Date 05・1・19 No. 1

§11 写像度とその局所化

$n \geqq 1$

$[S^n] \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ 生成元

$f : S^n \to S^n$ 連続写像

$\deg f \in \mathbb{Z}$ 写像度　　何重にかぶさっているか？

$$f_*[S^n] = (\deg f)[S^n] \in H_n(S^n)$$

例　$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $a \in \mathbb{Z}$

$f_a : z \in S^1 \longmapsto z^a \in S^1$

$\deg(f_a) = a$　　(Th 4.5)

今日やること
- 写像度を一般化 ⟹ たとえば n-dim. conn. closed ori. C^∞ mfd (§13で示す)
- 写像度の局所化

X, Y : n-dim. conn. oriented closed C^∞ mfd

$f : X \to Y$ C^∞ map, $q \in Y$ regular value

$$\Rightarrow \deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sign}\left((df)_p : T_pX \to T_qY\right)$$

何枚かぶさっているか？

$n \geqq 1$

X : 位相空間

条件 (11.0) (⟶ 写像度の定義と局所化)

(11.0.0) X : Hausdorff 空間

(11.0.1) $H_n(X) \cong \mathbb{Z}$

(11.0.2) $\forall p \in X$ $j_p : X = (X, \phi) \hookrightarrow (X, X - \{p\})$ inclusion について

$j_{p*} : H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X - \{p\})$ 同型

No. Date . .

補題 11.1 S^nは(11.0)をみたす

(証) (11.0.0) 明らか. (11.0.1) $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ (Th.3.6)

(11.0.2) $S^n \setminus \{p\} \approx \mathbb{R}^n \simeq *$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_n(S^n \setminus \{p\})} \to H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, S^n \setminus \{p\}) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\tilde{H}_{n-1}(S^n \setminus \{p\})}$$

//

§13: X: n-dim orientable connected closed C^∞ mfd
$\Longrightarrow$ Xは(11.0)をみたす.

写像度 $X, Y, Z, \cdots$ (11.0)をみたす空間.

生成元 $[X] \in H_n(X) \cong \mathbb{Z}$, $[Y] \in H_n(Y)$ をとる.

$\forall f: X \to Y$ conti. map $\exists ! \deg f \in \mathbb{Z}$

$$f_*[X] = (\deg f)[Y] \in H_n(Y) \cong \mathbb{Z}$$

$\deg f$: 生成元$[X]$, $[Y]$に関するfの写像度 (mapping degree)

補題 11.2

(1) $\deg(1_X) = 1$

(2) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \Rightarrow \deg(g \circ f) = (\deg g)(\deg f)$

(3) $f \simeq f' \Rightarrow \deg f = \deg f'$

(4) $f: X \to Y$ homotopy equivalence
$\Longrightarrow \deg f = \pm 1$

補題 11.3 $f: X \to Y$ conti. map
$\deg f \neq 0$
$\Longrightarrow$ fは全射である

(証) 対偶を示す: $\exists q \in Y - f(X) \Rightarrow \deg f = 0$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d, "f"] \\ Y-\{q\} \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} & H_n(X) \arrow[dl] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, "0"] & \\ H_n(Y-\{q\}) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y, Y-\{q\}) \end{tikzcd} \quad \text{(exact)} \quad //$$

写像度の局所化

(準備)

補題 11.4 X : Hausdorff 空間

$\Rightarrow \forall p \in X \quad p \in \forall U \overset{open}{\subset} X$

$\iota_{U,p*} : H_n(U, U \setminus \{p\}) \xrightarrow{\cong} H_n(X, X \setminus \{p\})$ inclusion homom

(証) $X - \{p\} \overset{open}{\subset} X$ より $\overline{X-U} = X - U \subset X - \{p\} = (X - \{p\})^{\circ}$ //

X, Y 位相空間

$f : X \to Y$ 連続写像 $p \in X$

定義 f は p において locally homeomorphic

$\overset{def}{\iff} p \in \exists U \overset{open}{\subset} X, \ f(p) \in \exists V \overset{open}{\subset} Y$

$f|_U : U \xrightarrow{\approx} V$ homeo

例 X, Y : C^∞ mfds $f : X \to Y$ C^∞ map, $p \in X$

$(df)_p : T_p X \xrightarrow{\cong} T_{f(p)} Y$ 同型

$\Rightarrow$ f は p において local homeo ($\Leftarrow$ 逆写像定理)

X, Y : (11.0) をみたす空間

$p \in X$

$$\begin{array}{rccc} j_{p*} : & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X - \{p\}) \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & [X] & \longmapsto & j_{p*}[X] =: [X]_p \end{array}$$

$[X]$ の定める p における X の (homology 的) 向き orientation

$f : X \to Y$ conti. map

$p \in X$ において local homeo. U, V 上の通り

$$
\begin{tikzcd}
{[X]_p \in H_n(X, X-\{p\})} & & H_n(Y, Y-\{f(p)\}) \ni (\deg_p f)[Y]_{f(p)} \\
H_n(U, U-\{p\}) \arrow[u, "\iota_{U,p*}", "\cong"'] \arrow[rr, "\cong", "f_*"'] & & H_n(V, V-\{f(p)\}) \arrow[u, "\cong", "\iota_{V,f(p)*}"']
\end{tikzcd}
$$

$\exists !$ $\deg_p f \in \{\pm 1\}$ 局所的写像度

定理11.5.（写像度の局所化）

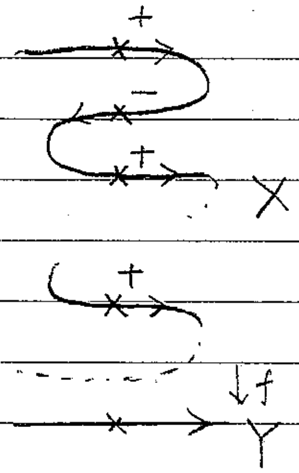
X, Y : (11.0) をみたす

$[X], [Y]$ が与えられている

$q \in Y$ $\# f^{-1}(q) \neq +\infty$

$\forall p \in f^{-1}(q)$ において f は loc. homeo.

$$\Longrightarrow \quad \deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$$



$\deg f = 2$

証明 $f^{-1}(q) = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$

$q \in {}^{\exists}V \overset{\text{open}}{\subset} Y$, $p_i \in {}^{\exists}U_i \overset{\text{open}}{\subset} X$

s.t. $\left[\begin{array}{ll} U_i \cap U_j = \phi & \text{for } i \neq j \quad (\Leftarrow \text{Hausdorff性}) \\ f|U_i : U_i \xrightarrow{\cong} V & \end{array}\right.$

$$
\begin{tikzcd}
{[X]} \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & (\deg f)[Y] \arrow[dd, mapsto] \\
H_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "j_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(Y) \arrow[d, "\cong", "j_*"'] & \\
j_*[X] \in H_n(X, X-f^{-1}(q)) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(Y, Y-\{q\}) & (\deg f)[Y]_q = \left(\sum(\deg_{p_i} f)\right)[Y]_q \\
\bigoplus_{i=1}^{m} H_n(U_i, U_i-\{p_i\}) \arrow[u, "\cong", "\mathrm{exc}"'] \arrow[r, "f_*"] & H_n(V, V-\{q\}) \arrow[u, "\cong", "\mathrm{exc}"'] & \\
\sum_{i=1}^{m} (\iota_{U_i,p_i*})^{-1}[X]_{p_i} \arrow[r, mapsto] \arrow[uu, mapsto] & \sum_{i=1}^{m} (\iota_{V,q*})^{-1}(\deg_{p_i} f)[Y]_q \arrow[uur, mapsto] &
\end{tikzcd}
$$

//

補題11.6. $\deg_p(g \circ f) = (\deg_{f(p)} g)(\deg_p f)$

写像度の計算

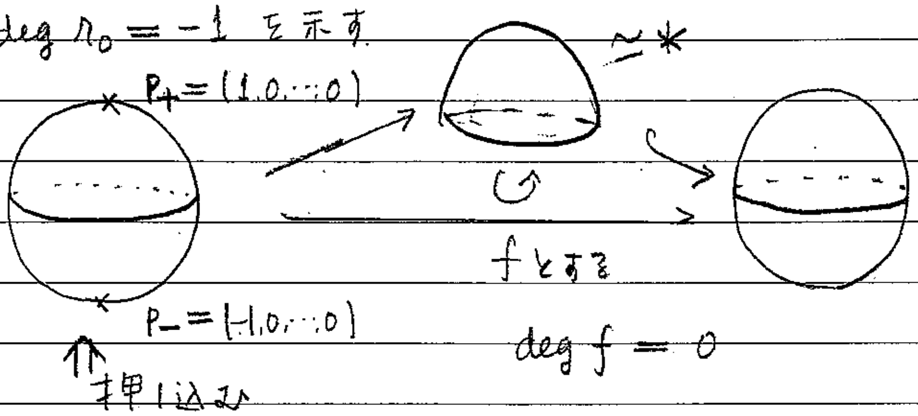
$0 \leq i \leq n$

$r_i : (x_0, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in S^n \longmapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in S^n$

鏡映

補題 11.7 $\deg(r_i) = -1$

(証) $\deg r_0 = -1$ を示す



$\deg f = 0$

f は $P_\pm$ で loc. homeo. $\begin{cases} f = id \text{ near } P_+ \\ f = r_0 \text{ near } P_- \end{cases}$

$0 = \deg f = \deg_{P_+} f + \deg_{P_-} f = 1 + \deg_{P_-} r_0$

ゆえに $\deg r_0 \underset{(r_0 : \text{homeo})}{=} \deg_{P_-} r_0 = -1$ //

系 11.8 $\deg(-1 : S^n \to S^n) = (-1)^{n+1}$

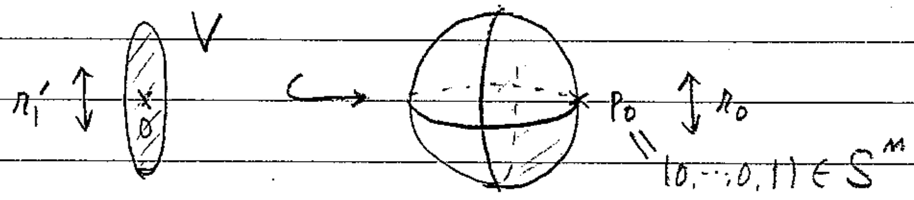
(証) $-1 = r_0 \underbrace{r_1 \cdots r_n}_{n+1 \text{個}}$ //

$\mu_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ 生成元 以下 fix する

$r_1' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ (y_1, y_2, \cdots, y_n) \longmapsto (-y_1, y_2, \cdots, y_n)$

命題 11.9 $r'_{1*} \mu_0 = -\mu_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$

(証) $V := \{ y \in \mathbb{R}^n ; \|y\| < 1 \}$ $\|\cdot\|$: Euclid norm

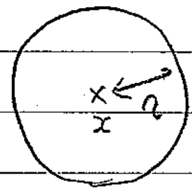


$$\mu_0 \in H_n(V, V-\{0\}) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, S^n-\{p_0\}) \xleftarrow{\cong} H_n(S^n)$$

$$r'_{1*} = -1 \Longleftarrow r_{0*} = -1$$

//

$\mathbb{R}^n$ の homology と微分同相



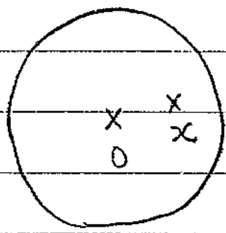
記号 $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

$B_n(x, r) := \{ y \in \mathbb{R}^n ; \|y - x\| \leqq r \}$ $\|\cdot\|$: Euclid norm

以下 生成元 $\mu_0 \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ を固定する.

$\Longrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ について生成元 $\mu_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$ が定まる

$R \gg \|x\|$ について



$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-\{0\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_n(0,R)) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \\ \Psi & & & & \Psi \\ \mu_0 & & \longmapsto & & \mu_x \end{array}$$

$U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $x \in U$

$$H_n(U, U - \{x\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\})$$

Ψ

μ_x とみなす

補題 11.10. $U_1, U_2 \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $f : U_1 \to U_2$ C^∞ diffeo

$x \in U_1$

$$f_* \mu_x = \frac{\det (Jf)_x}{|\det (Jf)_x|} \mu_{f(x)} \in H_n(U_2, U_2 - \{f(x)\})$$

(証) 3つの場合に示せばよい.

(1) $f =$ 平行移動 $x \mapsto x + c$, $c \in \mathbb{R}^m$

(2) $x = 0$, $f(0) = 0$, $(Jf)_0 = 1_m$ (単位行列)

(3) $x = 0$, $f = A \in GL_m(\mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\}$ homotopy で $1_{\mathbb{R}^m}$ にできる $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto x + tc \\ tf(x) + (1-t)x \end{array}\right\} \Rightarrow f_* \mu_x = \mu_{f(x)}$

(3) $GL_m(\mathbb{R})$ の生成元のそれぞれについて計算する

互換 $\begin{array}{c|cc} & i & j \\ \hline i) & 0 & 1 \\ j) & 1 & 0 \end{array} \underset{共役}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{homotopic}}{\simeq} r_1$

$Q(a) := \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \simeq Q\left(\frac{a}{|a|}\right) = \left\{\begin{array}{l} 1_m \\ r_1 \end{array}\right.$ または

$R(b) := \begin{pmatrix} 1 & b & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \simeq 1_m$ //

複素解析写像との関係

補題 11.12 $U_1, U_2 \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{C}^\nu$, $f : U_1 \to U_2$ cpx anal. diffeo

$\forall x \in U_1$ $f_* \mu_x = \mu_{f(x)} \in H_{2\nu}(U_2, U_2 - \{f(x)\})$

(証) $\det(Jf^{\mathbb{R}}) = |\det J^{\mathbb{C}} f|^2 \geqq 0$ //

C^∞ mfd にもどる

X : n-dim C^∞ mfd

(U, φ, V) : chart of X

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $U \overset{\text{open}}{\subset} X$, $V \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $\varphi : U \overset{\cong}{\to} V$ C^∞ diffeo

$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ atlas

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 0) $\forall \alpha \in A$ $(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)$: chart

1) $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

No. Date

X : oriented
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次をみたす atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が与えられている
$\forall\alpha\,\forall\beta\in A,\ \forall p\in U_\alpha\cap U_\beta \quad \det(J\,\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)} > 0$

このとき
(U, φ, V) : 正の chart
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (U, φ, V) : chart
$\forall\alpha\in A \quad \forall p\in U\cap U_\alpha \quad \det(J\,\varphi_\alpha\varphi^{-1})_{\varphi(p)} > 0$

$p\in X$

$\mu_p := \varphi_*^{-1}\mu_{\varphi(p)} \in H_n(X, X-\{p\})$ 生成元

ただし (U, φ, V) : 正の chart （$\Leftarrow$ とり方によらない Lem 11.10）

定理 11.13 X : oriented n-dim closed connected C^∞ mfd
$\Longrightarrow$ $H_n(X)\cong\mathbb{Z}$
$\exists!\,\mu_X\in H_n(X)$ 生成元 $\forall p\in X \quad j_{p*}\mu_X = \mu_p$
とくに X は (11.0) をみたす
（§13 で示す）

X, Y : n-dim oriented C^∞ mfds.
$f: X\to Y \quad C^\infty$ map
$p\in X$ regular point of $f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (df)_p : T_pX \xrightarrow{\cong} T_{f(p)}Y$ $\Rightarrow$ f は p において loc. homeo

$$\mathrm{sign}\,(df)_p \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & (df)_p \text{ は向きを保つ} \\ -1 & \quad\text{〃}\quad \text{逆にする.} \end{cases}$$

補題 11.14. $\deg_p(f) = \mathrm{sign}\,(df)_p$ （$\Leftarrow$ Lem 11.10）

定理 11.15 X, Y : n-dim oriented conn. closed C^∞ mfds
$f: X\to Y \quad C^\infty$ map $\quad q\in Y$ regular value

$$\deg f = \sum_{p\in f^{-1}(q)} \mathrm{sign}\,(df)_p$$

定理 11.16 $\nu \geq 1$

X, Y : ν-dim. closed conn. complex analytic mfds

$f : X \to Y$ holomorphic map

$q \in Y$ regular value

$\Longrightarrow \deg(f) = \# f^{-1}(q)$

例 $m \in \mathbb{Z}$

$g : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$, $z \mapsto z^m$

$0, \infty$ 以外は正則値

$\deg g = |m|$