§12 Euler数と有限胞体複体

M：有限生成Abel群

$M = \mathbb{Z}^r \oplus$ (有限Abel群) ($\Leftarrow$ 有限生成Abel群の基本定理)

$\mathrm{rk}\, M = \mathrm{rank}\, M \overset{\mathrm{def}}{=} r = \dim_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \lneq +\infty$

Mの階数

$M_* = \{M_i\}_{i \geq 0}$ 次数$\mathbb{Z}$-加群

各M_iはAbel群 = $\mathbb{Z}$-加群

M_*：有限生成 finitely generated

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists i_0 \geq 0$ $M_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i > i_0 \\ \text{fin. gen.} & \text{if } 0 \leq i \leq i_0 \end{cases}$

このとき

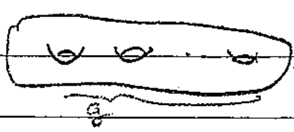
$\chi(M_*) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=0}^{i_0} (-1)^i \,\mathrm{rank}\, M_i$ M_*のEuler数

X：top. sp. $H_*(X) = \{H_i(X)\}_{i \geq 0}$ fin. gen. とする

(これをXは有限生成のhomologyをもつという)

$\chi(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \chi(H_*(X))$ XのEuler数 homotopy不変量

今日やること

- $\mathring{U} \cup \mathring{V} = X \Rightarrow \chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$
- $\Sigma_g =$  $\Rightarrow \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$
- X：finite cell complex 有限個のD^nをそれなりにはりあわせたもの (n-cell)

  $\Rightarrow \chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \# \{i\text{-cells}\}$

(• 単体複体のhomology → プリント)

- 正多面体の分類

o. Date

rank について
補題 12.1.

(0) $M' \to M \to M''$ (exact). M', M'' : fin. gen
$\Rightarrow$ M : fin. gen

(1) M, M', M'' : fin. gen.
$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ (exact)
$\Rightarrow$ $\mathrm{rk}\, M = \mathrm{rk}\, M' + \mathrm{rk}\, M''$

(2) $C_* : 0 \to C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to 0$
chain complex
C_i : fin. gen.
$\Rightarrow$ $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \mathrm{rk}\, H_i(C_*) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \mathrm{rk}\, C_i$

(証) (0) $\mathbb{Z}$: Noetherian

(1) $\mathbb{Q}$: torsion free $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$-flat

$0 \to M' \otimes \mathbb{Q} \to M \otimes \mathbb{Q} \to M'' \otimes \mathbb{Q} \to 0$ (exact)

$M \otimes \mathbb{Q} \cong M' \otimes \mathbb{Q} \oplus M'' \otimes \mathbb{Q}$ $\quad \Uparrow$ $\mathbb{Q}$-free

ゆえに $\mathrm{rk}\, M = \mathrm{rk}\, M' + \mathrm{rk}\, M''$

(2) $Z_i = Z_i(C_*)$, $B_i = B_i(C_*)$, $H_i = H_i(C_*)$

$0 \to Z_i \to C_i \xrightarrow{\partial} B_{i-1} \to 0$ (exact)

$0 \to B_i \to Z_i \to H_i \to 0$ (exact)

$$\begin{aligned} &\sum (-1)^i \mathrm{rk}\, C_i = \cancel{\sum (-1)^i \mathrm{rk}\, Z_i} + \cancel{\sum (-1)^i \mathrm{rk}\, B_{i-1}} \\ +)\ &\cancel{\sum (-1)^i \mathrm{rk}\, Z_i} = \cancel{\sum (-1)^i \mathrm{rk}\, B_i} + \sum (-1)^i \mathrm{rk}\, H_i \\ \hline &\sum (-1)^i \mathrm{rk}\, C_i = \sum (-1)^i \mathrm{rk}\, H_i \end{aligned}$$

//

つまり $\chi(H_*(C_*)) = \chi(C_*)$.

(X,A) 空間対

<u>定義</u> (X,A)：有限生成の homology をもつ

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $H_*(X,A)$；有限生成

このとき

$$\chi(X,A) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{rk} H_i(X,A)$$

(X,A) の <u>Euler(標)数</u>（Euler characteristic）

homotopy 不変性をもつ．

$$\chi(X,\phi) = \chi(X)$$

<u>例</u>

$$X \simeq * \Rightarrow \chi(X) = 1$$

$$\chi(S^n) = (-1)^0 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd} \\ 2 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

$$\chi(D^n, S^{n-1}) = (-1)^n$$

完全列との関係

<u>補題 12.2</u> M_*, M'_*, M''_*：graded $\mathbb{Z}$-modules 2つが fin. gen

$$\cdots \to M''_{i+1} \to M'_i \to M_i \to M''_i \to M'_{i-1} \to M_{i-1} \to \cdots$$

$$\cdots \to M'_1 \to M'_0 \to M_0 \to M''_0 \to 0 \quad (\text{exact})$$

$\Rightarrow$ のこりも fin. gen で

$$\chi(M_*) = \chi(M'_*) + \chi(M''_*)$$

(証) 補題 12.1 (0) よりのこり1つも fin. gen

完全列を chain cpx とみなす

$$C_q = \begin{cases} M''_i & \text{if } q = 3i \\ M_i & 3i+1 \\ M'_i & 3i+2 \end{cases}$$

$$H_*(C_*) = 0 \quad \Leftarrow \text{exact}$$

$$0 = \chi(H_*(C_*)) = \chi(C_*)$$

$$= \sum (-1)^{3i} \operatorname{rk} M''_i + \sum (-1)^{3i+1} \operatorname{rk} M_i + \sum (-1)^{3i+2} \operatorname{rk} M'_i$$

$$= \chi(M''_*) - \chi(M_*) + \chi(M'_*) \quad /\!/$$

補題 12.3 (X, A) 空間対

X, A, (X, A) うち2つが fin. gen. homology をもつ

$\Rightarrow$ のこり1つも fin. gen. homology をもち

$$\chi(X, A) = \chi(X) - \chi(A) \quad \square$$

補題 12.4 X : top. sp. $U, V \subset X$, $\mathring{U} \cup \mathring{V} = X$

$U, V, U \cap V, X$ うち3つが fin. gen. homology をもつ

$\Rightarrow$ のこりも fin. gen. homology をもち

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V) \quad \square$$

閉曲面の pants 分解 と Euler 数

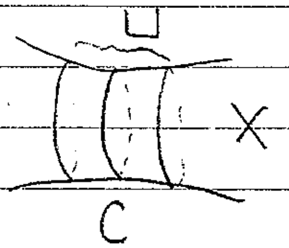
X : 曲面 = 有限生成の homology をもつ 2次元連結 C^∞ 多様体

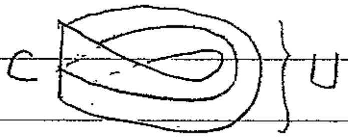
$C \subset X$ 単純閉曲線 (S.C.C.) = C^∞ submfd $\underset{C^\infty}{\cong} S^1$

このとき

(12.5) $\chi(X) = \chi(X - C)$

(pf)

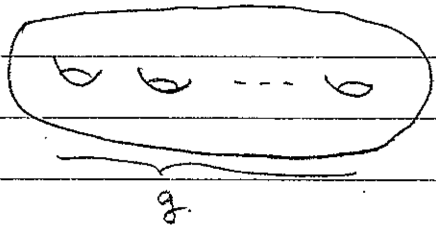




$$\chi(X) = \chi(X - C) + \underset{\substack{\| \\ \chi(S^1) \\ \| \\ 0}}{\underline{\chi(U)}} + \underset{\substack{\| \\ \left\{\begin{array}{l} \chi(S^1) \text{ または} \\ 2\chi(S^1) \end{array}\right. \\ \| \text{ いずれにせよ} \\ 0}}{\underline{\chi(U - C)}}$$

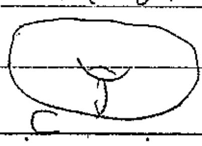
//

$g \geq 0$

$\Sigma_g =$ 

種数g (向きづけ可能) 閉曲面

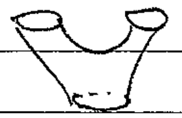
$\Sigma_0 = S^2$, $\chi(\Sigma_0) = 2$

$\Sigma_1 = T^2 =$ 

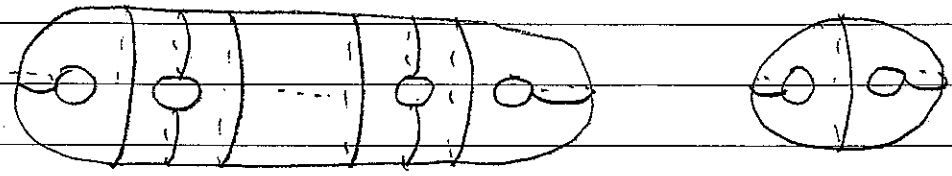
$\chi(T^2) = \chi(T^2 - C) = \chi(S^1) = 0$

(12.6) $\chi(\Sigma_g) = 2-2g$

(pf) $g \geqq 2$ について示せばよい

$P =$  pants

$$\chi(P) = \chi(P \setminus \partial P) = \chi(S^2) - 3\chi(\mathring{D}^2) = 2-3 = -1$$



$2+2(g-2) = 2g-2$ 個のpantsに分かれる

$$\chi(\Sigma_g) = (2g-2)\chi(P) = 2-2g \quad //$$

他のどんなpants分解でもあらわれるpantsは必ず $2g-2$ 個.

有限胞体複体 (finite cell complex)

$m \geqq 0$

$D^m = \{(x_1, \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m ; \sum_{i=1}^m x_i^2 \leqq 1\}$

$\mathring{D}^m = \{ \qquad \lneqq 1\}$

$\partial D^m = S^{m-1} = \{ \qquad = 1\}$

X : Hausdorff空間

定義 (e, φ) : X の cell (胞体)

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ (0) $e \subset X$, $\exists m$, $\varphi : D^m \to X$ conti. map

(1) $\varphi|\mathring{D}^m : \mathring{D}^m \to e$ 上への homeo

$\dim e := m$ e の次元

e : m-cell

φ : characteristic map

No. Date

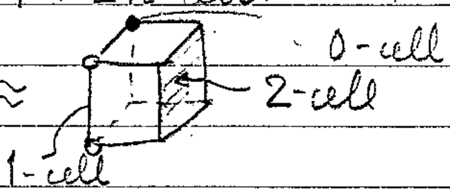
例 $\mathbb{C}P^n$ これは Hausdorff space

$e^{2n} := \{[z_0:\cdots:z_{n-1}:z_n] \in \mathbb{C}P^n ; z_n \neq 0\}$

$\varphi_{2n} : D^{2n} \to \mathbb{C}P^n \quad (z_1,\cdots,z_n) \longmapsto [z_1:\cdots:z_n:\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2}]$

$D^{2n} = \{(z_1,\cdots,z_n) \in \mathbb{C}^n ; \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 \leq 1\}$

(e^{2n}, φ_{2n}) : $2n$-cell.

例 $S^2 \approx$ 

定義 $(X, \{(e_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$: 有限胞体複体

$\overset{\text{def}}{\iff}$ (0) Λ : finite set

(1) X : Hausdorff space

(2) $(e_\lambda, \varphi_\lambda)$: X の cell, $\dim e_\lambda =: n_\lambda$

(3) $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ (disjoint union)

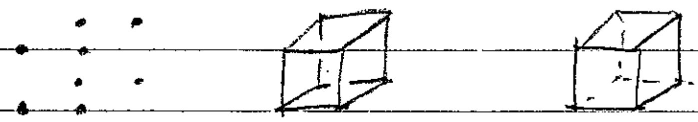
(4) $\forall \lambda \in \Lambda \quad \varphi_\lambda(\partial D^{n_\lambda}) \subset X^{(n_\lambda - 1)}$

ただし $X^{(k)} := \bigcup_{\dim e_\lambda \leq k} e_\lambda$ (k-skelton)

例 $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n}$ (Lem 12.8)

例 $S^n = e^0 \cup e^n$

例 正多面体は S^2 の cell-分割を与える.



0-skelton 1-skelton 2-skelton $= S^2$

$\dim X := \max_{\lambda\in\Lambda} \dim e_\lambda \ (\neq +\infty)$. X の次元

$X = X^{(\dim X)}$

ここだけの記号 $\Lambda_k := \{\lambda \in \Lambda ; \dim e_\lambda = k\}$

有限胞体複体の Euler 数

補題 12.9

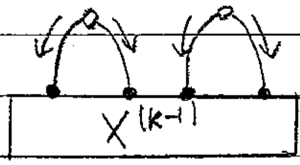
$$H_q(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \underset{\oplus\varphi_{\lambda *}}{\cong} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_k} H_q(D^k, \partial D^k) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\#\Lambda_k} & \text{if } q = k \\ 0 & \text{if } q \neq k \end{cases}$$

(証) $O' := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_k} \varphi_\lambda(\mathring{D}^k) \overset{\text{open}}{\subset} X^{(k)}$

$S' := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_k} \varphi_\lambda(\{0\}) \overset{\text{closed}}{\subset} X^{(k)}$

原点

$X^{(k-1)} \subset X^{(k)} - S'$ 変位retract



$$H_q(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \cong H_q(X^{(k)}, X^{(k)} - S')$$

$$\underset{exc}{\cong} H_q(O', O'-S') \underset{\oplus\varphi_{\lambda *}}{\cong} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_k} H_q(D^k, D^k - \{0\}) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_k} H_q(D^k, \partial D^k)$$

//

とくに $(X^{(k)}, X^{(k-1)})$ は有限生成の homology をもち

$$\chi(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = (-1)^k \# \Lambda_k .$$

定理 12.10 X : finite cell complex

$\Rightarrow \chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \# \Lambda_k$, $\#\Lambda_k = k$-cell の個数

(証) $m = \dim X$

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \chi(X^{(m)}) \\ &= \chi(X^{(m)}, X^{(m-1)}) + \chi(X^{(m-1)}) \\ &\ \ \vdots \\ &= \sum_{k=1}^{m} \chi(X^{(k)}, X^{(k-1)}) + \chi(X^{(0)}) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \# \Lambda_k \end{aligned}$$

//

$$C_*(X) = \{ C_k(X), \partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X) \}_{k \geq 0}$$

$$C_k(X) \overset{def}{=} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \cong \mathbb{Z}^{\#\Lambda_k}$$

$$\partial_k \overset{def}{=} \partial_* : H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \longrightarrow H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$$

$\equiv$ 対 $(X^{(k)}, X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$ の連結準同型

定理12.11

(1) $\partial_k \partial_{k+1} = 0$ つまり $C_*(X)$ chain complex

(2) $H_*(C_*(X)) \cong H_*(X)$

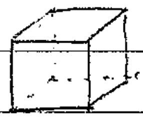
(証明略)

理論上は 有限胞体複体の構造から homologyが計算できる

すぐわかる例 $H_q(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } 0 \leqq q \leqq 2n, \text{ even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ふつうはむずかしい → 単体複体のhomology → プリント

正多面体の分類



$X =$ 正多面体 $\approx S^2$

$a = (\text{vertex} = 0\text{-cell})$ の個数

$b = \text{edge} = 1\text{-cell}$

$c = 2\text{-cell}$

$a - b + c = \chi(S^2) = 2$ (Euler)

各面：正n角形

$nc = 2b$

$c = \frac{2b}{n}$

各頂点：$v =$ valency 各頂点に何本辺が集まっているか？

$va = 2b \quad a = \frac{2b}{v}$

$2 = \frac{2b}{v} - b + \frac{2b}{n}$

$\frac{1}{v} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{b} > 0$

$v \geqq 3$ (×)

$n \geqq 3$ (× 2角形)

Date 05・1・26 No. 5

v と n のどちらか $=3$

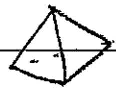
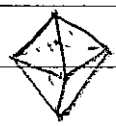
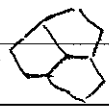
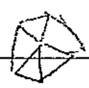
(∵) 両方 $\geqq 4$ ならば

$$0<\frac{1}{b}=\frac{1}{v}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0 \quad ※$$

他方 $=x$

$$0<\frac{1}{3}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6}$$

$$3 \leqq x \lneqq 6$$

(v, n)			Plato's Timaeus / Epinomis
(3, 3)	正4面体		火
(3, 4)	6		土
(4, 3)	8		空気
(3, 5)	12		水
(5, 3)	20		ether アイテール