow$ $\varphi: \pi_1(X, x_0)^{abel} \xrightarrow{\cong} H_1(X;\mathbb{Z})$ は同型である

(証明略: φ: well-defined pp 11–13
φ: 同型 pp 13–14)

<u>逆</u>のつくり方 X: path-conn より

$\exists\, \theta: X \to X^I$, $x \longmapsto \theta(x)$, x と x_0 をつなぐ path

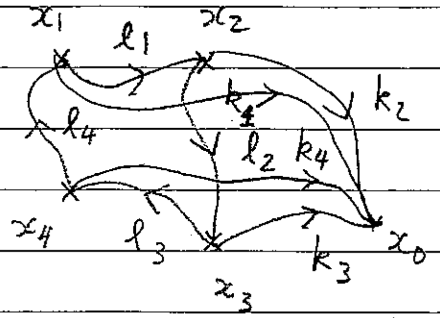
$\theta(x_0) = c_{x_0}$: const にとる



たとえば

$u = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \in Z_1(S_*(X))$ とする

$\partial u = 0$



$k_i := \theta(x_i)$

$$\psi : u \longmapsto k_2\cdot l_1\cdot k_1^{-1} + k_3\cdot l_2\cdot k_2^{-1} + k_4\cdot l_3\cdot k_3^{-1} + k_1\cdot l_4\cdot k_1^{-1} \in \pi_1(X, x_0)^{abel}$$

$\varphi\psi(u) = [u]$ （∵ $\partial u = 0$ より k_i たちは打ち消しあう）

$\psi\varphi(l) = [l]$ （∵ $\theta(x_0) = c_{x_0}$: const） //

§B. van Kampen の定理

基本群の "Mayer-Vietoris 完全列"

<u>Seifert-van Kampen の定理</u>

X : top. sp.

$U, V \overset{open}{\subset} X$, $U \cup V = X$

$U \cap V \neq \phi$ かつ path-conn.

$x_0 \in U \cap V$

$\Longrightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U\cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$

融合積

群の融合積 (amalgamated product) （$\overset{dual}{\longleftrightarrow}$ fiber product）

$$\begin{tikzcd} & H \\ G & N \arrow[l, "\psi_1"] \arrow[u, "\psi_2"'] \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} G *_N H & H \arrow[l, "l_2"'] \\ G \arrow[u, "l_1"] & N \arrow[l, "\psi_1"] \arrow[u, "\psi_2"'] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"] \end{tikzcd}$$

群とその間の準同型

GとHで生成され こうなるもののうちで "最大" のもの

"普遍性"

No. Date

<u>普遍性</u>

$$
\begin{tikzcd}
\forall K & & \\
& G \underset{N}{*} H \arrow[ul, dashed, "\exists!"'] & H \arrow[ull, "\forall"'] \arrow[l] \\
G \arrow[uu, "\forall"] \arrow[ur] & & N \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

包含準同型より（基点は省略して書く）

Van Kampen's Th：これが同型ということ

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(X) & & \\
& \pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V) \arrow[ul, dashed, "\exists!"'] & \pi_1(V) \arrow[l] \arrow[ull, bend right] \\
& \pi_1(U) \arrow[u] \arrow[uul] & \pi_1(U\cap V) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

一つだけ応用

<u>定理 B.6.</u> $n \geqq 2 \Rightarrow \pi_1(S^n) = 1$

(証) $P :=$ 北極 $\in S^n$

$Q :=$ 南極 $\in S^n$

$U := S^n - \{Q\} \simeq *$

$V := S^n - \{P\} \simeq *$

$U \cap V \simeq S^{n-1}$ path-com. $\Leftarrow n \geqq 2$

$\pi_1(S^n) = \{1\} \underset{\pi_1(S^{n-1})}{*} \{1\} \underset{\Uparrow}{=} \{1\}$

（1で生成されるものは{1}だけ）//

<u>注意</u> $U \cap V$: path-com は不可欠

もし不要なら同じ議論で $\pi_1(S^1) = 1$ となってしまう!