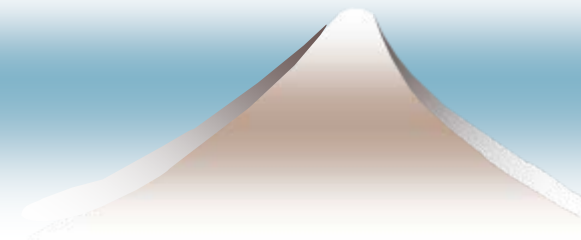


# 脳と情報の数学を創る

(1) 情報の仕組み: 驚き、確率、幾何学

理化学研究所  
脳科学総合研究センター

甘利俊一



# 数学は人類の文化である

## バビロニアの数学

アラビア、中国、ギリシャ、日本の数学

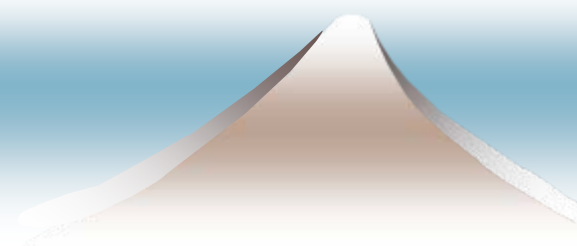
ユークリッド幾何

## 脳の仕組み

数の概念—動物、チンパンジー

地理—ねずみ、幾何

—人間:抽象思考



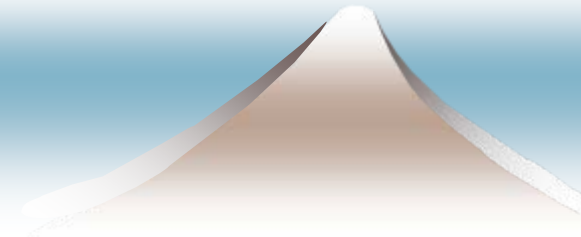
# 脳の仕組み

—考える喜び

抽象的思考

ゲーム、パズル

数学、文化



# 21世紀の科学技術

物理学 数理学

生物学

情報科学

人間科学

人間とは何か

社会とは何か

融合

数理的思考

# 物理学 一大帝国

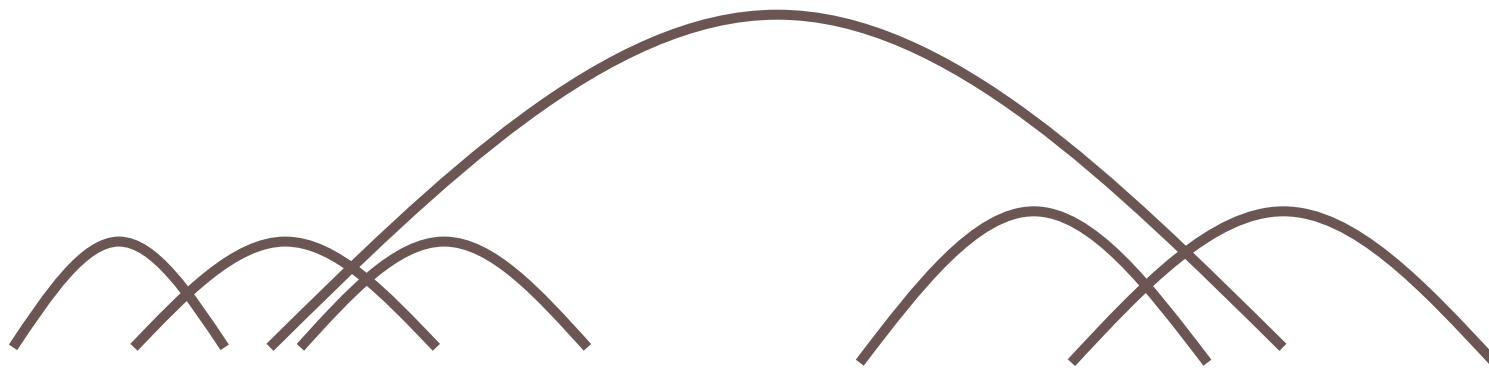
相対性理論

個体物理

ナノテクノロジー

量子力学

エレクトロニクス



経済学

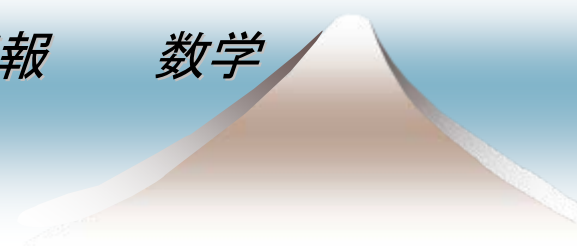
生物

化学

複雑系 ...

情報

数学



# 生物学 — 還元主義

博物学

分子生物学

遺伝子

バイオテクノロジー

種の多様性

生命の基本原則

構造と機能

脳・システムバイオロジー

# 情報科学・工学 — Gödel・Turingの呪

電話・無線

情報理論  
サイバネティクス

インターネット

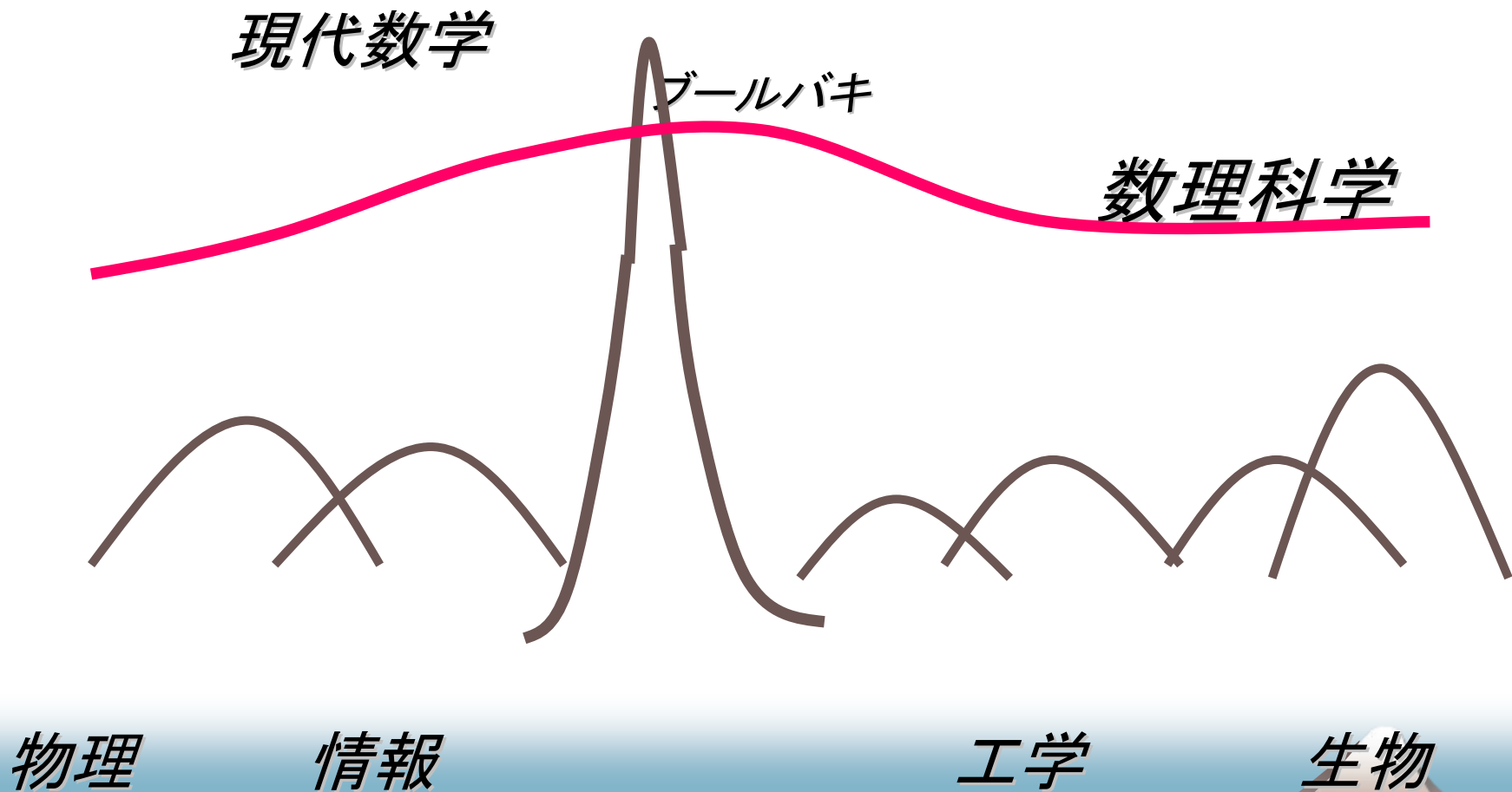
真空管

コンピュータ  
トランジスタ

情報化社会

人工知能・ロボット・脳  
バイオインフォマティクス

# 数学 —象牙の塔



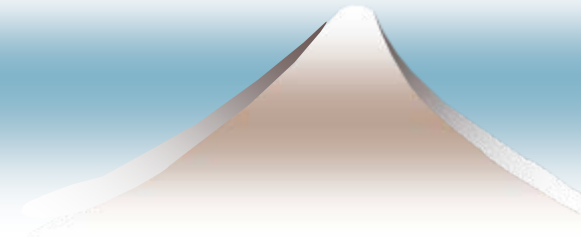


# 情報の数理：情報量

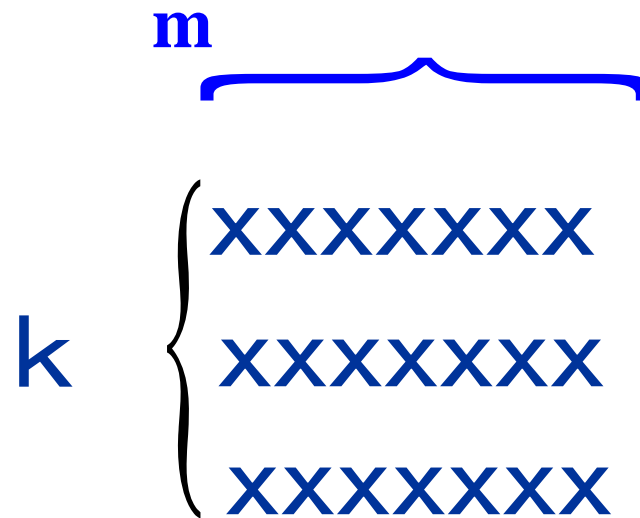
AかBか？ — 1ビット

A, B, C, . . . : k個

$f(k)$ ビット



# 情報の加法性



$$f(km) = f(k) + f(m)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

$$f(k) = \log k$$

$$y f'(xy) = f'(x)$$

$$y f'(y) = c$$

$$f'(y) = c / y$$

# 情報と確率

$$p = 1/k$$

$$f(p) = -\log p = \log k$$

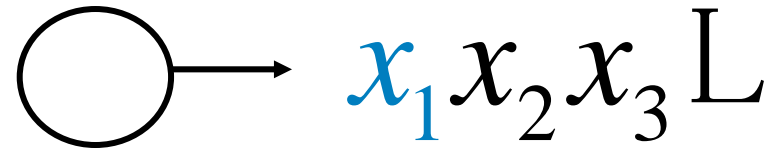
**x x x x x** x x x x x x x x **n**

**m**

$$I(p) = I\left(\frac{m}{n}\right) = \log n - \log m = -\log p$$

# 情報・確率

情報源



情報エントロピー

$$p_i = \text{Prob} \{ x = i \}$$

$$H = - \sum p_i \log p_i$$

# 情報縮約

$$p = \text{Prob}\{x = 1\}$$

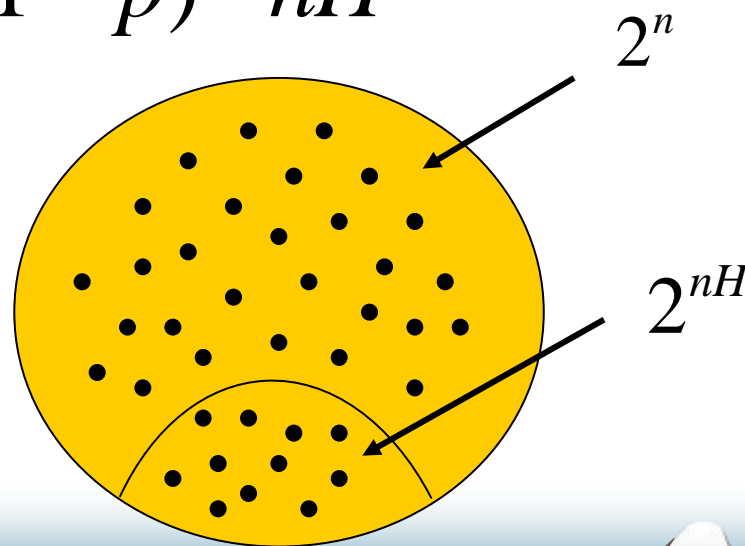
011001110101  
 $\underbrace{\hspace{10em}}_n$

## エントロピー

$$H = -p \log p - (1-p) \log(1-p) \quad nH$$

$$2^n \quad 2^{nH} \quad \text{よくでる}$$

$$\log 2^{nH} = nH \quad \text{ビット}$$



# 大数の法則

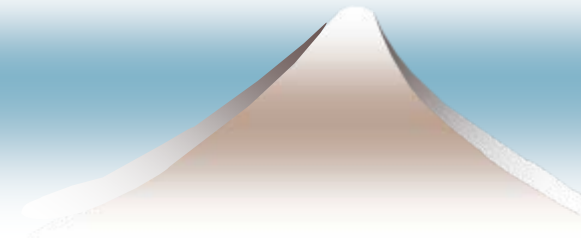
0101100110L  $\rightarrow$  #1 =  $np$ ;  $n = 10,000$ ;  $p = 0.3$

$$p = \text{Prob}\{x = 1\} \quad H = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

$$\sum x_i = np \pm A_n$$

$$A_n \rightarrow 0, c, \infty?$$

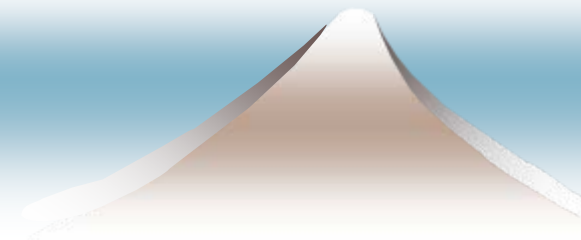
$$\sum x_i = np \pm \frac{\sqrt{n}}{2}$$



$${}_n C_{np} = \frac{(np)!(n - np)!}{n!}$$

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \approx n^n$$

$${}_n C_{np} = 2^{nH}$$



# 情報伝送

ファックス, 画像, 音声 ...

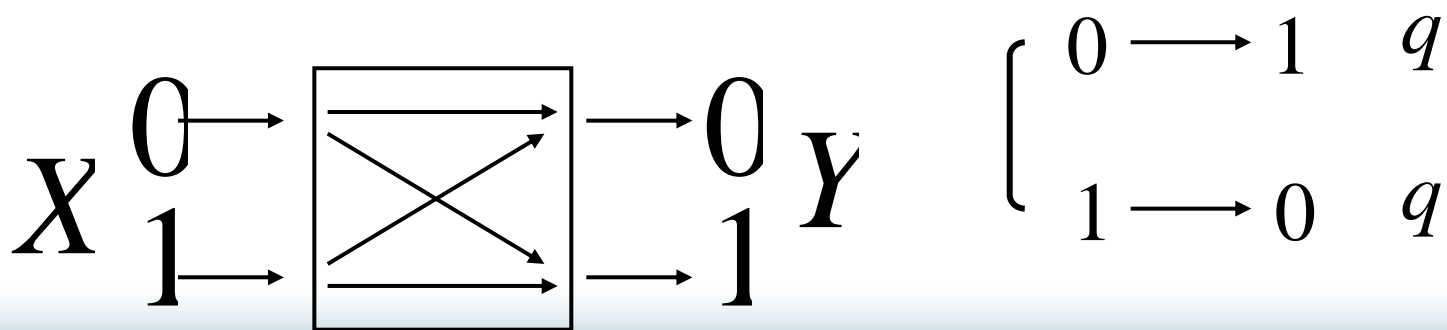




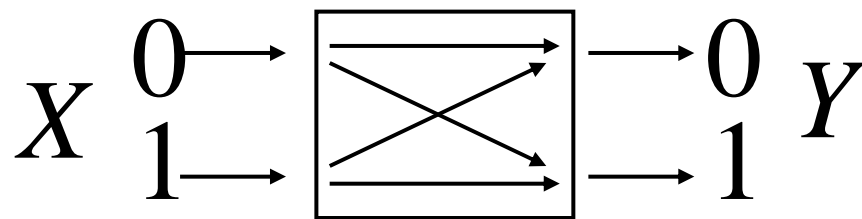
# 情報伝送：通話路



雑音：誤り



# 相互情報量



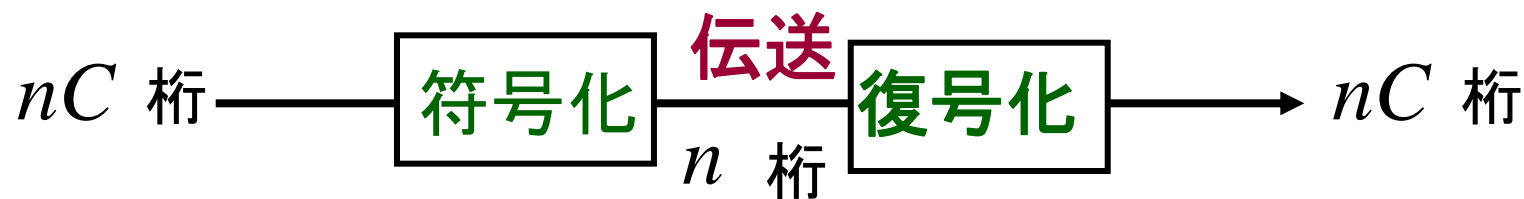
$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned}$$

情報容量:  $C = 1 - H(q)$

# Shannonの大発見： 誤りのない伝送

010L 0       $n$  桁

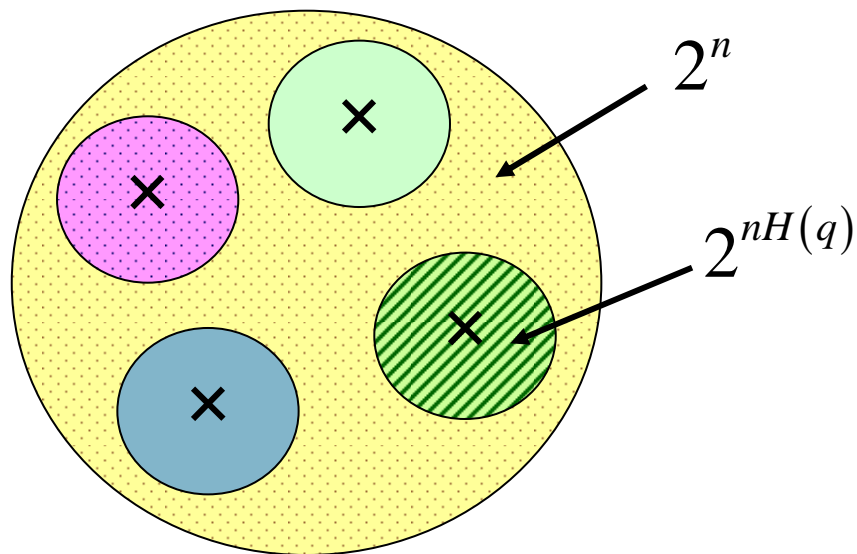
010L 0       $nC$  桁



誤り確率 '0' !

# 信号と符号

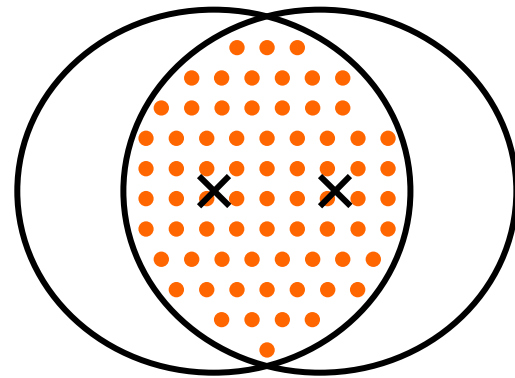
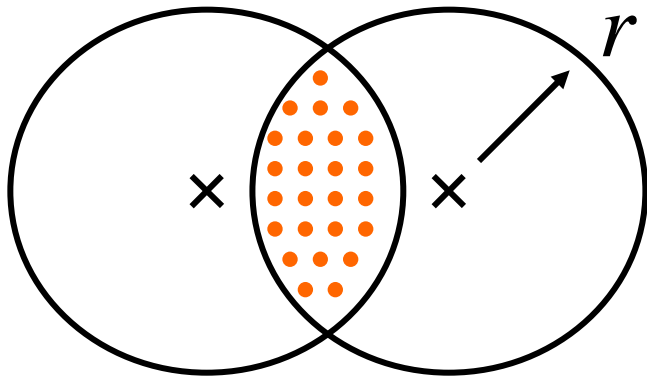
$$\frac{2^n}{2^{nH}} = 2^{n(1-H)}$$
$$= 2^{nC}$$



# N次元球と交わり

$$\frac{(r + \varepsilon)^n}{r^n} = \frac{r^n + n\varepsilon r^{n-1}}{r^n} = 1 + \frac{n\varepsilon}{r}$$

$$V = c_n r^n$$



# 誤り訂正符号: Hamming符号

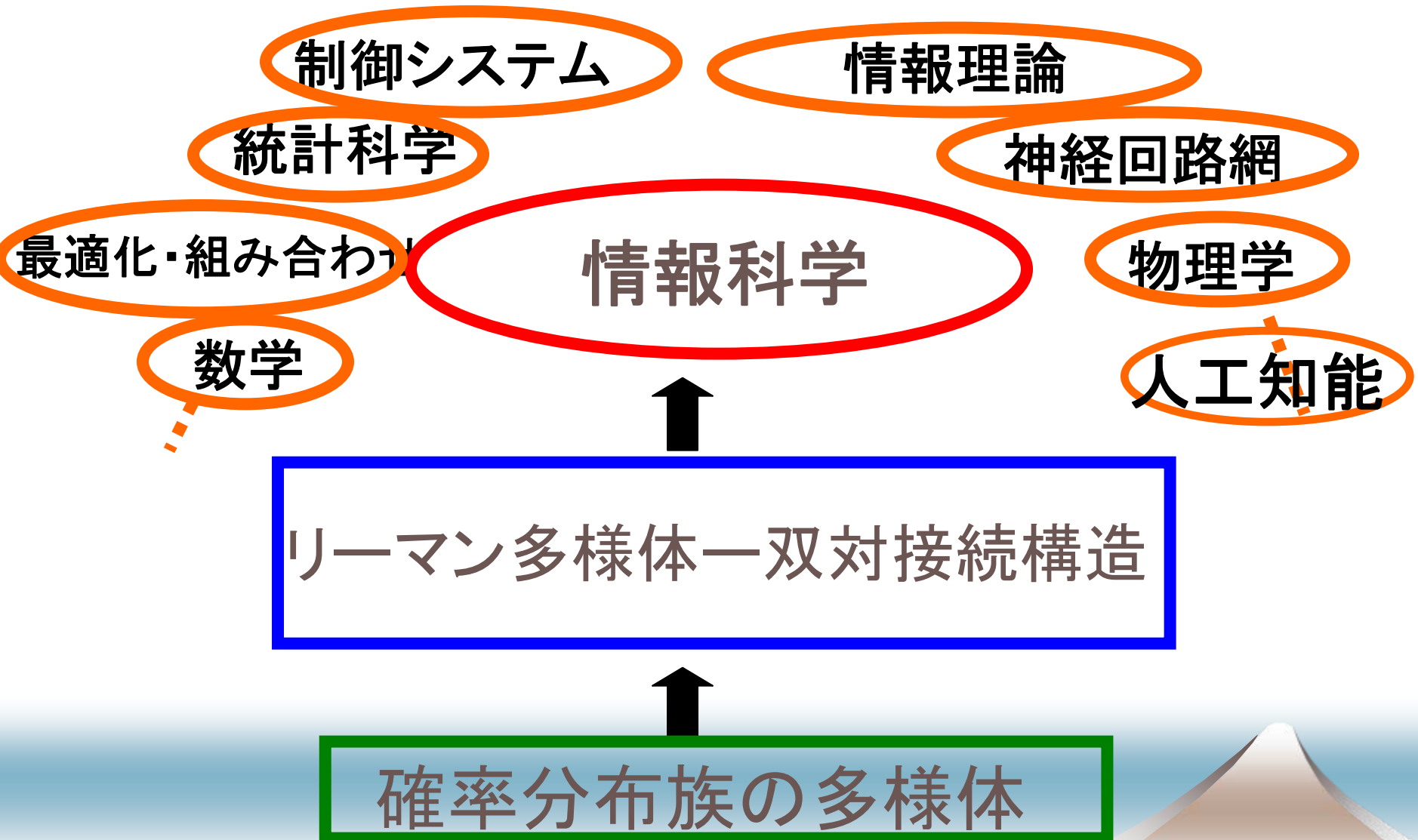
コンピュータ, CD, ...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_7 \end{bmatrix} = 0$$

$$2^4 \rightarrow 2^7$$

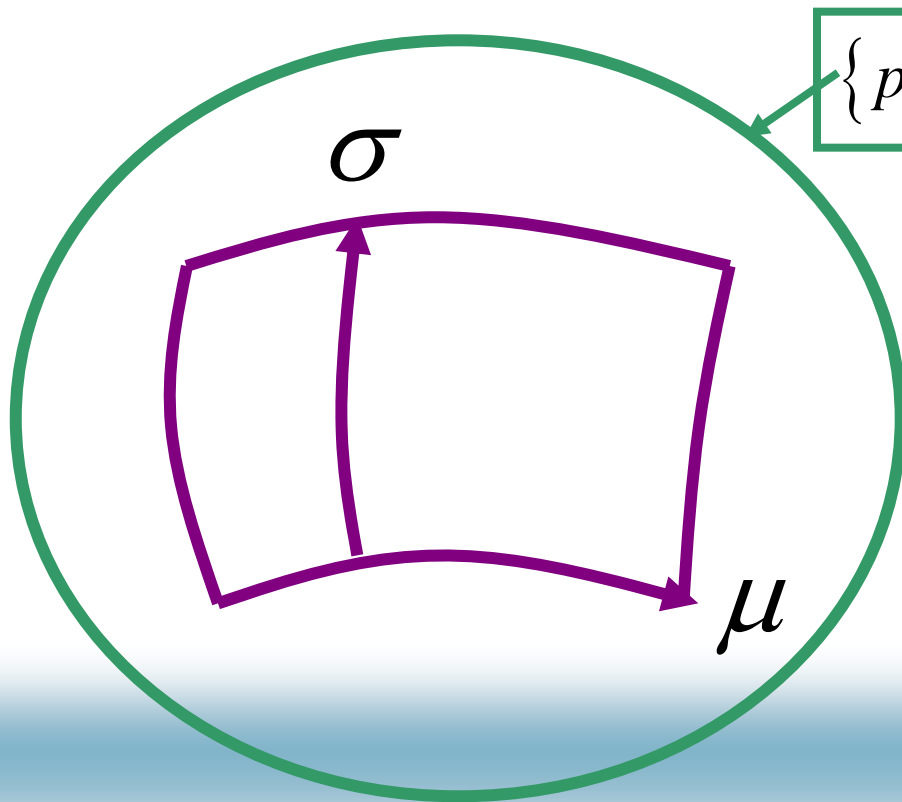
ガロア体, 代数幾何符号

# 情報幾何



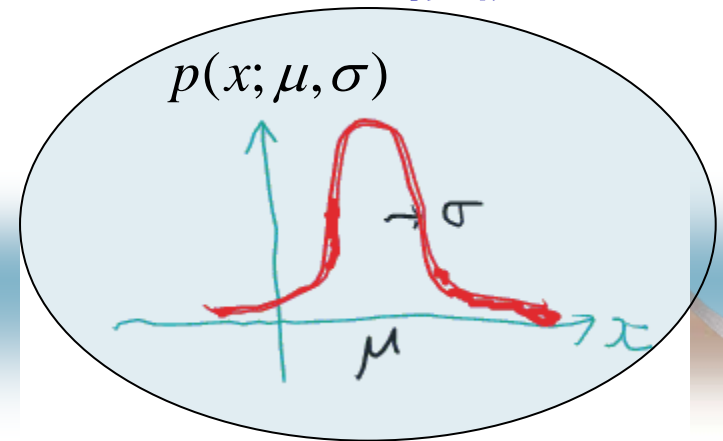
# 情報幾何とは？

$$S = \{p(x; \mu, \sigma)\} \quad p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



$$S = \{p(x; \theta)\}$$

リーマン幾何  
双対アフィン接続





# 不変性の原理: $S = \{p(x, \theta)\}$

## 1. パラメータのとり方によらない

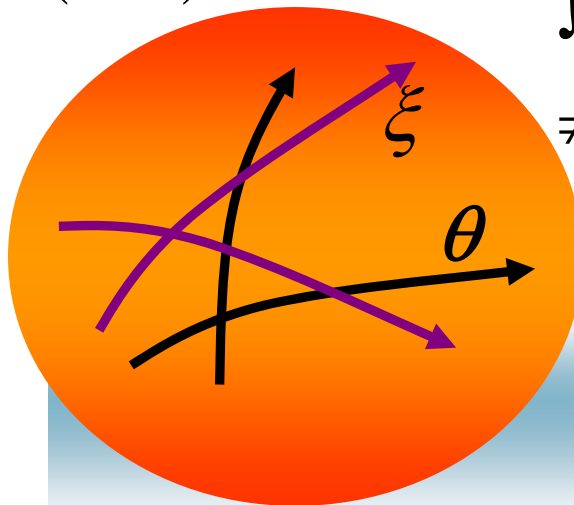
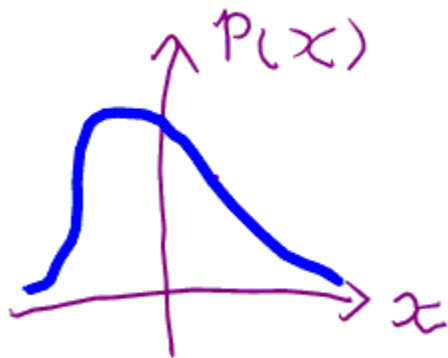
$$\xi = \xi(\theta), \quad \bar{p}(x, \xi) \quad D = \sum \theta_i^2 \neq \sum \xi_i^2$$

## 2. 確率変数の表示スケールによらない

$$y = y(x), \quad \bar{p}(y, \theta)$$

$$\int |p(x, \theta_1) - p(x, \theta_2)|^2 dx$$

$$\neq \int |\bar{p}(y, \theta_1) - \bar{p}(y, \theta_2)|^2 dy$$



# 二つの幾何学構造

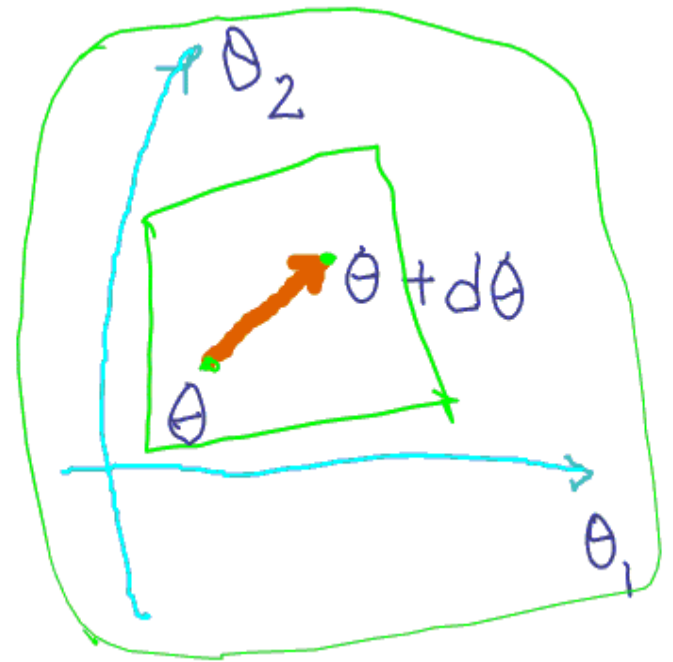
## Riemannian and affine connection

$$ds^2 = \sum g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) d\theta_i d\theta_j$$

$$ds^2 = \frac{1}{2} D \left[ p(x, \boldsymbol{\theta}) : p(x, \boldsymbol{\theta} + d\boldsymbol{\theta}) \right]$$

## Fisher information

$$g_{ij} = E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log p \right]$$



# アファイン接続

## affine connection

## 共変微分

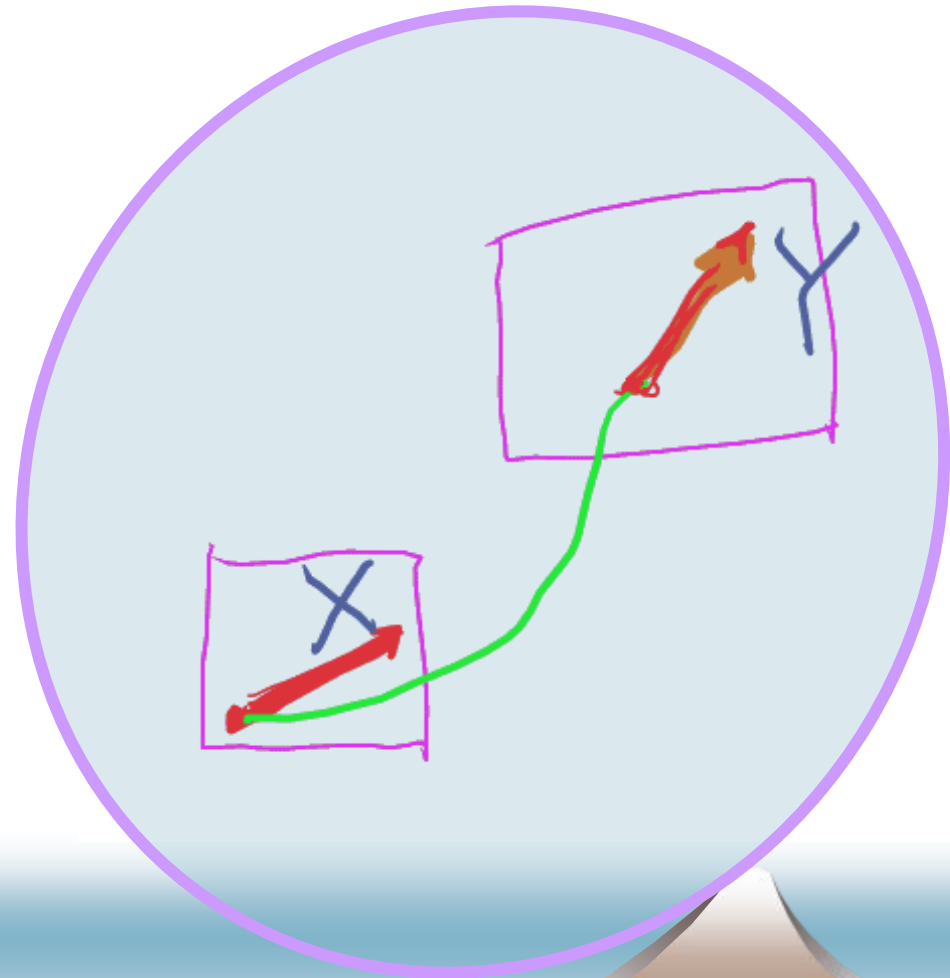
$$\Pi_c X = Y$$

$$\text{測地線 } \Pi \dot{X} = \dot{X} \quad X = X(t)$$

$$s = \int \sqrt{\sum g_{ij}(\theta) d\theta^i d\theta^j}$$

minimal distance

**straight line**



# 幾何学

ユークリッド

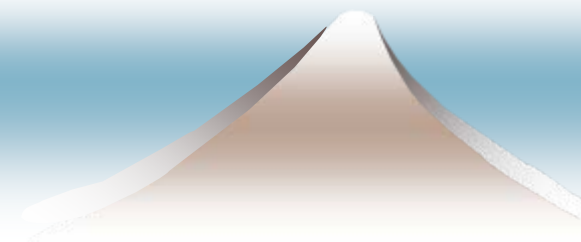
ボヤイ, ロバチェフスキー

ガウス

リーマン

アインシュタイン

ひも理論



# 二つのアファイン接続 $(\nabla, \nabla^*)$

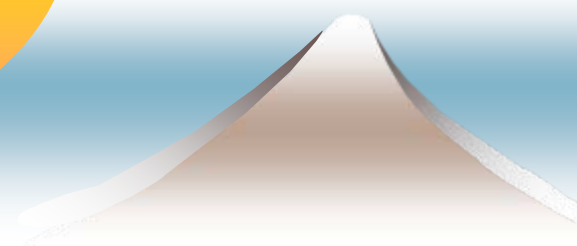
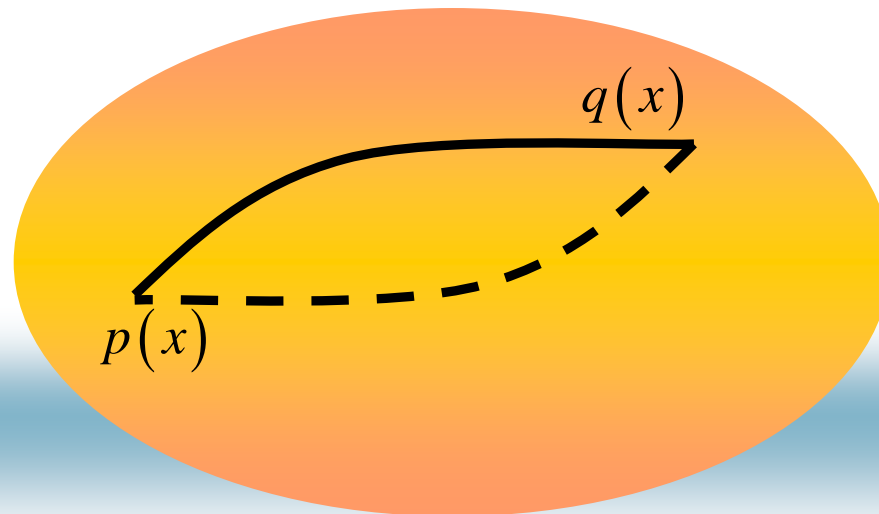
$$(\Pi, \Pi^*)$$

*e-geodesic*

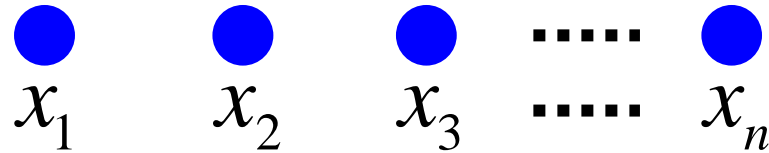
$$\log r(x, t) = t \log p(x) + (1-t) \log q(x) + c(t)$$

*m-geodesic*

$$r(x, t) = tp(x) + (1-t)q(t)$$



# 神経発火



$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i = 0, 1$$

$$\eta_i = E[x_i] \quad \text{---- 発火率}$$

$$v_{ij} = \text{Cov}[x_i, x_j] \quad \text{---- 相関}$$

高次相関とは？

直交分解はできるのか？

# 確率推論

$$p(x, y, z, r, s)$$

$$p(x, y, z | r, s)$$

$$x, y, z, \dots = 1, -1$$

