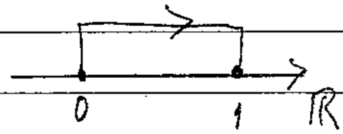
§9 基本群の定義とその基本的性質

$I := [0,1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} =$ 

$\partial I := \{0, 1\}$

X：位相空間

$x_0 \in X$ 一つとって固定する。基点 (base point) とよぶ

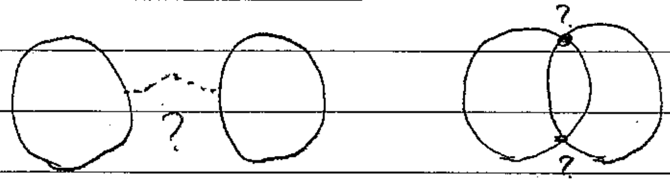
$\pi_1(X, x_0) \overset{\mathrm{def}}{=} \{ l : [0,1] \to X \text{ conti. map. } l(0) = l(1) = x_0 \} /$ 端点0,1を動かさない homotopy

点つき空間 (X, x_0) の基本群

pointed space　fundamental group　base point preserving 基点を保つ

based space

なぜ基点をつけるのか？ ⇐ 積を定義するため



homotopy も基点を保つものだけを考える。⇐ 積を well-defined にするため

境界条件 $l(0) = l(1) = x_0$ つきの homotopy

⇓

一般化：空間対，空間の三つ組

今日やること

- 三つ組の間の homotopy 集合
- 基本群の定義，群になること，自然性
- $p : \mathbb{R} \to S^1 \quad x \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ の被覆ホモトピー性質

$\pi_q(S^1, 1) = 0$ if $q \geq 2$

⇓ 次回

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

o. Date . .

位相空間の三つ組

<u>定義</u> (X, A_1, A_2) : 位相空間の三つ組 (triad)

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) X : top. sp

2) $A_1, A_2 \subset X$ subspaces

$x_0, x_1 \in X$, $A_1 = \{x_0\}$, $A_2 = \{x_1\}$ のとき

$(X, x_0, x_1) := (X, \{x_0\}, \{x_1\})$

<u>例</u> $I = [0, 1]$, $(I, 0, 1) = (I, \{0\}, \{1\})$

<u>記号</u> K : top. sp

$(X, A_1, A_2) \times K \overset{\mathrm{def}}{=} (X \times K, \overset{A_1\times K}{\cancel{X\times A_1}}, \overset{A_2\times K}{\cancel{X\times A_2}})$

(Y, B_1, B_2) : triad of spaces

<u>定義</u> $f : (X, A_1, A_2) \to (Y, B_1, B_2)$ 連続写像

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 1) $f : X \to Y$ conti. map

2) $f(A_1) \subset B_1$ かつ $f(A_2) \subset B_2$

$(Y, B_1, B_2)^{(X, A_1, A_2)} \overset{\mathrm{def}}{=} \{f : (X, A_1, A_2) \to (Y, B_1, B_2) : \text{conti. maps}\}$

$g : (Y, B_1, B_2) \to (Z, C_1, C_2)$ conti. map

$\Rightarrow g \circ f : (X, A_1, A_2) \to (Z, C_1, C_2)$ conti. map

$\Longrightarrow$ 空間の三つ組の圏

<u>homotopy</u> $f, g : (X, A_1, A_2) \to (Y, B_1, B_2)$ conti. maps

<u>定義</u> $f \simeq g : (X, A_1, A_2) \to (Y, B_1, B_2)$ homotopic

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists F : X \times [0, 1] \to Y$ conti. map

s.t. $\forall x \in X$ $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$

$F(A_1 \times [0, 1]) \subset B_1$ かつ $F(A_2 \times [0, 1]) \subset B_2$

$\Longleftrightarrow \exists F : (X, A_1, A_2) \times I \longrightarrow (Y, B_1, B_2)$

s.t. $F \circ i_0 = f,\ F \circ i_1 = g$

(但. $i_\varepsilon : (X, A_1, A_2) \longrightarrow (X, A_1, A_2) \times I,\ x \longmapsto (x, \varepsilon)$. $\varepsilon = 0, 1$)

補題 9.1 $\simeq$ は同値関係である ― (証明は pp. 2-3)

$$[(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)] \overset{\text{def}}{=\!=} (Y, B_1, B_2)^{(X, A_1, A_2)} / \simeq$$

補題 9.2 合成

$$\circ : [(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)] \times [(Y, B_1, B_2), (Z, C_1, C_2)] \longrightarrow [(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)]$$

$$([f], [g]) \longmapsto [g \circ f]$$

は well-defined である ― (p. 3)

- $A_2 = \phi$ のとき $(X, A_1) := (X, A_1, \phi)$ (位相空間対 (pair))
- とくに $(X, x_0) := (X, \{x_0\}) = (X, \{x_0\}, \phi)$ 但. $x_0 \in X$
- $[(X, \phi, \phi), (Y, \phi, \phi)] = [X, Y]$

$\Longrightarrow$ 同一視 $(X, \phi, \phi) = (X, \phi) = X$ ―

基本群 $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\partial I = \{0, 1\} \subset I$

(X, x_0) pointed space

$\ell \in (X, x_0)^{(I, \partial I)}$ loop とよぶ

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=\!=} [(I, \partial I), (X, x_0)] = [(I, 0, 1), (X, x_0, x_0)]$$

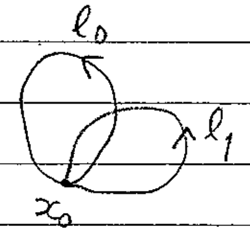
$\ni [\ell]$ pted space (X, x_0) の基本群

homotopy class

積 $l_0, l_1 \in (X, x_0)^{(I,\partial I)}$ loops

$$(l_1 \cdot l_0)(t) := \begin{cases} l_0(2t) & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ l_1(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\longleftarrow$
読む順番



($t = \frac{1}{2}$ で $l_0(1) = x_0 = l_1(0)$
$\Longrightarrow$ well-defined かつ 連続)

補題 9.3 homotopy 類の積

$$\cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$
$$([l_1], [l_0]) \longmapsto [l_1] \cdot [l_0] := [l_1 \cdot l_0]$$

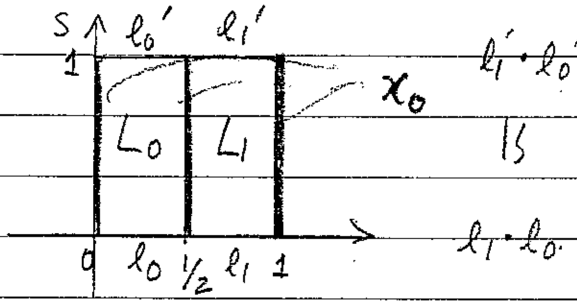
は well-defined である.

$\Uparrow$

homotopy のはりあわせ

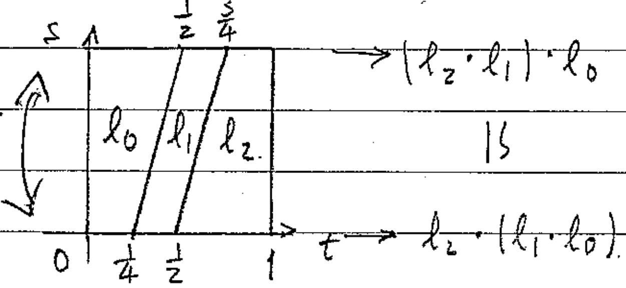
$\Uparrow$

homotopy も基点を保つ必要あり!!

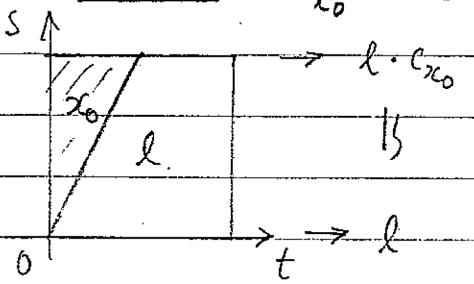


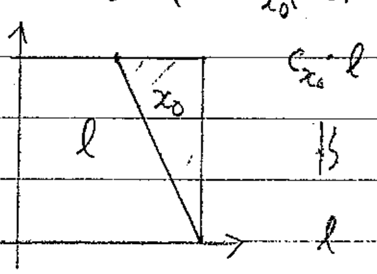
補題 9.4 $\pi_1(X, x_0)$ は群をなす

(証) (1) 結合則



(2) 単位元 $e_{x_0} := [c_{x_0}] \in \pi_1(X, x_0)$ (但: $c_{x_0}(\forall t) = x_0$)

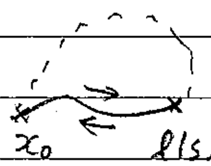


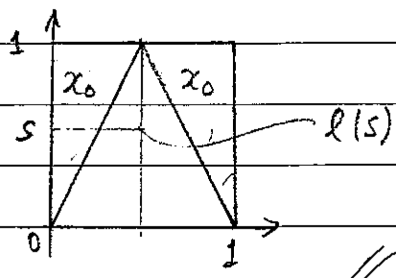


(3) 逆元

$\bar{\ell}(t) \overset{\text{def}}{=} \ell(1-t)$

$\ell \cdot \bar{\ell} \simeq c_{x_0}$





//

(Y, y_0)：もう一つの点つき空間

$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ conti. map

補題 9.5 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\ell] \mapsto [f\circ\ell]$

は well-defined な準同型である。また

homotopy 不変性 $\left\{ \begin{array}{l} f \simeq f' : (X, x_0) \to (Y, y_0) \\ \Rightarrow f_* = f'_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \end{array} \right.$

(証) (well-defined) (homotopy invariance) $\Leftarrow$ Lemma 9.2 $[f]\circ[\ell] = [f\circ\ell]$ は well-defined

(準同型) $\forall t \in [0,1]$

$$f\circ(\ell_1\cdot\ell_0)(t) = \begin{cases} f(\ell_0(2t)) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(\ell_1(2t)) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = ((f\circ\ell_1)\cdot(f\circ\ell_0))(t)$$

//

π_1 : (点つき空間の homotopy 圏) $\to$ (群の圏) 共変関手

余H空間 S^1 との関係

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \ni 1$ 基点

$p : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ $\quad p(t) := e^{2\pi\sqrt{-1}t}$

補題 9.6 $p^* : [(S^1, 1), (X, x_0)] \xrightarrow{\cong} [(I, \partial I), (X, x_0)] = \pi_1(X, x_0)$

$[f] \longmapsto [f\circ p]$

$\mu : (S^1, 1) \to (S^1 \vee S^1, (1,1))$ coproduct

$$\mu(p(t)) = \begin{cases} (p(2t), 1) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (1, p(2t-1)) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$f, g \in (X, x_0)^{(S^1, 1)}$

(9.4) $p^*[(f \vee g) \circ \mu] = (p^*[g]) \cdot (p^*[f])$

一般に $((Z, z_0), \mu)$: co H space について
$[(Z, z_0), (X, x_0)]$ には積が入る

$[f] \cdot [g] := [(g \vee f) \circ \mu]$ $\quad ([f] \cdot [g] \in [(Z, z_0), (X, x_0)])$

(Z, z_0) が条件 (4.5) をみたす
$\alpha \in H_q(Z)$, $q \geq 1$ とする

定理 9.8. $h_\alpha : [(Z, z_0), (X, x_0)] \to H_q(X)$
$[f] \longmapsto f_* \alpha$

は積を和にうつす

(証) $h_\alpha([f] \cdot [g]) = (g \vee f)_* \mu_* (\alpha)$

$\underset{\text{Cor 4.9}}{=} (g \vee f)_* (i_{1*}\alpha + i_{2*}\alpha) = g_*\alpha + f_*\alpha$

$= h_\alpha[f] + h_\alpha[g]$ //

基本群にもどる
$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$
の証明をはじめる. (次回までかかる)

$1 \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$p : \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}x}$, 被覆空間の典形例

定理9.9 (p の covering homotopy property)

(C, H, P written above the initial letters)

$\forall X$: compact 距離空間 (実は不要な仮定)

$i_0 : X \to X \times I$, $x \mapsto (x, 0)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "\forall \bar{F}"'] & S^1 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "\bar{F}"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$f, \bar{F}$: conti　　　F : conti ($\bar{F}$ の lift という)

CHP はここまで ↑

さらに このpについては F は unique

(証) 一意性 (X が compact でなくとも成立つ証明)

$F, F' : X \times I \to \mathbb{R}$　2つの lifts

$x \in X$

$A_x := \{ t \in I \,;\, F(x,t) = F'(x,t) \}$

$\ni 0$ ($\because F(x,0) = f(x) = F'(x,0)$)

とくに $A_x \neq \phi$

$A_x = \{ t \in I \,;\, F'(x,t) - F(x,t) = 0 \} \Rightarrow A_x \overset{\text{closed}}{\subset} I$

$= \{ t \in I \,;\, |F'(x,t) - F(x,t)| \lneqq 1 \} \Rightarrow A_x \overset{\text{open}}{\subset} I$

I : conn より $A_x = I$ ゆえに $F = F'$ //

存在 $\{U, V\}$: S^1 の open covering

$U := S^1 \setminus \{-1\}$, $V := S^1 \setminus \{+1\}$

$\left.\begin{array}{l} p|_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[} :]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\xrightarrow{\approx} U \\ p|_{]0,1[} :]0,1[\xrightarrow{\approx} V \end{array}\right\}$ homeo

d : $X \times I$ 上の距離

$$d((x,t),(x',t')) = d_X(x,x') + |t'-t| \qquad \left(\begin{matrix}(x,t)\\(x',t')\end{matrix} \in X \times I\right)$$

$\Longrightarrow$ $X \times I$ compact metric space

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "\bar{F}"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\{\bar{F}^{-1}(U), \bar{F}^{-1}(V)\}$: $X \times I$ の open covering

$\exists \rho > 0$ Lebesgue 数

$\exists N$, $\frac{1}{N} < \frac{\rho}{2}$

$\exists O_1, \cdots, \exists O_m$ X の開被覆 $\delta(O_j) < \frac{\rho}{2}$

$F(O_j \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]) \subset U$ または V

$\exists F'_{j,i} : O_j \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \longrightarrow \mathbb{R}$ conti

s.t. $p \circ F'_{j,i} = \bar{F}$ $\left((p|_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[})^{-1}\right.$ または $\left.(p|_{]0,1[})^{-1} \text{ を使え} \right)$

$i=1$ から順にはりあわせて

$F_j : O_j \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ conti

$$\begin{cases} p \circ F_j = \bar{F} \\ F_j(x,0) = f(x) \quad (\forall x \in O_j) \end{cases}$$

$O_{j_1} \cap O_{j_2}$ 上の lift の一意性により

$$F_{j_1} = F_{j_2} \text{ on } (O_{j_1} \cap O_{j_2}) \times I$$

$\Longrightarrow$ lift $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ がえられる //

$\underset{\text{次回}}{\Longrightarrow}$ $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

定理 9.10. $\forall q \geq 2$

$$\pi_q(S^1, 1) \overset{\text{def}}{=} [(D^q, S^{q-1}), (S^1, 1)] = 0$$

(証) $\forall f : (D^q, S^{q-1}) = (I^q, \partial I^q) \to (S^1, 1)$

$$\begin{tikzcd} I^{q-1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "i_0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I^{q-1} \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists F"] & S^1 \end{tikzcd}$$

∂I^q : path-conn ($\Leftarrow q \geq 2$) より

$F(\partial I^q) = 0$

$F : (D^q, S^{q-1}) \to (\mathbb{R}, 0)$ とみなされる

$(\mathbb{R}, 0) \cong (*, *)$

$p \circ F = f$

ゆえに $f \simeq *$ //