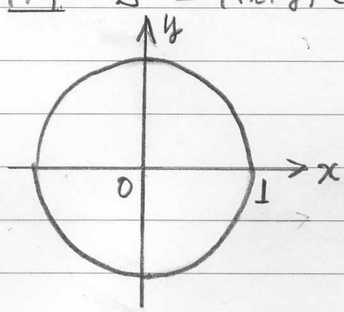
04年度
「幾何学II」
河澄響矢

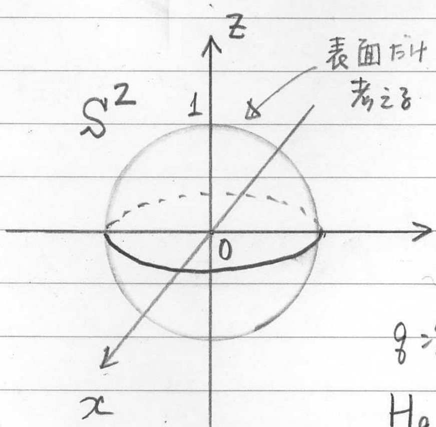
はじめに
この講義：特異homology理論および基本群の入門

ホモロジー群は、積分路の抽象化と見ることができる
X：位相空間 $\xrightarrow{\text{対応}}$ $H_0(X), H_1(X), \cdots, H_q(X), \cdots$ 可換群の列
$H_q(X)$：X の q 次元homology群
とくに $H_0(X) =$ X の弧状連結成分を基底とする自由加群
X：弧状連結のとき、$H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$
基本群 $\pi_1(X)$ のAbel化

例 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$



$H_0(S^1) = \mathbb{Z}$
$H_1(S^1) = \mathbb{Z}$
$H_q(S^1) = 0$ if $q \geq 2$



$H_0(S^2) = 0$
$H_1(S^2) = 0$, $\pi_1(S^2) = 1$
$H_2(S^2) = \mathbb{Z}$
$H_q(S^2) = 0$ if $q \geq 3$

q 次元homology群
$H_q(X) = H_q(X ; \mathbb{Z})$
X の"q 次元的な穴"のあまたを
定量的に記述するもの

§1 弧状連結成分

X : 位相空間

$$\boxed{\begin{array}{c}\pi_0(X) := \{X \text{ の弧状連結成分}\} \\ \text{0次元 homotopy 集合}\end{array}}$$

$\swarrow$ 高次元化 $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ 高次元化

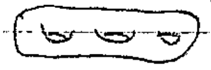
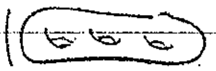
特異 homology 群 $\qquad\qquad$ homotopy 群

$H_q(X;\mathbb{Z})$ $(q \geq 0)$ $\qquad\qquad$ $\pi_q(X, x_0)$ $\begin{pmatrix} x_0 \in X \\ q \geq 1 \end{pmatrix}$

位相空間を区別する道具

個性にちがい

$H_3(S^2) = 0$ $\qquad\qquad$ $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

$H_2($  $) = \mathbb{Z}$ $\qquad\qquad$ $\pi_q($  $) = 0$ if $q \geq 2$

g 表面のみ $\qquad\qquad$ $g \geq 1$

今日の話

- 弧状連結性 $\overset{\text{応用}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^2$
- $\pi_0(X)$ の性質
- Lebesgue 数

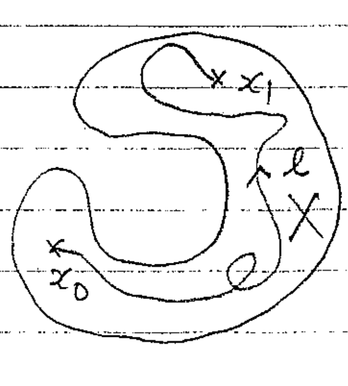
$[0,1] := \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ unit interval

l : X 内の path $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $l : [0,1] \to X$ conti map

$x_0, x_1 \in X$ について

l : x_0 と x_1 につなぐ X 内の path

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} l : [0,1] \to X \text{ conti map} \\ l(0) = x_0, \quad l(1) = x_1 \end{cases}$



定義 X：弧状連結 path-connected 0-connected

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 0) $X \neq \phi$

1) $\forall x_0, \forall x_1 \in X \ \exists \ell : [0,1] \to X$ conti. map

s.t. $\ell(0) = x_0$, $\ell(1) = x_1$

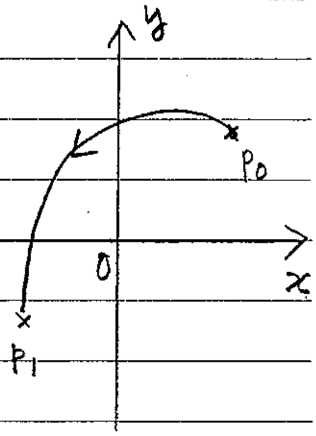
例1.1 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$: path conn

(pf) $\forall p_0, \forall p_1 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$

極座標

$p_\alpha = (r_\alpha \cos\theta_\alpha, r_\alpha \sin\theta_\alpha)$ $\alpha = 0, 1$

$0 \neq r_\alpha$, $0 \leqq \theta_\alpha < 2\pi$



$$\ell : [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$$
$$t \longmapsto \ell(t) := (r_t \cos\theta_t, r_t \sin\theta_t)$$

但. $r_t = (1-t) r_0 + t r_1 \neq 0$

$\theta_t = (1-t)\theta_0 + t\theta_1 \in [0, 2\pi[$

ℓ は $p_0 = \ell(0)$ を $p_1 = \ell(1)$ につなぐ $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 内の path //

例1.2 $\forall c \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R} - \{c\}$: path-conn ではない

(pf) 中間値の定理 //

$a < c < b$ ($\mathbb{R}$)

命題1.3. $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^2$

証明 背理法 同相 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定

$$\underbrace{\mathbb{R}^2 - \{0\}}_{\text{path-conn}} \xrightarrow[\text{同相}]{f \ \approx} \underbrace{\mathbb{R} - \{f(0)\}}_{\text{path-conn ではない}}$$

矛盾 //

弧状連結成分の定義

$\sim$: X 上の関係 , $x_0, x_1 \in X$

$x_0 \sim x_1$ ($\Longleftrightarrow$ $x_0 \underset{X}{\sim} x_1$ とも書く)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x_0 を x_1 につなぐ X 内の path が存在する

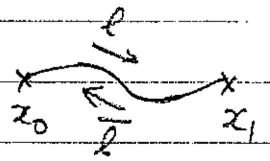
$\Longleftrightarrow$ $\exists \ell : [0,1] \to X$ conti map s.t. $\ell(0) = x_0$, $\ell(1) = x_1$

補題1.4. $\sim$ は同値関係である

(pf) 反射律 $\forall x_0 \in X$ $x_0 \sim x_0$

$[0,1] \to X$ $\forall t \mapsto x_0$ constant path

対称律 $x_0 \sim x_1 \Rightarrow x_1 \sim x_0$



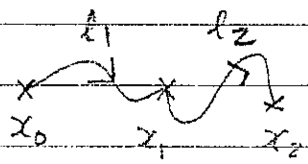
$\ell : [0,1] \to X$ x_0 を x_1 につなぐ path

逆 $\bar{\ell} : [0,1] \to X$ $\bar{\ell}(t) := \ell(1-t)$

$t \underset{\text{conti}}{\longmapsto} 1-t \underset{\text{conti}}{\longmapsto} \ell(1-t)$ $\bar{\ell}(0) = \ell(1) = x_1$

$\bar{\ell}(1) = \ell(0) = x_0$

推移律 $x_0 \sim x_1$, $x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_0 \sim x_2$



ℓ_1 : x_0 を x_1 に X 内でつなぐ path

ℓ_2 : x_1 x_2

$$\ell(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \ell_1(2t) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \ell_2(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$t = \frac{1}{2}$ において $\ell_1(1) = x_1 = \ell_2(0)$ より well-defined

$\ell : [0,1] \to X$ conti ($\Leftarrow$ はりあわせの補題 Lem 1.5)

x_0 を x_2 につなぐ path. //

補題1.5 (はりあわせの補題)

X, Y: top. spaces

$A_1, A_2 \overset{closed}{\subset} Y, \quad A_1 \cup A_2 = Y$

$f_1 : A_1 \to X, \ f_2 : A_2 \to X$ conti. maps

$\forall y \in A_1 \cap A_2 \quad f_1(y) = f_2(y)$

$\Rightarrow \ ^{\exists !} f : Y \to X$ conti. map s.t. $f|A_1 = f_1, \ f|A_2 = f_2$

(pf) $\overset{写像}{f}$ の存在、一意性 $\Rightarrow$ 明らか。連続性のみを示す。

$f : Y \to X$ conti

$\Leftrightarrow \ ^{\forall} U \overset{open}{\subset} X, \ f^{-1}(U) \overset{open}{\subset} Y$

$\Leftrightarrow \ ^{\forall} C \overset{closed}{\subset} X, \ f^{-1}(C) \overset{closed}{\subset} Y$

$\begin{pmatrix} U = X - C \\ C = X - U \end{pmatrix}$

f_i: conti $\Rightarrow f_i^{-1}(C) \overset{closed}{\subset} A_i \overset{closed}{\subset} X$

ゆえに $f_i^{-1}(C) \overset{closed}{\subset} X$

$f^{-1}(C) = f_1^{-1}(C) \cup f_2^{-1}(C) \overset{closed}{\subset} X$ //

$\pi_0(X) \overset{def}{=} X/\sim = \{X$ の弧状連結成分$\}$

the 0^{th} homotopy set

$x \in X \quad [x] = [x]_X :=$ (xのふくまれる同値類) $\subset X$

X における x の弧状連結成分

$\# \pi_0(X) = 1 \Leftrightarrow X$: path-connected.

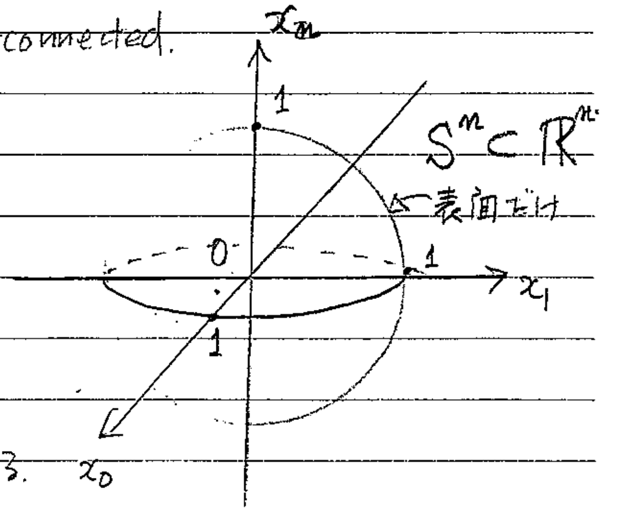
球面 $n \geqq 0$

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\| = 1\}$

但、$x = (x_0, x_1, \cdots x_n)$ について

$\|x\| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

$S^0 = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$ 2点からなる。



例 1.6 $n \geq 1 \Rightarrow S^n$: path-conn

(pf) $x, y \in S^n$ 　 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ とみなすとき

$\{x, y\}$: 一次独立 $\Longleftrightarrow$ $y \neq \pm x$

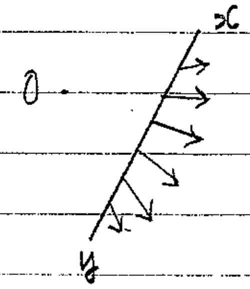
場合分け

(I) $\{x, y\}$: 一次独立のとき

$\forall t \in [0,1]$, 　$(1-t)x + ty \neq 0$

$$t \in [0,1] \longmapsto \frac{(1-t)x+ty}{\|(1-t)x+ty\|} \in S^n$$

x を y に S^n 内でつなぐ path



(II) $y = \pm x$ のとき

$y = x$ のとき const. path でつなぐ

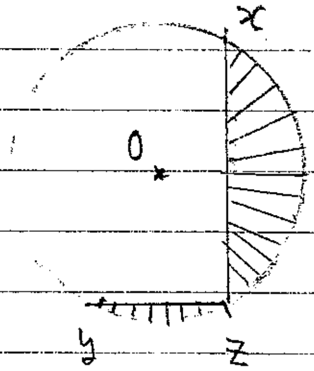
$y = -x$ のとき $n \geq 1$ より $\exists z \in S^n \setminus \{x, y\}$

x と z, z と y はそれぞれ一次独立

x を z につなぐ path ⎫
z を y ⎭ (I) より存在

2つをつなげると x を y につなぐ path がえられる

//



連続写像との関係

X, Y : top. spaces 　　 $f : X \to Y$ conti. map

$f_* = \pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ 　 $[x]_X \longmapsto [f(x)]_Y$

(well-defined) 代表元のとり方によらない

$x \underset{X}{\sim} x' \Rightarrow f(x) \underset{Y}{\sim} f(x')$

$\exists l : [0,1] \to X$ conti 　x を x' につなぐ

$\Rightarrow f \circ l : [0,1] \xrightarrow{l} X \xrightarrow{f} Y$ 　 $f(x)$ を $f(x')$ につなぐ //

補題1.7 (π_0の関手性)

(1) $1_X : X \to X$, $x \mapsto x$, identity について

$$(1_X)_* = 1_{\pi_0(X)} : \pi_0(X) \to \pi_0(X)$$

(2) $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ conti. maps

$$\Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Z)$$

(明らか)

$$\begin{tikzcd} \pi_0(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & \pi_0(Y) \arrow[d, "g_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \pi_0(Z) \end{tikzcd}$$

系1.8. $f : X \to Y$ homeomorphism

$$\Longrightarrow f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y) \ \text{全単射}$$

(pf) $\exists g : Y \to X$ fの逆, 連続

$$g \circ f = 1_X, \quad f \circ g = 1_Y$$

$$\pi_0 \Downarrow$$

$$g_* \circ f_* = 1_{\pi_0(X)}, \quad f_* \circ g_* = 1_{\pi_0(Y)}$$

f_*はg_*を逆にもち, とくに全単射 //

((注) この証明では Lem 1.7 の主張の部分しか使われていない)

Lebesgue数

Z : compact metric space

$d : Z \times Z \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ metric

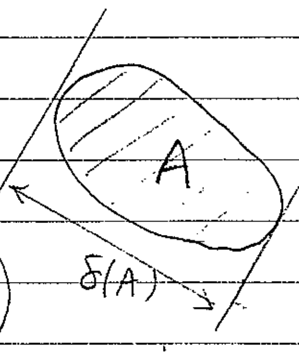
$A \subset Z$ subset

$$\delta(A) := \sup_{a, a' \in A} d(a, a') \quad \text{有限確定値}$$

$\left(\begin{matrix} \rotatebox{90}{$\leq$} \\ 0 \end{matrix}\right)$

$\left(\delta(A) \leq \delta(Z) \underset{\substack{\Uparrow \\ Z : \text{compact}}}{\neq} +\infty\right)$

Aの直径 diameter



No. Date . .

補題 1.9 (Lebesgue 数)

Z : compact metric space

$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: Z の開被覆

$\Rightarrow\ {}^\exists\rho>0\ {}^\forall A\subset Z$

$\delta(A)\leqq\rho\ \Rightarrow\ {}^\exists\lambda\in\Lambda\ \ A\subset U_\lambda$

(ρ : $\{U_\lambda\}$ の Lebesgue 数)

(pf) 背理法

仮定 ${}^\forall n\geqq 1\ {}^\exists A_n\subset Z\ \ \delta(A_n)\leqq\frac{1}{n}$ かつ ${}^\forall\lambda\in\Lambda\ \ A_n\not\subset U_\lambda$

$a_n\in A_n$ をとる.

$\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset Z$: compact

${}^\exists\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$: 収束部分列 ${}^\exists a\in Z\ \ a_{n_k}\to a$ as $k\to\infty$

${}^\exists\lambda\in\Lambda\ \ a\in U_\lambda\overset{\text{open}}{\subset}Z$

${}^\exists\varepsilon>0\ {}^\forall y\in Z\ \ d(y,a)<\varepsilon\ \Rightarrow\ y\in U_\lambda$

${}^\exists k_0\leqq{}^\forall k$ s.t. $\begin{cases} d(a_{n_k},a)<\varepsilon/2 \\ \dfrac{1}{n_k}<\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}$

このとき ${}^\forall y\in A_{n_k}$

$$d(y,a)\leqq d(y,a_{n_k})+d(a_{n_k},a)\lneqq\delta(A_{n_k})+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqq\frac{1}{n_k}+\frac{\varepsilon}{2}\lneqq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ゆえに $y\in U_\lambda$ ゆえに $A_{n_k}\subset U_\lambda$

A_n のとり方に矛盾する. //