§2 0次元 homology 群

X：位相空間

$\pi_0(X) := \{X の弧状連結成分\} = X/\sim$ the 0^{th} homotopy set

ただし，$\sim$ は $x_0, x_1 \in X$ について

$x_0 \sim x_1 \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, l : [0,1] \to X$ conti. s.t. $l(0) = x_0,\ l(1) = x_1$

$[x_0] = [x_0]_X := \{x_1 \in X \,;\, x_0 \sim x_1\}$ X における x_0 の弧状連結成分

Y: top. sp., $f : X \to Y$ conti. map

$\Longrightarrow f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ $[x]_X \longmapsto [f(x)]_Y$

包含写像 (inclusion map) $A \subset X$ subspace

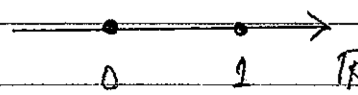
$i : A \hookrightarrow X$, $x \in A \mapsto x \in X$ $\boxed{\text{どこの元か？}}$

$i_* : \pi_0(A) \to \pi_0(X)$

単射とは限らない

(例) $X = [0,1]$, $A = \{0, 1\} \subset X$

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(A) & \longrightarrow & \pi_0(X) \\ [0]_A & \longmapsto & [\tfrac{1}{2}]_X \\ \neq & \nearrow & \\ [1]_A & & \end{array}$$



(例) X = 日本国, A = 和歌山県

⇒ 定量的に測定したい.

$\mathrm{Ker}\,(i_* : \mathbb{Z}\pi_0(A) \to \mathbb{Z}\pi_0(X))$

$\mathbb{Z}S$: 集合 S を基底とする自由加群

$H_0(X) = H_0(X;\mathbb{Z}) := \mathbb{Z}\pi_0(X)$ 集合 $\pi_0(X)$ の生成する自由加群

0次元 homology 群

No. Date . .

今日やること

自由加群, 完全列, 被約homology群,

$H_0(X)$についてのMayer-Vietoris完全列

(general nonsense? 「こんなんスカみたいや」)

自由加群 自由$\mathbb{Z}$加群, 自由Abel群, free module

S: 集合

$$\mathbb{Z}S := \left\{ \sum_{s \in S} a_s s \ ; \ a_s \in \mathbb{Z}, \text{有限個の} s \in S \text{を除いて} a_s = 0 \right\}$$

集合Sの生成する自由加群

$\sum a_s s + \sum b_s s := \sum (a_s + b_s) s \implies \mathbb{Z}S$: 可換群

例 $S = \{A, B, C\}$ のとき

$$\mathbb{Z}S = \{ aA + bB + cC \ ; \ a, b, c \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}^3$$

$\mathbb{Z}S \ni 2A + B - C$

$S = \{$りんご, みかん$\}$ のとき

$3 \cdot$りんご$+ 2 \cdot$みかん $\in \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}^2$

習慣 $a_s = 0$ なる $a_s s$ はおとして書く

$1 \cdot s = s$ とかく

$$t = \sum_{s \in S} \delta_{ts} s, \quad \delta_{ts} := \begin{cases} 1 & \text{if } t = s \\ 0 & \text{if } t \neq s \end{cases}$$

$S \hookrightarrow \mathbb{Z}S$ subset (自由)基底

任意の元 $\in \mathbb{Z}S$ は $\sum_{i=1}^{m} a_i s_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $s_i \in S$, という形に表される

注意 $\forall R$: 単位元をもつ可換環でも 自由R加群 RSが定義できる

$\implies H_0(X; R) := R\pi_0(X)$

$H_q(X; R)$ $(q \geq 1)$ (各自)

<u>補題 2.1.</u> $\forall M$: 可換群

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\forall map\, f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \\ \mathbb{Z}S \arrow[ur, dashed, "\exists !\, homom\, f_\#"'] & \end{tikzcd}$$

(証) $f_\#\left(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i\right) := \sum_{i=1}^{n} a_i f(s_i)$ 右辺は有限和! //)

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}S, M) \cong \mathrm{Map}(S, M)$, $g \mapsto g|_S$ Sへの制限

- $f : S \to T$ map

$\Rightarrow f : S \to T \hookrightarrow \mathbb{Z}T$

$\Rightarrow f_\# : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}T$ $\quad f_\#\left(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(s_i)$

<u>補題 2.2</u> (1) f : 単射 $\Rightarrow$ $f_\#$: 単射

(2) f : 全射 $\Rightarrow$ $f_\#$: 全射

(3) 一般の $f : S \to T$ について $\mathrm{Ker}\, f_\#$ は

$\{ s_1 - s_0 : s_0, s_1 \in S,\ f(s_0) = f(s_1) \}$

によって生成される — (証明略)

$U, V \subset S$ subsets

$\mathbb{Z}U \overset{\text{同一視}}{=} j_\# \mathbb{Z}U \subset \mathbb{Z}S$ $\quad j : U \hookrightarrow S$ inclusion

$= \left\{ \sum_{s \in S} a_s s \in \mathbb{Z}S : a_s \neq 0 \Rightarrow s \in U \right\}$

同様に $\mathbb{Z}V \subset \mathbb{Z}S$

<u>補題 2.3.</u> (1) $\mathbb{Z}U \cap \mathbb{Z}V = \mathbb{Z}(U \cap V)$

(2) $\mathbb{Z}U + \mathbb{Z}V = \mathbb{Z}(U \cup V)$

(証) (1) $u = \sum_{s \in S} a_s s \in \mathbb{Z}S$ について

$(u \in \mathbb{Z}U \cap \mathbb{Z}V) \Leftrightarrow (u \in \mathbb{Z}U$ かつ $u \in \mathbb{Z}V)$

$\Leftrightarrow (a_s \neq 0 \Rightarrow s \in U$ かつ $s \in V)$

$\Leftrightarrow (a_s \neq 0 \Rightarrow s \in U \cap V)$

$\Leftrightarrow (u \in \mathbb{Z}(U \cap V))$ //

No. Date

(2) $(\subset)$ $\mathbb{Z}U \subset \mathbb{Z}(U \cup V)$, $\mathbb{Z}V \subset \mathbb{Z}(U \cup V)$ より

$\mathbb{Z}U + \mathbb{Z}V \subset \mathbb{Z}(U \cup V)$

$(\supset)$ $U \cup V \subset \mathbb{Z}U + \mathbb{Z}V$ より $\mathbb{Z}(U \cup V) \subset \mathbb{Z}U + \mathbb{Z}V$ //

0次元 homology 群 the 0^{th} homology group

X : 位相空間

$$H_0(X) = H_0(X;\mathbb{Z}) := \mathbb{Z}\pi_0(X)$$

X の (整数係数) 0次元 homology 群

$f : X \to Y$ conti. map

$\Longrightarrow$ $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ $[x]_X \mapsto [f(x)]_Y$

$\Longrightarrow$ $f_* := (f_*)_\# : \underset{\substack{\| \\ H_0(X)}}{\mathbb{Z}\pi_0(X)} \to \underset{\substack{\| \\ H_0(Y)}}{\mathbb{Z}\pi_0(Y)}$

$$f_*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i [x_i]_X\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i [f(x_i)]_Y$$

自然性 = 函手性をもつ

$(1_X)_* = 1_{H_0(X)}$

$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

自然性について

F : (位相空間) $\to$ (可換群)

$X \mapsto F(X)$

$\left(\underset{\text{conti. map}}{f : X \to Y}\right) \mapsto \left(\underset{\text{homom}}{F(f) : F(X) \to F(Y)}\right)$

F : 自然性をもつ, 函手性をもつ, 自然である

(1) $\forall X$: 位相空間 $F(1_X) = 1_{F(X)}$

(2) $\forall f : X \to Y$, $\forall g : Y \to Z$ conti. maps

$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ —

F : (位相空間の圏 [category]) $\to$ (可換群の圏 [category]) 共変函手 [covariant functor]

補題2.4 (Fの位相不変性)

$f : X \to Y$ 同相写像

$\Rightarrow F(f) : F(X) \to F(Y)$ 同型

(証) $F(f^{-1}) \circ F(f) = 1_{F(X)}$, $F(f) \circ F(f^{-1}) = 1_{F(Y)}$ //

自然変換 G : (位相空間) $\to$ (可換群) もう一つ共変関手

$\varphi_X : F(X) \to G(X)$ homom ($\forall X$: top. sp.)

が自然な準同型である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall f : X \to Y$ conti. map

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

$\varphi : F \to G$ 自然変換 natural transformation —

$H_0(X)$ にもどる.

X : top. sp. $A \subset X$ subsp.

$i : A \hookrightarrow X$ inclusion map

$\Rightarrow i_* : H_0(A) \to H_0(X)$ inclusion homomorphism

単射とは限らない

例 $X = [0,1]$, $A = \{0,1\} \subset X$

$H_0(A) = \mathbb{Z}\pi_0(A) = \mathbb{Z}[0]_A + \mathbb{Z}[1]_A \cong \mathbb{Z}^2$

$i_*(a[0]_A + b[1]_A) = (a+b)[0]_X$

$\operatorname{Ker} i_* = \{a[0]_A + b[1]_A \,;\, a+b=0\}$

$= \{b([1]_A - [0]_A) : b \in \mathbb{Z}\}$

$= \mathbb{Z}([1]_A - [0]_A) \cong \mathbb{Z}$

$H_1(X) \to H_1(X,A) \to H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X)$ (exact)

$\overset{\text{実は}}{=} 0$ $\quad H_1(X,A) \cong \operatorname{Ker} i_* \cong \mathbb{Z}$

No. Date

H_0 は多寡が知れている

補題 2.5. $f: X \to Y$ conti. map

(1) X : 0-conn $\Rightarrow f_*: H_0(X) \to H_0(Y)$ injective

(2) $X \neq \phi$, Y : 0-conn $\Rightarrow f_*: H_0(X) \to H_0(Y)$ surjective

((pf) $f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ (1) injective
(2) surjective //)

完全列 (exact sequence)

L, M, N 可換群 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ homom.

$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ M において完全 (exact)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$

$\Longleftrightarrow (\underbrace{g \circ f = 0}_{\mathrm{Ker}\, g \supset \mathrm{Im}\, f}$ かつ $\underbrace{\forall m \in M \ (g(m) = 0 \Rightarrow \exists l \in L \ m = f(l))}_{\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Im}\, f})$

補題 2.6.

(1) $M \xrightarrow{g} N \to 0$ (exact) $\Leftrightarrow g$: surj

(2) $0 \to L \xrightarrow{f} M$ (exact) $\Leftrightarrow f$: inj

(3) $0 \to L \xrightarrow{h} M \to 0$ (exact) $\Leftrightarrow h$: isom

(4) $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ (exact) $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f \cong L$

(5) $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ (exact) $\Leftrightarrow N \cong M/\mathrm{Ker}\, g = M/\mathrm{Im}\, f$
$= \mathrm{Coker}\, f$

補題 2.7 S : set. $U, V \subset S$ subsets

$0 \to \mathbb{Z}(U \cap V) \xrightarrow{i} \mathbb{Z}U \oplus \mathbb{Z}V \xrightarrow{j} \mathbb{Z}U + \mathbb{Z}V \to 0$ (exact)

$\xi \longmapsto (\xi, -\xi)$ $(\eta_1, \eta_2) \longmapsto \eta_1 + \eta_2$

ここまでで用意したことばを使って $H_0(X)$ を記述してみる

X: 位相空間

$I = [0,1] \subset \mathbb{R}$

$X^I := \{l : I \to X \text{ conti. map}\}$

$$\left.\begin{array}{l} X \mapsto \mathbb{Z}X \\ X \mapsto \mathbb{Z}X^I \end{array}\right\} \text{共変函手}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varpi_X : \mathbb{Z}X \to \mathbb{Z}\pi_0(X) = H_0(X), & x \mapsto [x]_X \\ D_X : \mathbb{Z}X^I \to \mathbb{Z}X & l \mapsto l(1) - l(0) \end{array}\right\} \text{自然変換}$$

<u>補題 2.8.</u> $\mathbb{Z}X^I \xrightarrow{D_X} \mathbb{Z}X \xrightarrow{\varpi_X} H_0(X) \to 0$ (exact)

(pf) ϖ_X: 全射, $\varpi_X \circ D_X = 0$ 明らか ($\because$ $l(0) \sim l(1)$ in X)

$\mathrm{Ker}\,\varpi_X \subset \mathrm{Im}\,D_X$ を示す

$\{x_1 - x_0 \,;\, x_0, x_1 \in X,\ [x_0]_X = [x_1]_X\}$ によって生成される

$\exists\, l \in X^I$ $l(0) = x_0,\ l(1) = x_1$

$x_1 - x_0 = D_X l \in \mathrm{Im}\,D_X$ //

とくに $H_0(X) = \mathrm{Coker}(D_X : \mathbb{Z}X^I \to \mathbb{Z}X)$

<u>被約 homology 群</u> (reduced homology group)

S: set

$\varepsilon_S : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}$, $\sum_{i=1}^m a_i s_i \mapsto \sum_{i=1}^m a_i$ augmentation map 添加写像

$X \neq \phi$ top. sp. について

$$\tilde{H}_0(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}(\varepsilon_{H_0(X)} : H_0(X) \to \mathbb{Z})$$

$$\underset{\mathrm{Lem}\,2.10}{=} \mathrm{Ker}(\varepsilon_X : \mathbb{Z}X \to \mathbb{Z}) / \mathrm{Im}(D_X : \mathbb{Z}X^I \to \mathbb{Z}X)$$

補題2.9. $\phi \neq X$: top. sp.

(1) $\tilde{H}_0(X) = 0 \iff X$: path-conn. ((2)は略)

定理2.11 ($H_0(X)$についてのMayer-Vietoris完全列)

X : top. space $U, V \overset{open}{\subset} X$

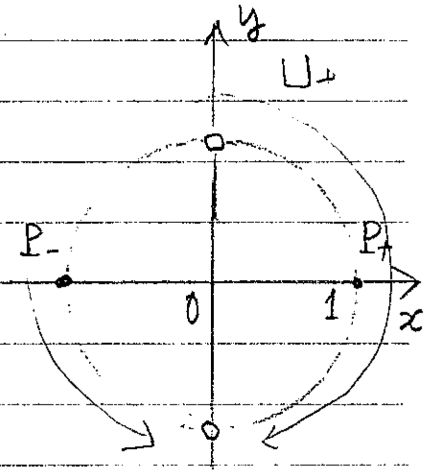
$X = U \cup V$ open covering

$$\Longrightarrow H_0(U \cap V) \xrightarrow{i} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{j} H_0(X) \to 0 \quad (\text{exact})$$

$$[z]_{U \cap V} \longmapsto ([z]_U, -[z]_U)$$

$$([x]_U, [y]_V) \longmapsto [x]_X + [y]_X$$

(証明はあとまわし またはプリント)



一般にiは単射とは限らない

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$

$U_+ = S^1 \setminus \{(0, -1)\}$

$U_- = S^1 \setminus \{(0, +1)\}$

$P_\pm := (\pm 1, 0) \in U_+ \cap U_-$

$H_0(U_+ \cap U_-) = \mathbb{Z}[P_+] \oplus \mathbb{Z}[P_-] \cong \mathbb{Z}^2$

$[P_+]_{U_\pm} = [P_-]_{U_\pm}$

補題2.12 $\operatorname{Ker} i = \mathbb{Z}([P_+] - [P_-]) \cong \mathbb{Z}$.

(証) $\xi = a[P_+] + b[P_-] \in H_0(U \cap V)$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$i(\xi) = ((a+b)[P_+], -(a+b)[P_-])$

$\xi \in \operatorname{Ker} i \iff a + b = 0 \iff \xi \in \mathbb{Z}([P_+] - [P_-])$ //

$\Longrightarrow$ ここから $H_1(S^1 ; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ がでてくる (来週)