§10 空間対の homology 群

(X, A): 空間対 pair of spaces ($\Leftrightarrow$ X: top sp, $A \subset X$ subsp)

① ・$H_n(X,A)$, $n \geq 0$, 対の homology 群
 ・$f: (X,A) \to (Y,B)$ 連続写像
 $\Rightarrow$ $f_*: H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ 誘導準同型 } 共変関手
 ・$\partial_*: H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ 連結準同型 自然性をもつ

② $D^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum x_i^2 \leq 1\}$ について

$$H_q(D^n, D^n - \{0\}) = H_q(D^n, \partial D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

③ 切除定理
(土屋昭博先生曰「Aを袋に入れる」after 松尾厚氏)

②+③

④ M: n-mfd $p \in M$

$$H_q(M, M - \{p\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = n \\ 0 & \text{if } q \neq n \end{cases}$$

⑤ $H_n(\Delta^n, \Delta^n - \{p\}) = H_n(D^n, D^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$

Ψ $p \in \mathrm{Int}\,\Delta^n$

$[1_{\Delta^n}: \Delta^n \to \Delta^n]$ これが生成元

(X, A): 空間対
$i: A \hookrightarrow X$ 包含写像
$i_*: S_*(A) \to S_*(X)$ 包含準同型
単射 ($\Leftarrow$ $A^{\Delta^n} \to X^{\Delta^n}$: 単射, Lem 2.2)

$n \geq 0$

$$S_n(X,A) \overset{\text{def}}{=} S_n(X) / i_* S_n(A)$$

$$\partial_n : S_n(X,A) \to S_{n-1}(X,A)$$
$$u + i_* S_n(A) \mapsto \partial_n u + i_* S_{n-1}(A)$$
(well-defined $\partial_n i_* S_n(A) = i_* \partial_n S_n(A) \subset i_* S_{n-1}(A)$)

$\partial_{n-1}\partial_n = 0$

$S_*(X,A) := \{S_n(X,A), \partial_n\}_{n\geq 0}$ chain complex

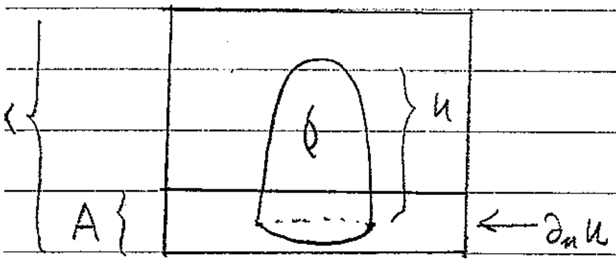
$H_n(X,A) \overset{\mathrm{def}}{=} H_n(S_*(X,A))$

対 (X,A) の(整係数特異)第 n homology 群

$$0 \to S_*(A) \xrightarrow{i_*} S_*(X) \xrightarrow{j_*} S_*(X,A) \to 0 \quad \text{(exact)}$$
単射　natural projection

$\Longrightarrow$ 対 (X,A) の homology 完全列

$$\cdots \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_1(X,A) \to H_0(A) \to H_0(X) \to H_0(X,A) \to 0$$
(exact)



$u \in S_n(X)$

$\partial_n(u + i_* S_n(A)) = 0$

$\partial_n u \in i_* S_{n-1}(A)$

$\partial_{n-1}\partial_n u = 0$ より

$\partial_n u$: cycle in A

$\partial_*[u] = [\partial_n u] \in H_{n-1}(A)$

$f : (X,A) \to (Y,B)$ 空間対の連続写像

($\Longleftrightarrow$ $f : X \to Y$ 連続写像, $f(A) \subset B$)

$$f_* : S_n(X,A) \to S_n(Y,B)$$
$$u + i_* S_n(A) \mapsto f_* u + i_* S_n(B)$$
(well-defined $f_* i_* S_n(A) \subset i_* S_n(B)$ //)

$\Longrightarrow f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ 誘導準同型

共変函手 $\begin{cases} (g \circ f)_* = g_* \circ f_* \\ (1_{(X,A)})_* = 1_{H_n(X,A)} \end{cases}$

例 (−1) $H_*(X, \phi) = H_*(X)$

[(∵) $S_*(X, \phi) = S_*(X) / \overset{0}{\overline{S_*(\phi)}} = S_*(X)$ //

$X = (X, \phi)$ とみなす

$j : X = (X, \phi) \to (X, A)$ 包含写像

$j_* : H_n(X) \to H_n(X, A)$ 包含準同型

(0) (X, x_0) 点つき空間

$\begin{cases} H_n(\{x_0\}) = 0 & \text{for } n \geq 1 \\ i_* : H_0(\{x_0\}) \to H_0(X) & \text{単射} \end{cases}$

$\Downarrow$

$H_n(X, x_0) = H_n(X)$ for $n \geq 1$

$H_n(X, x_0) = \tilde{H}_n(X)$ for $n \geq 0$ 被約 homology

X : path-conn ならば $H_0(X, x_0) = \tilde{H}_0(X) = 0$

(1) $D^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$

$S^{n-1} = \{ \qquad\qquad = 1\}$

命題 10.1 $\forall n \geq 1$

$$H_q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(証) $q \geq 2$ のとき

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_q(D^n)} \to H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_{q-1}(S^{n-1}) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{q-1}(D^n)}$$

$$H_{q-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } n = q \geq 2 \\ 0 & \text{if } n \neq q \geq 2 \end{cases}$$

$q=1$ のとき

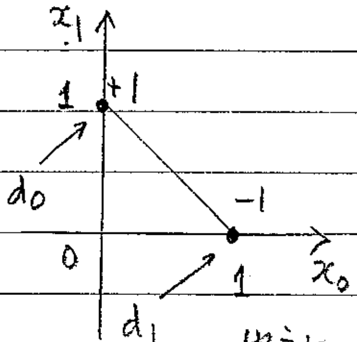
$$\begin{array}{ccccccccc} H_1(D^n) & \to & H_1(D^n,S^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{\partial_*} & H_0(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(D^n) & \to & H_0(D^n,S^{n-1}) \to 0 \\ \| & & & & & \uparrow & & & \\ 0 & & & & & n \geqq 2 \text{ のとき } \cong & & & \end{array}$$

$n \geqq 2$ のとき $H_1(D^n,S^{n-1}) = H_0(D^n,S^{n-1}) = 0.$

$n=1$ のとき $S^0=\{\pm 1\}$, $P_\pm := \pm 1 \in S^0$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to H_1(D^1,S^0) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^0) & \overset{\text{全射}}{\twoheadrightarrow} & H_0(D^1) & \to & H_0(D^1,S^0) & \to 0 & (\text{exact}) \\ & & \| & & & & \| & & \\ & & \mathbb{Z}[P_+] & P_+ \mapsto \text{生成元} & & & 0 & & \\ & & \oplus & & & & & & \\ & & \mathbb{Z}[P_-] & P_- \mapsto & & & & & \end{array}$$

$$H_1(D^1,S^0) \overset{\partial_*}{\cong} \mathbb{Z}([P_+]-[P_-]) \cong \mathbb{Z} \quad //$$



$l : \Delta^1 \to D^1 \quad (x_0,x_1) \mapsto x_1 - x_0$

$\partial_1 l = d_0 l - d_1 l = P_+ - P_- \in i_* S_0(S^0)$

$l + i_* S_1(S^0) \in Z_1(S_*(D^1,S^0))$

$\partial_*[l] = [P_+]-[P_-] \in H_0(S^0)$ 生成元

ゆえに

補題 10.2 $[l] \in H_1(D^1,S^0) \cong \mathbb{Z}$ は生成元である ―

一般論にもどる

$f : (X,A) \to (Y,B)$ 連続写像

$\Longrightarrow$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_*(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & S_*(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & S_*(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S_*(B) \arrow[r] & S_*(Y) \arrow[r] & S_*(Y,B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & H_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

∂_* の自然性

補題 10.3

$\forall n \geq 0$ $f_* : H_n(A) \to H_n(B)$, $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ } 同型

$\Rightarrow$ $\forall n \geq 0$ $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ 同型

((pf) 5-lemma //)

系 10.4 $H_q(D^n, D^n - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

((pf) $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n - \{0\})$ に補題10.3を適用 //)

定理 10.5 (切除定理)

X : 位相空間

$U \subset A \subset X$

仮定 $\overline{U} \subset \mathring{A}$

$\Rightarrow$ $H_n(X-U, A-U) \cong H_n(X, A)$ $(\forall n \geq 0)$

(包含準同型による同型)

(証) $B := X - U$, $A \cap B = A - U$

$H_*(X-U, A-U) = H_*(B, A\cap B) = H_*\left(\dfrac{S_*(B)}{S_*(A) \cap S_*(B)}\right)$

第2同型定理 $H_*\left(\dfrac{S_*(A) + S_*(B)}{S_*(A)}\right) = H_*(X, A)$ $\left(\begin{array}{l} S_*(A\cap B) \\ = S_*(A) \cap S_*(B) \end{array}\right)$

これを示せばよい。

$S'_* := S_*(A) + S_*(B) \to S_*(X)$

これは homology の同型を誘導する

[(pf) $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \mathring{A} \cup (X - \overset{\circ}{U}) = \mathring{A} \cup (X - \overline{U}) \underset{\overline{U} \subset \mathring{A}}{\subset} \mathring{A} \cup (X - \mathring{A}) = X$

そこで Th.8.2 がつかえる。 //

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_*(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & S_*' \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & S_*'/S_*(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_*(A) \arrow[r] & S_*(X) \arrow[r] & S_*(X,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

homology の同型を誘導する

$\Longrightarrow$ 5-lemma より

$$H_*(S_*'/S_*(A)) \cong H_*(X,A)$$

// Th

<u>応用</u>

$X/A := X/\sim$

$x \sim x' \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x = x'$ または $(x \in A$ かつ $x' \in A))$

A を一点につぶした空間

$p : X \to X/A$ 自然射影 $A/A = p(A)$

<u>定理 10.6</u> A が「まともな」閉集合のとき

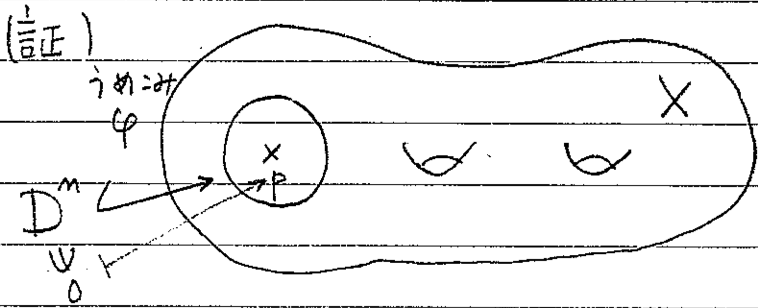
$$p_* : H_*(X,A) \xrightarrow{\cong} H_*(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_*(X/A)$$

(証明略 pp 9-10)

<u>定理 10.7</u> X : n次元位相多様体(境界なし) $p \in X$

$$\Longrightarrow H_q(X, X-\{p\}) = H_q(D^n, D^n-\{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = n \\ 0 & \text{if } q \neq n \end{cases}$$

(証)



$A = X - \{p\}$

$U = X - \varphi(D^n)$

とおいて切除定理を適用

$\overline{U} \subset A^\circ$

//

Date 05 · 1 · 12 No. 4

定理 10.9. 対の homology 群について
(1) 函手性
(2) homotopy 不変性
(3) $H_0(X, A) = \mathbb{Z}(\pi_0(X) \setminus i_* \pi_0(A))$
(4) Mayer-Vietoris 完全列
が成立つ —— (p.p. 11—)

三対 (triple) の homology 完全列

定義 (X, A, A') : triple of spaces
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X : top. space. $A' \subset A \subset X$ (triple $\not\Leftrightarrow$ triad)

$S_*(A') \subset S_*(A) \subset S_*(X)$

第三同型定理

$$S_*(X, A) = \frac{S_*(X)}{S_*(A)} \cong \frac{S_*(X)/S_*(A')}{S_*(A)/S_*(A')} = \frac{S_*(X, A')}{S_*(X, A)}$$

$$0 \to S_*(A, A') \xrightarrow{i_*} S_*(X, A') \xrightarrow{j_*} S_*(X, A) \to 0 \quad (\text{exact})$$

$$\Longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A, A') \xrightarrow{i_*} H_n(X, A') \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A, A') \to \cdots$$
(exact)

三対の homology 完全列　自然性

〜〜〜 講義の折り返し地点 〜〜〜

$n \geq 1$.

$\Delta^n = \{(x_0, x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \forall x_i \geq 0, \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$

$\partial \Delta^n = \{(x_0, x_1, \cdots x_n) \in \Delta^n ; \exists x_i = 0\}$

$(\Delta^n, \partial\Delta^n) \approx (D^n, S^{n-1})$ (Lem 5.10)

$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) = H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 ?

$1_n \overset{\text{def}}{=} 1_{\Delta^n} : \Delta^n \to \Delta^n$

$\partial 1_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^{n-1} \in S_{n-1}(\partial \Delta^n)$

ゆえに
$1_n + i_* S_n(\partial\Delta^n) \in Z_n(S_*(\Delta^n, \partial\Delta^n))$

No. Date

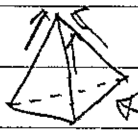
定理10.10 $[1_n] \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ は生成元である

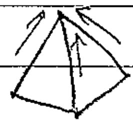
(証) $n \geqq 1$ についての帰納法. $n=1$ Lem 10.2 で既証.

$n \geqq 2$ とする.

$$\partial_+\Delta^n := \{(x_0, \cdots, x_{n-1}, x_n) \in \Delta^n;\ 0 \leqq {}^\exists i \leqq n-1,\ x_i = 0\}$$

$$d_n := d_n^{n-1} : (\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \longrightarrow (\partial\Delta^n, \partial_+\Delta^n)$$
$$(x_0, \cdots, x_{n-1}) \longmapsto (x_0, \cdots, x_{n-1}, 0)$$

$\partial_+\Delta^n =$  ← 底を抜いてある.

(⁉ )

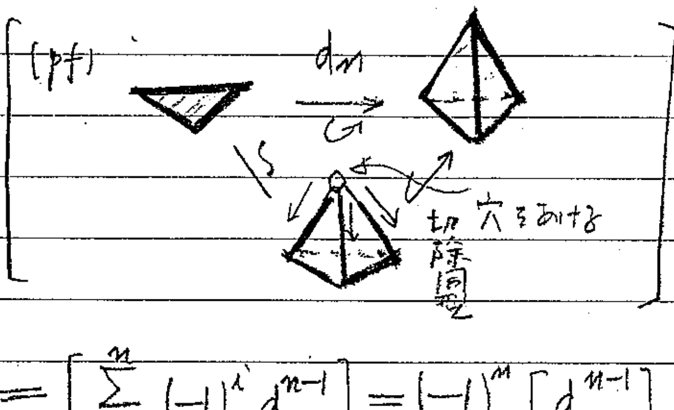
$(\Delta^n, \partial_+\Delta^n) \simeq (*, *)$

ゆえに $H_*(\Delta^n, \partial_+\Delta^n) = 0$

三対 $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \partial_+\Delta^n)$ の homology 完全列

$$\begin{tikzcd}
H_n(\Delta^n, \partial_+\Delta^n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \arrow[r, "\partial_*", "\cong"'] & H_{n-1}(\partial\Delta^n, \partial_+\Delta^n) \arrow[r] & H_{n-1}(\Delta^n, \partial_+\Delta^n) \arrow[d, equal] \\
0 & & H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \arrow[u, "d_{n*}"] & 0
\end{tikzcd}$$

これは同型である.



$$\partial_*[1_n] = \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^{n-1}\right] \underset{\Uparrow}{=} (-1)^n [d_n^{n-1}]$$

$$\left(i \leq n-1 \Rightarrow d_i^{n-1}(\Delta^{n-1}) \subset \partial_+\Delta^n \right)$$

$$= (-1)^n d_{n*}[1_{n-1}]$$

帰納法が進む. //