§3 Homology 群とはどのようなものか?

Homology 群

X : 位相空間

$H_q(X) = H_q(X;\mathbb{Z})$ 可換群 (定義は11月になってから)

いくつかの基本的性質 (証明はあとでゆっくり)

今日の目標 $\Downarrow$ $S^n = \{(x_0, x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$ n-sphere

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 0, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$ $\rightsquigarrow$ さまざまな応用

$\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m$ if $n \neq m$

Homology 群の基本性質

$q \geqq 0$

$$H_q : (\text{位相空間}) \longrightarrow (\text{Abel 群})$$

$$X \longmapsto H_q(X) = H_q(X;\mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} f : X \to Y \\ \text{conti. map} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_* : H_q(X) \to H_q(Y) \\ \text{homom} \end{pmatrix}$$

自然性 $(1_X)_* = 1_{H_q(X)} : H_q(X) \to H_q(X)$

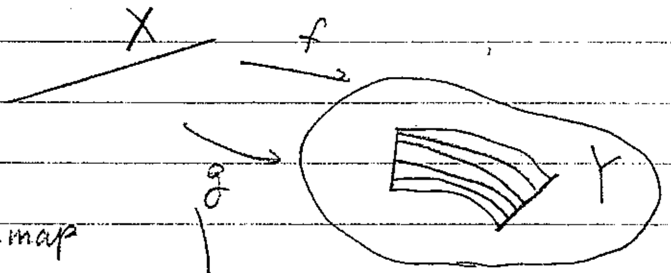
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} H_q(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & H_q(Y) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_q(Z) \end{tikzcd}$$ 共変函手

$$\left(\begin{array}{l} H_*(X) = \{H_0(X), H_1(X), \cdots, H_q(X), \cdots\} \text{ graded module} \\ f_* : H_*(X) \to H_*(Y) \text{ homom of graded modules} \end{array} \right)$$

No. Date

基本性質

(I) (homotopy 不変性)



$f \simeq g : X \to Y$ homotopic

(つまり $\exists F : X \times [0,1] \to Y$ conti. map
$\forall x \in X \quad F(x,0) = f(x),\ F(x,1) = g(x)$)

$\Rightarrow \quad f_* = g_* : H_q(X) \to H_q(Y)$

(II) (Mayer-Vietoris 完全列)

$\{U, V\}$: X の開被覆

$$\left.\begin{array}{l} i_U : U \cap V \hookrightarrow U, \quad i_V : U \cap V \hookrightarrow V \\ j_U : U \hookrightarrow X, \quad j_V : V \hookrightarrow X \end{array}\right\} \text{inclusion maps}$$

$$i := (i_{U*}, -i_{V*}) : H_q(U \cap V) \to H_q(U) \oplus H_q(V)$$

$$j := j_{U*} + j_{V*} : H_q(U) \oplus H_q(V) \to H_q(X)$$

このとき

$$\cdots \xrightarrow{i} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{i} H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V) \to$$

$$\cdots \xrightarrow{j} H_1(X) \xrightarrow{\partial_*} H_0(U \cap V) \xrightarrow{i} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{j} H_0(X) \to 0$$

(exact)

∂_* についてはあとで。　自然性をもつ

(III) $X_\lambda \subset X$: $\lambda \in \pi_0(X)$ に対応する弧状連結成分 ($X_\lambda = \lambda$)

$$H_q(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_q(X_\lambda)$$

(IV) $* = \{*\}$ 一点からなる位相空間について

$$H_q(*) = \begin{cases} 0 & \text{if } q \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{if } q = 0 \end{cases}$$

(V) $H_0(X) = \mathbb{Z}\pi_0(X)$ (自然な同型)

§5で定義する予定のもの　　§2で定義した $H_0(X)$

Date 04・10・20 No. 2

Mayer-Vietoris 完全列 の variants

((II') 被約 homology を使ったもの)

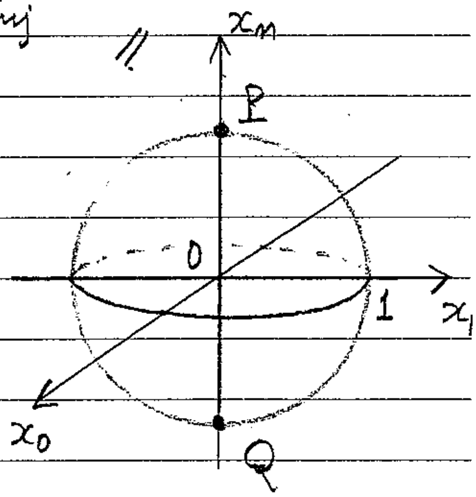
(II'') $U \cap V$: 0-conn. のとき

$$\cdots \to H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{j} H_1(X) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

(II) ⇒ (II'')

$$\xrightarrow{j:\,\mathrm{surj}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_* = 0} H_0(U \cap V) \xrightarrow{i:\,\mathrm{inj}} H_0(U) \oplus H_0(V) \quad \text{(exact)}$$

$U \cap V$: 0-conn
Lem 2.5(1) より i_{U*} : inj



$n \geq 1$ について

$$S^n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$$

n 次元球面

今日の主目標 (I)〜(V) を使って次を示す

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 0, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$P = (0, \cdots, 0, 1),\ Q = (0, \cdots, 0, -1) \in S^n$

$U := S^n \setminus \{Q\},\ V := S^n \setminus \{P\}$

$\{U, V\}$: open covering of S^n

$$\cdots \to H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{j} H_q(S^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \to H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V) \to \quad \text{(exact)}$$

($U, V, U \cap V$ の homology ⇒ S^n の homology)

記号 $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ について

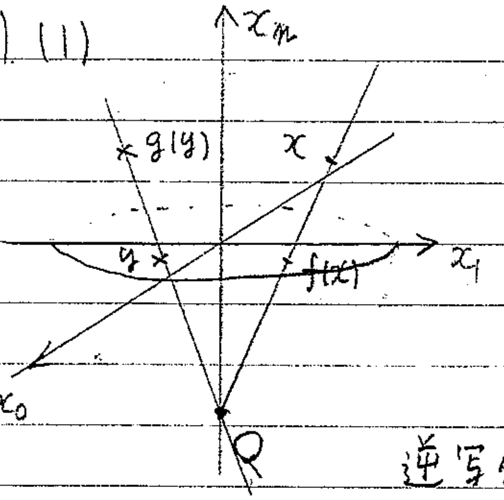
$$\|y\| := \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

補題 2.1 (1) $U \approx V \approx \mathbb{R}^n$

(2) $U \cap V \approx \mathbb{R}^n - \{0\}$

No. Date . .

(証) (1)



$f: U \to \mathbb{R}^n$
$g: \mathbb{R}^n \to U$) 同相写像をつくる

$(f(x), 0) = (tx_0, \cdots tx_{n-1}, tx_n - (1-t))$

$t(x_n+1) = 1 \quad t = \dfrac{1}{x_n+1}$

$f(x) = \left(\dfrac{x_0}{1+x_n}, \cdots \dfrac{x_{n-1}}{1+x_n}\right)$

逆写像

$g(y) = (sy_1, \cdots sy_n, s-1) \in S^n$

$s^2y_1^2 + \cdots + s^2y_n^2 + (s-1)^2 = 1$

$s^2\|y\|^2 - 2s + s^2 = 0 \quad (s \neq 0 \Leftrightarrow Q \neq g(y))$

$s = \dfrac{2}{1+\|y\|^2}, \quad s-1 = \dfrac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}$

$\begin{cases} f \circ g = 1_{\mathbb{R}^n} \\ g \circ f = 1_U \end{cases}$

(2) $g(P) = 0$ //

homotopy 同値 X, Y: 位相空間

$f: X \to Y$ homotopy equivalence

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 0) $f: X \to Y$ conti. map

1) $\exists g: Y \to X$ conti. map

$g \circ f \simeq 1_X : X \to X$

$f \circ g \simeq 1_Y : Y \to Y$

g: f の homotopy inverse （f に対して homotopy を除いて一意 / 一意にはきまらない）

補題3.2 このとき $^\forall q \geqq 0$ について

$f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$ 同型

(証) $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* \underset{\text{homotopy 不変性}}{=} 1_{X*} = 1_{H_q(X)}$

同様に $f_* \circ g_* = 1_{H_q(Y)}$ //

$X \simeq Y$ homotopy equivalent

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists f : X \to Y$ homotopy equivalence

X : contractible

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $X \simeq *$

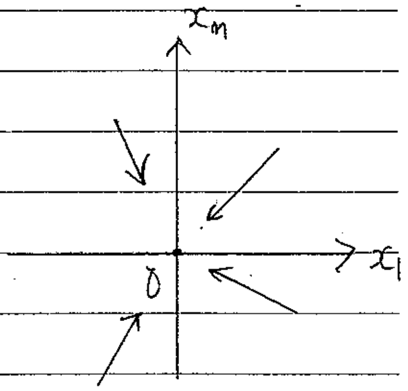
系3.3. $X \simeq Y \Rightarrow {}^\forall q \geq 0 \quad H_q(X) \cong H_q(Y)$

とくに X : contractible ならば

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

補題3.4. (1) $U \simeq V \simeq *$

(2) $U \cap V \simeq S^{n-1}$



証) (1) $U \approx V \approx \mathbb{R}^n$ より $\mathbb{R}^n \simeq *$ を示せばよい

$i : * \to \mathbb{R}^n, \ * \mapsto 0, \quad r : \mathbb{R}^n \to *, \ x \mapsto *$

$r \circ i = 1_*$

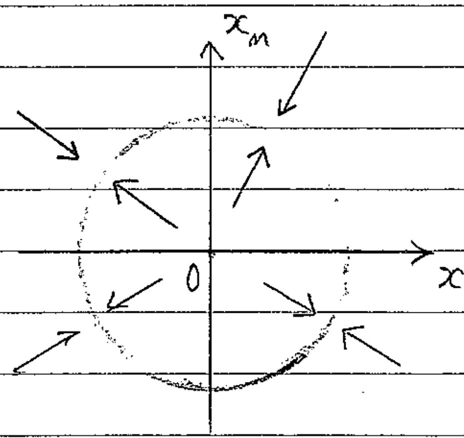
$F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n, \ (x,t) \mapsto tx$

$F(x,0) = 0 = ir(x)$

$F(x,1) = x = 1_{\mathbb{R}^n}(x)$

$i \circ r \simeq 1_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ゆえに $\mathbb{R}^n \simeq *$ //



(2) $U \cap V \approx \mathbb{R}^n - \{0\}$

$p : \mathbb{R}^n - \{0\} \to S^{n-1}, \ x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$

$\iota : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ inclusion

$p \circ \iota = 1_{S^{n-1}}$

$\Phi : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n - \{0\}$

$(x,t) \mapsto ((1-t) + t\|x\|) \dfrac{x}{\|x\|}$

$$\Phi(x,0) = \frac{x}{\|x\|} = \iota\rho(x)$$
$$\Phi(x,1) = x = 1_{\mathbb{R}^n-\{0\}}(x)$$

$\iota\circ\rho \simeq 1_{\mathbb{R}^n-\{0\}}$ ゆえに $\mathbb{R}^n-\{0\} \simeq S^{n-1}$ //

変位retract　X：位相空間　$A\subset X$ subspace

$i : A \hookrightarrow X$ inclusion

定義　A：Xの変位retract

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
- $\exists r : X \to A$　$\exists F : X\times[0,1] \to X$ conti. maps
- s.t.　$r\circ i = 1_A : A \to A$
- $\forall x\in X$　$F(x,0) = i\circ r(x)$
- $F(x,1) = 1_X(x)$
- $\forall (a,t)\in A\times[0,1]$,　$F(a,t) = a$

このとき　$i\circ r \simeq 1_X$ より　$A \simeq X$

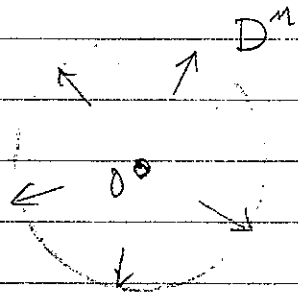
r：変位retraction　とよぶ

例　$\{0\}\subset\mathbb{R}^n$, $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n-\{0\}$) 変位retract　(F, Φは 4番目の条件もみたしている)

例3.5　$D^n = \{y\in\mathbb{R}^n ; \|y\|\le 1\} \subset \mathbb{R}^n$　n-ball

$\partial D^n = \{\|y\| = 1\} = S^{n-1}$

$D^n-\{0\}$ は S^{n-1} を変位retractにもつ



$H_q(S^n)$の計算

$$H_q(U) \cong H_q(V) \cong H_q(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_q(U\cap V) \cong H_q(S^{n-1})$$

$q \geqq 2$ について

$$H_q(U) \oplus H_q(V) \to H_q(S^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(U \cap V) \to H_{q-1}(U) \oplus H_{q-1}(V)$$

$$\underset{0}{\|} \qquad\qquad H_{q-1}(U\cap V) \cong H_{q-1}(S^{n-1}) \qquad\qquad \underset{0}{\|}$$

(3.2) $\boxed{H_q(S^n) = H_{q-1}(S^{n-1}) \quad (\forall q \geqq 2)}$

$\underline{n=0}$ $S^0 = \{\pm 1\} = * \amalg *$

$$H_q(S^0) = H_q(*) \oplus H_q(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{if } q = 0 \\ 0 & \text{if } q \neq 0 \end{cases}$$

定理3.6 $n \geqq 1$ について

$$H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 0, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(証) S^n: 0-conn ($\Leftarrow n \geqq 1$) より $H_0(S^n) = \mathbb{Z}\pi_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$

$H_q(S^n)$, $q \geqq 1$ を n について帰納的に計算する.

$\underline{n=1}$ $q \geqq 2$ のとき

$$H_q(S^1) = H_{q-1}(S^0) = 0$$

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(S^1) \to H_0(U \cap V) \xrightarrow{i} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

$$\underset{0}{\|}$$

前回補題2.12のへと同じ

$$H_1(S^1) = \operatorname{Ker} i = \mathbb{Z}$$

$\underline{n \geqq 2}$ $U \cap V \simeq S^{n-1}$ 0-conn. (II'') より

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(S^n) \to 0 \quad (\text{exact})$$

$$\underset{0}{\|}$$

ゆえに $H_1(S^n) = 0$.

(3.2) より $q \geqq 2$ について

$$H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1}) \underset{\text{帰納法の仮定}}{=} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q-1 = n-1 \ (\Leftrightarrow q = n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

帰納法が完成した //

No. Date . .

被約 homology 群では

定理 3.6a $\forall n \geq 0$ について

$$\tilde{H}_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = n \\ 0 & \text{if } q \neq n \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^m$ if $n \neq m$

定理 3.8 $n \neq m$, $\phi \neq U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $\phi \neq V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$
$\Longrightarrow U \not\approx V$

(証) $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ の場合だけを示す。
(一般の場合はプリント参照)
$n > m$ としてよい。
背理法 $\exists f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^m$ 同相と仮定

$$f : \underset{\substack{\text{IS} \\ S^{n-1}}}{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \xrightarrow[\text{同相}]{\approx} \underset{\substack{\text{IS} \\ S^{m-1}}}{\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}}$$

$$f_* : \underset{\substack{\text{IS Th3.6} \\ \mathbb{Z}}}{H_{n-1}(S^{n-1})} \xrightarrow{\cong} \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{n-1}(S^{m-1})} \quad (\Leftarrow n \neq m) \quad \text{矛盾} //$$

系 3.9 (多様体の次元の位相不変性)
$X, Y \neq \phi$, top. mfd $X \approx Y$
$\Longrightarrow \dim X = \dim Y$