Date 05・1・5 No. 1

ホモトピー群の初歩

§C. ホモトピー群の定義と基本的性質
§D. 対のホモトピー群と対のホモトピー完全列
§E. ファイバー空間

$n \geqq 1$ (X, x_0)：点つき空間

$$\pi_n(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} [(D^n, S^{n-1}), (X, x_0)]$$

n次元ホモトピー群
$$\begin{cases} n=1 : \text{基本群} \\ n \geqq 2 \Rightarrow \text{可換群} \end{cases}$$

$N \geqq 1$
$$\pi_n(S^N, *) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \lneqq N \\ \mathbb{Z} & \text{if } n = N \end{cases}$$ (あらすじ)

(Sardの定理)

$n \geqq N+1$ についてはとてもむずかしい

(例外 $\pi_n(S^1) = 0$ if $n \geqq 2$ (Th.9.10)

$p : \mathbb{R} \to S^1,\ x \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ の被覆ホモトピー性質 (CHP)

$p : E \to B$: CHPをもつ連続写像 ($\Leftrightarrow$ fiber space)

$x_0 \in E,\ b_0 = p(x_0),\ F := p^{-1}(b_0)$

$$\Longrightarrow \cdots \to \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F, x_0) \to \pi_{n-1}(E, x_0) \to$$ (exact)

fiber空間のhomotopy完全列

$$p : \underset{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\underset{\cap}{S^3}} \to \underset{\mathbb{CP}^1}{\underset{\wr\shortparallel}{S^2}} \quad (z, w) \mapsto [z : w]$$ fiber space

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\pi_3(S^1)}} \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\shortparallel}{\pi_3(S^3)}} \to \pi_3(S^2) \to \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\pi_2(S^1)}}$$ (exact)

ゆえに $\boxed{\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}}$ ⇐ これが目標

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836A 7mm ruled × 31 lines

§C. ホモトピー群の定義と基本的性質

$n \geq 1$. $I = [0,1] =$ 

$I^n = \overbrace{I \times \cdots \times I}^{n} \subset \mathbb{R}^n$

$\partial I^n = \{(t_1,\cdots,t_n) \in I^n;\ {}^\exists t_i = 0 \text{ or } 1\} \subset I^n$

(X, x_0) : 点つき空間

$$\pi_n(X,x_0) \overset{def}{=} [(I^n,\partial I^n),(X,x_0)] \underset{\Uparrow}{=} [(D^n,S^{n-1}),(X,x_0)]$$

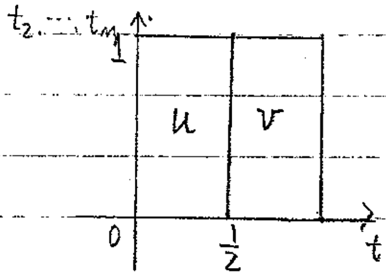
$\left(\pi_0(X,x_0) := \underset{[x_0]\text{を基点にもつ}}{\pi_0(X)}\right)$ $\left(\underline{\text{Lem 5.11}}\ (I^n,\partial I^n) \approx (D^n,S^{n-1})\right)$

$n \geq 1$ のとき $\pi_n(X,x_0)$ は群構造をもつ

$u, v : (I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,x_0)$ 連続写像

$v \cdot u : (I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,x_0)$

$$(v \cdot u)(t_1,t_2,\cdots,t_n) \overset{def}{=} \begin{cases} u(2t_1,t_2,\cdots,t_n) & \text{if } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ v(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n) & \text{if } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$



$t_1 = \frac{1}{2}$ において

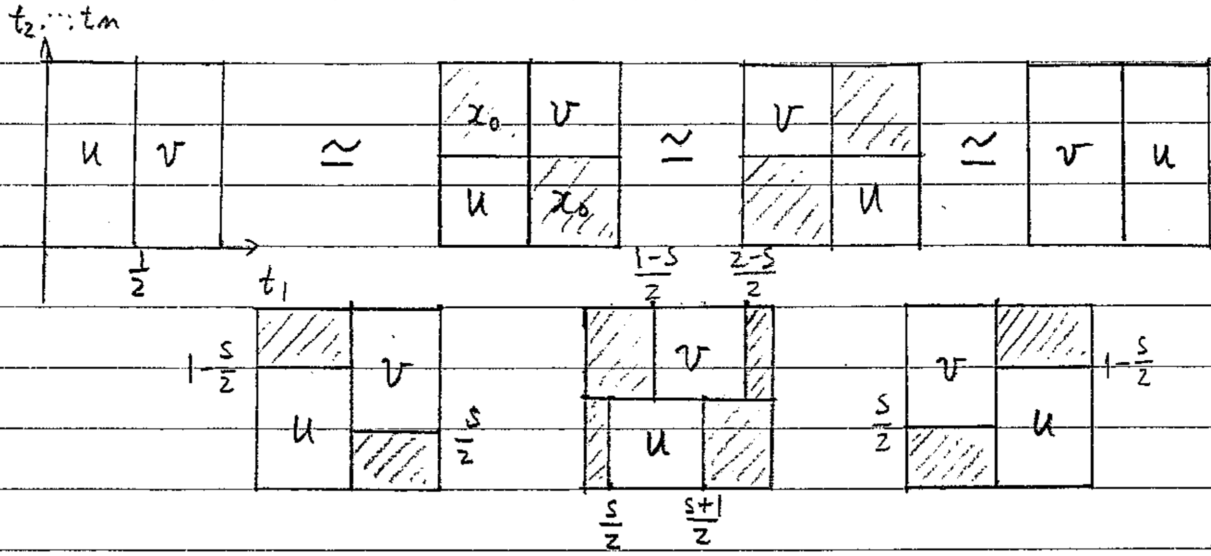
$u(1,\cdots) = x_0 = v(0,\cdots)$

$\Rightarrow$ well-defined かつ連続

$(n = 1 \Rightarrow$ 基本群の積と同じもの$)$

$\pi_n(X,x_0)$: 群 (∵ 基本群のときと同じ)

$n \geq 2 \Rightarrow \pi_n(X,x_0)$: 可換



$n \geqq 2$ のとき

π_n : (点つき空間の homotopy 圏) $\longrightarrow$ (可換群)

共変関手

<u>球面の余H構造との関係</u>

$\varpi : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, *)$ $\quad * = (0,\cdots,0,-1) \in S^n$

$t \longmapsto (2\sqrt{1-\|t\|^2}\, t,\ 1-2\|t\|^2)$

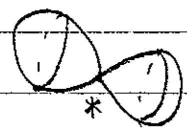
$\Rightarrow \bar{\varpi} : (D^n/S^{n-1},\ S^{n-1}/S^{n-1}) \xrightarrow{\approx} (S^n, *)$ homeo

$\Rightarrow \varpi^* : [(S^n,*),(X,x_0)] \xrightarrow{\cong} \pi_n(X,x_0)$

S^n の余積 $\longleftarrow$ 積

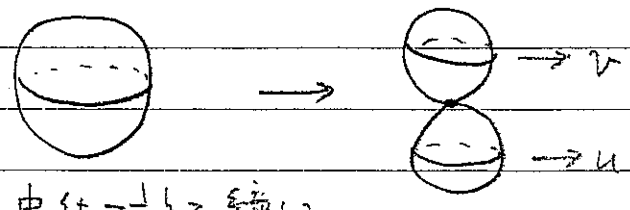
$(I^n, \partial I^n) \approx (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, *)$ これも ϖ と表す

$S^n \vee S^n := \{(x,y) \in S^n \times S^n ;\ x = *$ または $y = *\}$



$\mu : S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$

$$\varpi(t_1,t_2,\cdots,t_n) \longmapsto \begin{cases} (\varpi(2t_1,t_2,\cdots,t_n),\ *) & \text{if } t_1 \leqq \frac{1}{2} \\ (*,\ \varpi(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n)) & \text{if } t_1 \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$



真ん中 $(t_1=\frac{1}{2})$ を縮める

$$\left[\begin{array}{l} \forall u, \forall v : (S^n, *) \to (X, x_0) \text{ 連続写像} \\ (v\circ\varpi)\cdot(u\circ\varpi) = (u\vee v)\circ\mu : (S^n,*) \to (X,x_0) \end{array}\right.$$

<u>補題 C.3.</u> (S^n,μ) : coH space つまり

$$\begin{tikzcd} & (S^n,*) \arrow[dl, "1_{S^n}"'] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, "1_{S^n}"] & \\ (S^n,*) & (S^n\vee S^n,*) \arrow[l, "*\vee 1_{S^n}"] \arrow[r, "1_{S^n}\vee *"'] & (S^n,*) \end{tikzcd}$$

図式は homotopy 可換

$$\left[\begin{array}{l} \underline{\text{Th 9.8.}}\ (Z,\mu) : \text{条件(4.5)と(9.5)をみたす coH space} \\ \quad n\geq 1.\quad \alpha\in H_n(Z;\mathbb{Z}) \\ \Longrightarrow \forall u, \forall v : (Z,*) \to (X,x_0) \text{ conti. map} \\ \qquad (u\vee v)_*\mu_*\alpha = u_*\alpha + v_*\alpha \in H_n(X;\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$[S^n] \in H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 生成元 1つとって fix する

$$h : \pi_n(X,x_0) \cong [(S^n,*),(X,x_0)] \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z})$$

$$[u\circ\varpi] \longmapsto [u] \longmapsto u_*[S^n]$$

これは準同型 ($\Leftarrow$ Th 9.8)

Hurewicz準同型という

とくに

$(X,x_0) = (S^n,*)$ のとき

$$h[u\circ\varpi] = u_*[S^n] = (\deg u)[S^n]$$

ゆえに

$$\deg : \pi_n(S^n,*) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

は準同型である (実は同型である).

$n \geq 1$

<u>定義</u> X : n-connected

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\left[\begin{array}{l} 0)\ X : \text{path-connected} \\ 1)\ 1 \leq {}^\forall q \leq n \quad {}^\forall x_0 \in X \quad \pi_q(X, x_0) = 0 \end{array}\right.$

<u>定理 C.5. (Hurewicz 同型定理)</u>

$n \geq 2$, X : 1-conn space

$1 \leq {}^\forall q \leq n-1 \quad H_q(X; \mathbb{Z}) = 0$

$\Longrightarrow$ X : $(n-1)$-connected かつ ${}^\forall x_0 \in X$

$h : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} H_n(X; \mathbb{Z})$

$\boxed{\pi_N(S^N, *) \cong \mathbb{Z}}$ の証明のあらすじ

$\Uparrow$

<u>Sardの定理</u> M, N : C^∞ mfds

$f : M \to N$ C^∞ map

$\Longrightarrow$ <u>臨界値全体の集合</u> は測度 0 である

$\qquad \|$

$\{p \in N ; {}^\exists q \in f^{-1}(p), (df)_q : T_qM \to T_pN$ は全射ではない$\}$

C^∞写像による近似

<u>補題 C.6</u> $n, N \geq 1$.

${}^\forall u : (I^n, \partial I^n) \to (S^N, *)$ 連続写像

${}^\exists v : (I^n, \partial I^n) \to (S^N, *)$ C^∞写像

$\simeq$

u

[(証) 隆起函数とのたたみこみ //]

定理C.7 $1 \leq n \lneq N \Rightarrow \pi_n(S^N, *) = 0$

(証) $\forall u : (I^n, \partial I^n) \to (S^N, *)$ 連続写像

$\simeq \exists v$ C^∞ map

$$v(I^n) \underset{\Uparrow\, n \lneq N}{=} (\text{臨界値集合}) \underset{\text{測度}0}{\subset} S^N$$

とくに $\exists p \in S^N \setminus v(I^n)$

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial I^n) \arrow[rr, "v"] \arrow[dr] & & (S^N, *) \\
& (S^N \setminus \{p\}, *) \simeq (\mathbb{R}^N, 0) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ゆえに $[u] = [v] = 0 \in \pi_n(S^N, *)$ //

定理C.8 (H. Hopf)

$$\deg : \pi_N(S^N, *) \cong \mathbb{Z}$$

証明のあらすじ

準同型 $\Leftarrow$ Hurewicz準同型

全射 $\Leftarrow$ $\deg(1_{S^N}) = 1$ は $\mathbb{Z}$ を生成する

単射 I^N, S^N : C^∞多様体としての向きを入れておく

$u : (I^N, \partial I^N) \to (S^N, *)$ conti. map

$\deg[u] = 0$

とする。u : C^∞ map としてよい

$\exists p_0 \in S^N \setminus \{*\}$ uの正則値 ($\Leftarrow$ Sard の定理)

$\forall q \in u^{-1}(p_0)$ $(du)_q : T_q I^N \to T_p S^N$ 全射($\Rightarrow$ 同型)

$$\varepsilon_q \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} +1 & (du)_q \text{ が向きを保つとき} \\ -1 & \text{逆にするとき} \end{cases}$$

$u^{-1}(p_0)$: 有限集合 ($\Leftarrow I^N$: compact)

写像度の局所化 (§11) により

$$\deg u = \sum_{q \in u^{-1}(p_0)} \varepsilon_q$$

$\|$ 仮定.

0

番号づけ

$$u^{-1}(p_0) = \{q_1, q_2, \cdots, q_{2m-1}, q_{2m}\} \text{ 偶数個}$$
$$\varepsilon_{q_i} = (-1)^i \quad (1 \leq i \leq 2m)$$

逆写像定理より

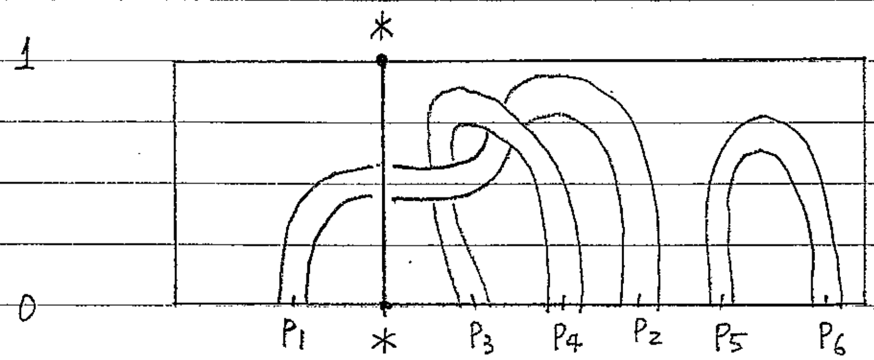
$0 < {}^{\exists} r_0 \ll 1$ s.t.

$$\Delta_0 := \{p \in S^N ; \|p - p_0\| \leq r_0\} \quad (\cong D^N)$$
$$u^{-1}(\Delta_0) = \bigcup_{i=1}^{2m} D_i \quad (\text{disjoint 和})$$
$$q_i \in \mathring{D}_i$$
$$u|D_i : D_i \xrightarrow{\cong} \Delta_0 \quad \text{diffeo}$$

管状近傍の存在定理より

$$\exists w_j : \Delta_0 \times [0,1] \longrightarrow (S^N \setminus \{*\}) \times [0,1[\quad C^\infty \text{うめこみ}$$
$$(1 \leq j \leq m)$$

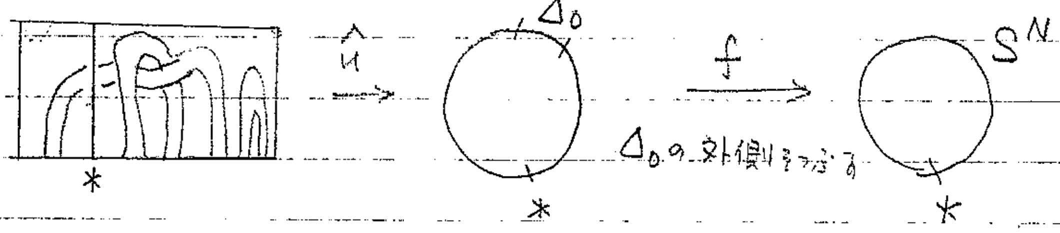
$$w_j(p, 0) = ((u|D_{2j-1})^{-1}(p), 0)$$
$$w_j(p, 1) = ((u|D_{2j})^{-1}(p), 0)$$
$$w_j(\Delta_0 \times]0,1[) \subset S^N \times]0,1[$$
$$w_j(\Delta_0 \times [0,1]) \cap w_{j'}(\Delta_0 \times [0,1]) = \emptyset \quad \text{if } j \neq j'$$



$\hat{u} : K\left(:= S^N \times \{0\} \cup \bigcup_{j=1} w_j(\Delta_0 \times [0,1])\right) \to S^N$ conti. map

$\hat{u}(\varpi(t_1, \cdots, t_N), 0) = u(t_1, \cdots, t_N) \quad (\forall (t_1, \cdots, t_N) \in I^N)$

$\hat{u}(w_j(p, s)) = p \quad (\forall (p, s) \in \Delta_0 \times [0,1])$



$f \circ \hat{u}$ は $S^N \times [0,1]$ までのびる　　$f \simeq 1_{S^N}$

$S^N \times \{1\}$ 上定数函数

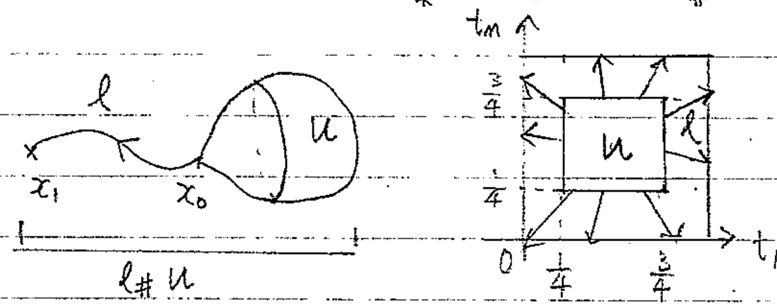
ゆえに　$[u] = [f \circ u] = 0 \in \pi_N(S^N, *)$ //

基本亜群の作用

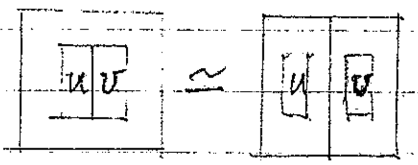
$x_0, x_1 \in X$

$\Pi X(x_0, x_1) \to \mathrm{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(X, x_1))$

$[\ell] \longmapsto ([\ell]_* : [u] \mapsto [\ell_\# u])$



$[\ell]_*$: well-defined な準同型



亜群の準同型

$\ell_\#(v \cdot u) \simeq (\ell_\# v) \cdot (\ell_\# u)$

$\left.\begin{array}{l} [c_{x_0}]_* = 1_{\pi_n(X, x_0)} \\ [\ell' \cdot \ell]_* = [\ell']_* [\ell]_* \end{array}\right\} \Rightarrow [\ell]_* : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow[\text{同型}]{\cong} \pi_n(X, x_1)$

系 C.10　X : path-conn.

$\Rightarrow \pi_n(X, x_0)$ の同型類は基点 $x_0 \in X$ のとり方によらない

$(= \pi_n(X)$ とかく$)$

帰納極限

$$X_0 \xrightarrow{\varphi_0} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \to X_n \xrightarrow{\varphi_n} X_{n+1} \to \cdots$$

集合と写像の列

$$\varinjlim_{n\to\infty} X_n \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\coprod_{n=0}^{\infty} X_n\right)\Big/\sim \quad \text{inductive limit.}$$

$$\underset{X_n}{\underset{\cap}{x_n}} \sim \underset{X_m}{\underset{\cap}{x_m}} \overset{\mathrm{def}}{\iff} \begin{cases} \exists\, l \geq \max(n,m) \\ \varphi_{l-1}\circ\cdots\circ\varphi_n(x_n) = \varphi_{l-1}\circ\cdots\circ\varphi_m(x_m) \end{cases}$$

X_n, φ_n 群と準同型 $\Rightarrow \varinjlim_{n\to\infty} X_n$: 群

位相空間と連続写像　　　位相空間

補題 C.13 $\forall X_n$: (T_1) 空間

$\forall \varphi_n : X_n \to X_{n+1}$ 中への同相

$\Rightarrow \forall K$: compact 空間

$$\left(\varinjlim_{n\to\infty} X_n\right)^K = \varinjlim_{n\to\infty} \left(X_n{}^K\right)$$

定理 C.14 Lem C.13 の仮定の下で

$$\pi_q\left(\varinjlim_{n\to\infty} X_n\right) = \varinjlim_{n\to\infty} \pi_q(X_n)$$

例 $S^\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{n\to\infty} S^n$ について

$$\pi_q(S^\infty) = 0 \quad (\forall q \geq 1)$$

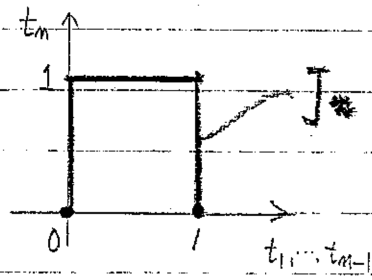
（実は $S^\infty \simeq *$ ）

§D 対のhomotopy群と対のhomotopy完全列

(X, A, a_0) 点つき空間対

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(X$: top.sp. $a_0 \in A \subset X)$ triadの一種

$\underline{n \geq 1}$



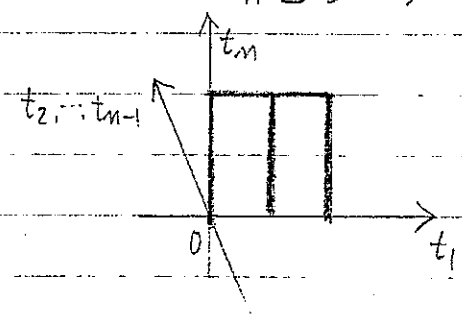
$$J_n := (\partial I^{n-1}) \times I \cup I^{n-1} \times \{1\} \subset \partial I^n$$

$$\pi_n(X, A, a_0) \overset{def}{=} [(I^n, \partial I^n, J_n), (X, A, a_0)]$$

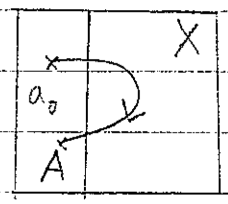
点つき空間対 (X, A, a_0) の第 n homotopy群(集合)

$n \geq 2 \Rightarrow$ 群

$n \geq 3 \Rightarrow$ 可換群



t_n 方向が積に使えない!!



$\pi_1(X, A, a_0)$
積は定義できそうにない

基本亜群 ΠA の作用

$\Rightarrow$ A : path-conn のとき

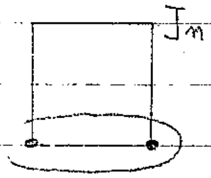
$\pi_n(X, A, a_0)$ の同型類は基点 $a_0 \in A$ のとり方によらない

$(= \pi_n(X, A)$ とかく$)$

連結準同型

$$\partial_* : \pi_n(X, A, a_0) \to \pi_{n-1}(A, a_0)$$

$$[u] \longmapsto [u|_{I^{n-1} \times \{0\}}]$$

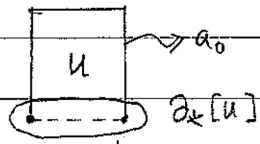


この部分をとる

homotopy 完全列

$$\to \pi_n(A,a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,a_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X,A,a_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(A,a_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X,a_0) \to$$
(exact)

$\pi_{n-1}(A,a_0)$ における完全性



$i_* \partial_* = 0$

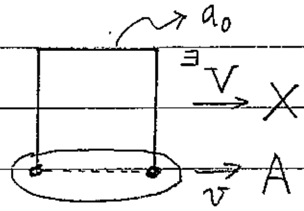
(∵ $[u] \in \pi_n(X,A,a_0)$ 自身が $i_*\partial_*[u] = 0$ の homotopy になる)

$[v] \in \operatorname{Ker} i_*$ とする

$\exists V : (I^n, \partial I^n, J_n) \to (X, A, a_0)$

v を 0 につなぐ homotopy

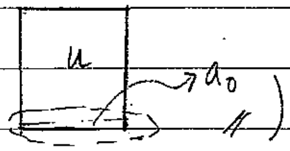
$\partial_*[V] = [v]$ //



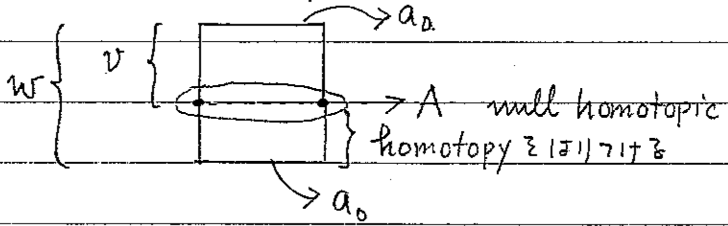
$\pi_n(X,A,a_0)$ における完全性

$\partial_* j_* = 0$

(∵ $\forall [u] \in \pi_n(X,a_0)$ $\partial_* j_*[u] = \text{const}$ //)



$[v] \in \operatorname{Ker} \partial_*$



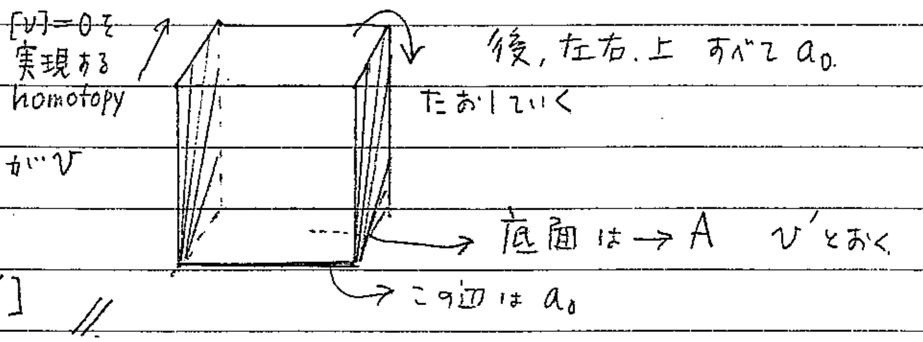
$[w] \in \pi_n(X,a_0)$

$j_*[w] = [v] \in \pi_n(X,A,a_0)$ //

$\pi_n(X,a_0)$ における完全性

$j_* i_* = 0$ (∵ 全部 A に入っているので一点につぶせる)

$[v] \in \operatorname{Ker} j_*$



ゆえに

$[v] = i_*[v']$ //

例　$\pi_3(D^2, S^1) \cong \pi_2(S^1) = 0$

$\pi_3(S^2, D^2) \cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$　)) 切除同型が成立たない

§ E ファイバー空間

$p : E \to B$ 連続写像

X : 位相空間

<u>定義</u> p は X について covering homotopy property (CHP) をもつ

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$
\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
(x,0)\in X\times I \arrow[r, "\forall \Phi"'] & B
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X\times I \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & B
\end{tikzcd}
$$

一意的とは限らない

<u>定義</u> $p : E \to B$ Serre の意味での fiber space

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall n \geq 0$ p は D^n について CHP をもつ

<u>Hopf fibration</u>

$$p : S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

$$z = (z_0, z_1, \cdots, z_n) \longmapsto [z] = [z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$$

$$\|z\| \left(:= \left(\sum |z_i|^2\right)^{1/2} \right) = 1$$

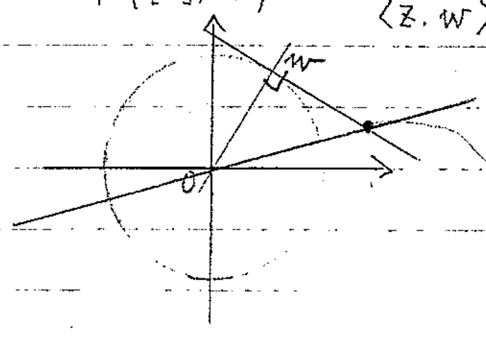
$$p^{-1}([z]) = \{\lambda z \,;\, \lambda \in S^1\} \approx S^1 \ (\subset \mathbb{C}^\times)$$

実は不要

<u>定理 E.1</u> $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ は任意の (compact) 空間 X について CHP をもつ

$z, w \in S^{2n+1}$, $0 \neq \langle z, w \rangle$ $(= \sum z \overline{w})$ (ふつうの Hermite 内積) のとき

$$T([z], w) \overset{def}{=} \frac{|\langle z, w \rangle|}{\langle z, w \rangle} z \in S^{2n+1}$$



$\dfrac{1}{\langle z, w \rangle} z \Rightarrow$ 長さを1に直したもの $= T([z], w)$

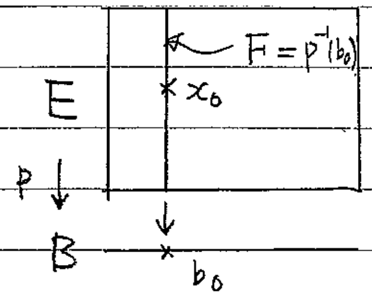
これを使って Φ をもち上げていく

ホモトピー完全列

$p: E \to B$ Serreの意味でのfiber space

$x_0 \mapsto b_0$ （$x_0 \in E$, $b_0 \in B$）

$F := p^{-1}(b_0)$



対のhomotopy完全列

$$\to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F, x_0) \to \pi_{n-1}(E, x_0) \to \cdots \quad \text{(exact)}$$

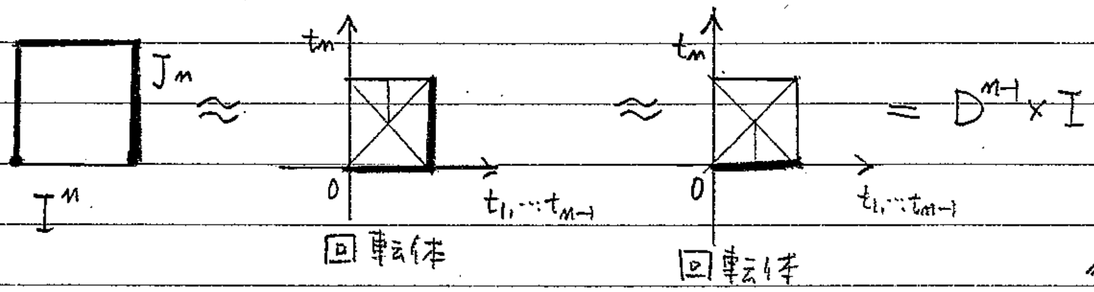
$$\pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$$

これは同型である $\Longrightarrow$ $F \to E \to B$ の homotopy 完全列（おきかえたもの）

定理 E.3 $p_*: \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0)$

補題 E.2 $(I^n, J_n) \approx (D^{n-1} \times I, D^{n-1} \times \{0\})$

(証)



//

p_*の全射性 $\forall \bar{u}: (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$ conti. map

$$\begin{array}{ccc} J_n & \xrightarrow{c_{x_0}} & E \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p \\ I^n & \xrightarrow[\bar{u}]{} & B \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} J_n & \xrightarrow{c_{x_0}} & E \\ \downarrow & \nearrow^{\exists u} & \downarrow p \\ I^n & \longrightarrow & B \end{array}$$

$u: (I^n, \partial I^n, J_n) \to (E, F, x_0)$

$p_*[u] = [\bar{u}]$

p_*の単射性 $u, v: (I^n, \partial I^n, J_n) \to (E, F, x_0)$

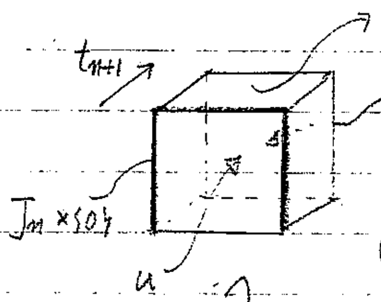
$p_*[u] = p_*[v]$ とする

$\exists \bar{\Phi}: (I^n, \partial I^n) \times I \to (B, b_0)$

$p \circ u$ と $p \circ v$ につなぐ homotopy

$$f : \underbrace{I^n \times \partial I \cup J_n \times I}_{\cong\, J_{n+1}} \longrightarrow E$$

$$f := \begin{cases} u & \text{on } I^n \times \{0\} \\ v & \text{on } I^n \times \{1\} \\ x_0 & \text{on } J_n \times I \end{cases}$$



$$\begin{tikzcd} I^n \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "p"] \\ I^{n+1} \arrow[r, "\overline{\Phi}"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \Phi"] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright"] & B \end{tikzcd}$$

この Φ により

$[u] = [v] \in \pi_n(E, F, x_0)$

// Thm

$S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ Hopf fibration

$\Rightarrow \quad q \geqq 3$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_q(S^1)} \to \pi_q(S^{2n+1}) \overset{\cong}{\to} \pi_q(\mathbb{C}P^n) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_{q-1}(S^1)}$$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_2(S^{2n+1})} \to \pi_2(\mathbb{C}P^n) \overset{\cong}{\to} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Z}}}{\pi_1(S^1)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\pi_1(S^{2n+1})}$$

$$\pi_q(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 2,\ 2n+1 \\ 0 & \text{if } q = 1,\ 3 \leqq q \leqq 2n \end{cases}$$

$$\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$$

$\underline{n=1}$ $\quad \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

$$\mathbb{C}P^\infty := \varinjlim_{n \to \infty} \mathbb{C}P^n$$

$$\pi_q(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 2 \\ 0 & \text{if } q \neq 2 \end{cases}$$

$\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$

$(S^1 = K(\mathbb{Z}, 1))$