（§5 特異homology群の定義（つづき））

$n \geq 0$

$$\Delta^n = \{ x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} ; x_i \geq 0 \ (0 \leqq {}^\forall i \leqq n), \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \}$$

standard n-simplex　　n次元の「三角形」

X : top. sp.

$$S_n(X) := \mathbb{Z}X^{\Delta^n} = \mathbb{Z}\{\sigma : \Delta^n \to X : \text{conti. map}\}$$

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ d_i^{n-1})$$

$d_i^{n-1} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n,\ (x_0, \cdots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1})$ face map

Lemma 5.3　$\partial_n \partial_{n+1} = 0$ ―

$\Downarrow$

$$B_n(S_*(X)) = \mathrm{Im}\,\partial_{n+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_n = Z_n(S_*(X))$$

$$H_n(X) = H_n(X;\mathbb{Z}) := Z_n(S_*(X)) / B_n(S_*(X))$$

Xのn次元整係数(特異)homology群

今日やること

- Δ^nの形について
- $H_*(X)$のhomotopy不変性　「性質」(I)

（・cubic singular homologyについて）―

$\Delta^n \approx D^n$

補題5.9　V : n次元実vector空間, $n \geq 1$

$\mu : V \to \mathbb{R}$ 連続函数

${}^\forall x \in X, {}^\forall a \geq 0$

(i) $\mu(x) \geq 0$

(ii) $\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\mu(ax) = a\mu(x)$

$\Rightarrow {}^\exists f : V \to \mathbb{R}^n$ homeo.

s.t. $f^{-1}(D^n) = \{ v \in V ; \mu(v) \leqq 1 \}$, $f^{-1}(S^{n-1}) = \{ v \in V : \mu(v) = 1$

No. Date . .

(証) $V = \mathbb{R}^n$ としてよい

$\|x\| := (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とおく

このとき $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqq 1\}$

$S^{n-1} = \{ \quad = 1\}$

$f : V \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := \dfrac{\mu(x)}{\|x\|} x$, $f(0) = 0$

$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to V$, $f^{-1}(x) := \dfrac{\|x\|}{\mu(x)} x$, $f^{-1}(0) = 0$

互いに逆, 連続 (← 要check)

$f^{-1}(D^n) = \{\mu \leqq 1\}$, $f^{-1}(S^{n-1}) = \{\mu = 1\}$ //

補題 5.10. $\Delta^n \approx D^n$, $\partial\Delta^n \approx S^{n-1}$

(証) $V := \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} x_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ linear subsp.

$\mu : V \to \mathbb{R}$ $\mu(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \max_{0 \leqq i \leqq n} x_i$ 連続

Lem 5.9 の (i)〜(iii) をみたす

$\Rightarrow$ $\Delta_0^n := \{\mu \leqq 1\} \approx D^n$

$\Delta^n \approx \Delta_0^n$

$(t_0, \cdots, t_n) \mapsto (1-(n+1)t_0, \cdots, 1-(n+1)t_n)$

$\dfrac{1}{n+1}(1-x_0, \cdots, 1-x_n) \leftarrow (x_0, \cdots, x_n)$ //

補題 5.11 $0 \leqq {}^\forall p \leqq n$

$I^n \approx D^p \times D^{n-p} \approx D^n$

(証明略 : うまく μ をとって補題 5.9 を使う)

(Lem 5.12 : $d_i^1 : \Delta^1 \to \Delta^2$ を具体的にみよ)

§6 特異 homology 群 の homotopy 不変性

X, Y : 位相空間

$f, g : X \to Y$ 連続写像

定義 $f \simeq g : X \to Y$ homotopic

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists F : X \times [0,1] \to Y$ conti. map

s.t. $\forall x \in X$ $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$

F : f と g につなぐ homotopy

補題 6.1 $\simeq$ は $Y^X := \{f : X \to Y \text{ conti. map}\}$ 上の同値関係である

証) (1) $f \simeq f$

(($\because$) $F(x,t) := f(x)$, $x \in X$, $t \in [0,1]$ とおけ //)

(2) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$

($\because$) F : f と g につなぐ homotopy

$G : X \times I \to Y$ $G(x,t) := F(x, 1-t)$ $\left(\begin{matrix} x \in X \\ t \in [0,1] \end{matrix} \right)$

g と f につなぐ homotopy //

(3) $f \simeq g$, $g \simeq h \Rightarrow f \simeq h$

($\because$) F : f と g につなぐ homotopy

G : g と h につなぐ homotopy

$$H(x,t) := \begin{cases} F(x, 2t) & \text{if } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

$t = \frac{1}{2}$, $F(x,1) = g(x) = G(x,0)$.

はりあわせの補題 (Lem 1.5) により連続 //

No. Date . .

$[X, Y] := Y^X/\simeq$ homotopy set

$\left(= \pi_0(Y^X) \quad \left(\begin{array}{l} Y^X \text{ に compact 開位相を入れる} \\ X : \text{局所 compact Hausdorff 空間のとき} \end{array} \right) \right)$

$[f] := f \bmod \simeq$ homotopy class of f

補題 6.2. X, Y, Z : 位相空間

$f \simeq f' : X \to Y, \quad g \simeq g' : Y \to Z$

$\Longrightarrow \quad g \circ f \simeq g' \circ f' : X \to Z$

(証) F : f を f' につなぐ homotopy

G : g を g' につなぐ

$g \circ F : X \times [0,1] \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{g} Z$ conti

$gF(x, 0) = g \circ f(x)$

$gF(x, 1) = g \circ f'(x)$

ゆえに $g \circ f \simeq g \circ f' : X \to Z$

$G \circ (f' \times 1_{[0,1]}) : X \times [0,1] \xrightarrow{f' \times 1_{[0,1]}} Y \times [0,1] \xrightarrow{G} Z$

$G(f'(x), 0) = g \circ f'(x)$

$G(f'(x), 1) = g' \circ f'(x)$

ゆえに $g \circ f' \simeq g' \circ f' : X \to Z$

あわせて $g \circ f \simeq g' \circ f' : X \to Z$ //

合成

$\circ : [X, Y] \times [Y, Z] \longrightarrow [X, Z]$

$([f], [g]) \longmapsto [g \circ f]$

は well-defined である $\Longrightarrow$ 位相空間の homotopy 圏

今日の主定理

定理 6.4 (homology 群の homotopy 不変性「性質(I)」)

X, Y : top. sp's

$f \simeq g : X \to Y$

$\Rightarrow \forall n \geq 0 \quad f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$

F : f と g につなぐ homotopy とする

$\forall x \in X, \quad F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x)$

言いかえ $\varepsilon = 0, 1$ について

$i_\varepsilon : X \to X \times [0,1], \quad x \mapsto (x, \varepsilon)$

とおくと

$\Leftrightarrow \quad F \circ i_0 = f, \quad F \circ i_1 = g$

定理は次に帰着する

命題 6.5 $\forall n \geq 0$

$i_{0*} = i_{1*} : H_n(X) \to H_n(X \times [0,1])$

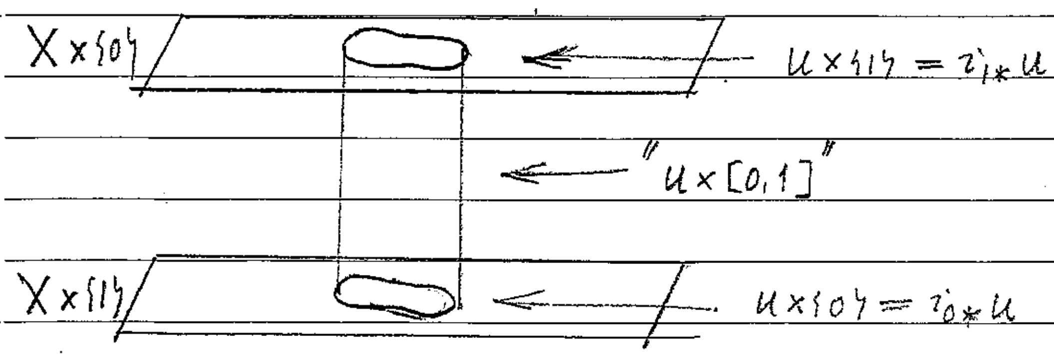
Prop. ⇒ Th $\quad f_* = F_* \circ i_{0*} \overset{\text{Prop 6.5}}{=} F_* \circ i_{1*} = g_*$ //

Prop 6.5 の証明のアイディア

示したいこと $\forall u \in Z_n(S_*(X))$ n-cycle

$[i_{0*}u] \underset{?}{=} [i_{1*}u] \in H_n(X)$

$\Leftrightarrow \quad i_{1*}u - i_{0*}u \underset{?}{\in} \partial_{n+1} S_{n+1}(X)$



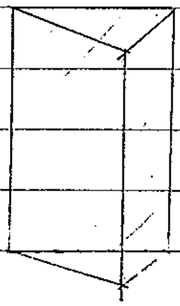
$$i_{1*}u - i_{2*}u = \partial_{n+1}\text{"}u\times[0,1]\text{"} \in \partial_{n+1}S_{n+1}(X)$$

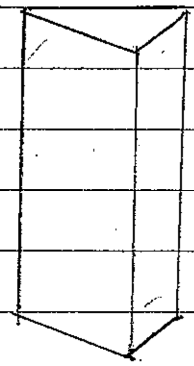
したがって $\times[0,1]$ という準同型

$$\Phi_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X\times[0,1])$$

$$\sigma \longmapsto \Phi_n\sigma := \text{"}\sigma\times[0,1]\text{"}$$

と作ればよい。

$\Phi_n\sigma =$ 

$\partial_{n+1}\Phi_n\sigma =$ $\pm$ $i_{1*}\sigma$ $+$ $\pm$ $i_{0*}\sigma$ $+ \pm$ 

つまり

$$\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = -\Phi_{n-1}\partial_n\sigma + i_{1*}\sigma - i_{0*}\sigma \qquad (\partial\sigma)\times[0,1] = \Phi_{n-1}\partial_n\sigma$$

$\rightsquigarrow$ chain homotopy の概念。

一般に

$C_* = \{C_q,\ \partial_q : C_q \to C_{q-1}\}_{q\geq 0}$ chain complexes

$D_* = \{D_q,\ \partial'_q : D_q \to D_{q-1}\}_{q\geq 0}$

$f_*, g_* : C_* \to D_*$ chain maps

<u>定義 6.6</u> $\Phi : C_* \to D_*$: f_* と g_* につなぐ chain homotopy

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

0) $\Phi_q : C_q \to D_{q+1}$ 準同型 $(q \geq 0)$.

($\Phi_{-1} = 0$ と理解する)

1) $\forall q \geq 0$

$$\partial'_{q+1}\Phi_q + \Phi_{q-1}\partial_q = g_* - f_* : C_q \to D_q$$

このとき

$$f_* \simeq g_* : C_* \to D_*$$

と表す. また $\forall q \geqq 0$ について次が成立つ

$$f_* = g_* : H_q(C_*) \to H_q(D_*)$$

(∵) $\forall u \in Z_q(C_*)$

$$g_*[u] - f_*[u] = [g_* u - f_* u] = [\partial'_{q+1}\Phi_q u + \Phi_{q-1}\overbrace{\partial_q u}^{0}]$$

$$= [\partial'_{q+1}\Phi_q u] = 0 \in H_q(D_*) \ /\!/$$

X : 位相空間にもどる.

i_{0*} を i_{1*} につなぐ chain homotopy をつくる.

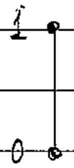
⇑

$\Delta^n \times [0,1]$ を $S_{n+1}(\Delta^n \times [0,1])$ の元として解釈する.

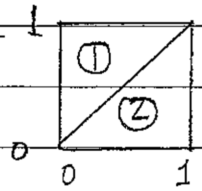
⇑

$\Delta^n \times [0,1]$ を三角形分割する (prism 分解)

$\underline{n=0}$



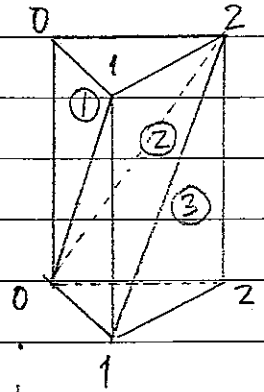
$\underline{n=1}$



① $(\underline{0},0),(\underline{0},1)(\underline{1},1)$

② $(\underline{0},0)(\underline{1},0)(\underline{1},1)$

$\underline{n=2}$



① 0, 0, 1, 2

② 0, 1, 1, 2

③ 0, 1, 2, 2

$\Longrightarrow$ $\Delta^n \times [0,1]$ の組織的な三角形分割

$$0, 1, \cdots, i-1, \underline{i}, \underline{i}, i+1, \cdots, n.$$

$n \geqq 0$, Δ^n の頂点

$$e_k^n := (\overset{0}{0}, \cdots, 0, \overset{k}{1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Delta^n = (e_0^n, e_1^n, \cdots, e_n^n \text{ のはる凸集合}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Delta^n \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$$

$0 \leq i \leq n$

$s_i^{n+1}: \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$

$$e_k^{n+1} \longmapsto s_i^{n+1}(e_k^{n+1}) = \begin{cases} (e_k^n, 0) & \text{if } k \leq i \\ (e_{k-1}^n, 1) & \text{if } k > i \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $s_i^{n+1}: \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \times [0,1]$ $(0 \leq i \leq n)$ うめこみ

($n = 0, 1, 2$ のとき さっきの三角形分割に一致する)

$\Phi_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times [0,1])$

$$\Phi_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ s_i^{n+1} \in S_{n+1}(X \times [0,1])$$

補題6.7 $\Phi_n : S_n(\cdot) \longrightarrow S_n(\cdot \times [0,1])$ 自然変換

明らか

補題6.8 $\partial_{n+1} \Phi_n = -\Phi_{n-1} \partial_n + i_{1*} - i_{0*} :$
$S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times [0,1])$

(直接計算 pp 8-10 参照)

$\Downarrow$

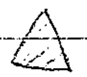
Prop 6.5 : $i_{1*} = i_{0*} : H_*(X) \longrightarrow H_*(X \times [0,1])$

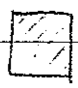
$\Downarrow$

Th 6.4 //

§A 立方体的特異homology群

Δ^n の代わりに $I^n = [0,1]^n$ を用いて特異homology群を考える





$$H_*^{cube}(X) \underset{\text{Th A.7}}{\overset{\longleftarrow}{\cong}} H_*(X)$$

$\Longrightarrow$
- homotopy 不変性
- Serre spectral 系列
- Hurewicz 同型定理

などの見通しがよくなる