

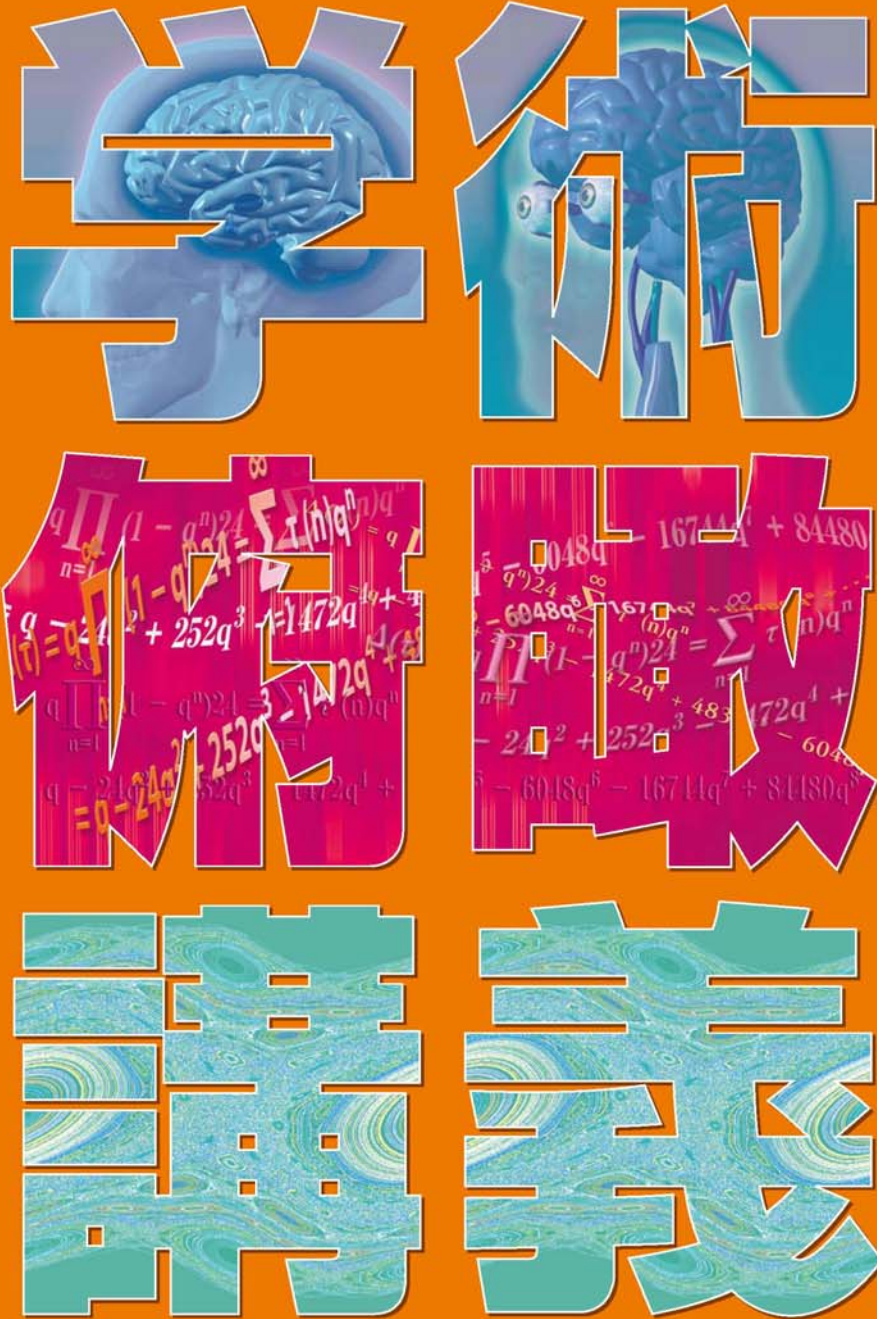
学術俯瞰講義「数学を創る」第12回

形の見分け方と数学の視点

数理科学研究科

坪井 俊

※:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。



教科書にはのっていない数学のお話

主題科目 / テーマ講義 2単位 1、2年生対象

数学を創る—数学者達の挑戦—

コーディネータ・ナビゲータ:岡本和夫(理学部)



数学はどうやって創られたか 岡本和夫(理学部)、室田一雄(工学部)

第1回 10/8 数学はどうやって創られたか



ことばを創り、世界を創る 斎藤毅(理学部)

第2回 10/15 Mathematics "On Campus"

第3回 10/22 数の体系を創る



第4回 10/29 数と図形の共進化

脳と情報の数学を創る 甘利俊一(理化学研究所)

第5回 11/5 情報の仕組み:驚き、確率、幾何学

第6回 11/12 脳の仕組み:脳内情報の表現、記憶、学習の数理



目の錯覚の数学を創る 新井仁之(理学部)

第7回 11/19 数学で探る錯視の世界

第8回 11/26 脳の中のウェーブレット

第9回 12/3 錯視が創る新たな数学—ウェーブレットからフレームレットへ—



形を理解するための数学を創る 坪井俊(理学部)

第10回 12/10 惑星の軌道を理解する

第11回 12/17 多面体の形と曲面の上の軌道の形

第12回 1/14 形の見分け方と数学の視点



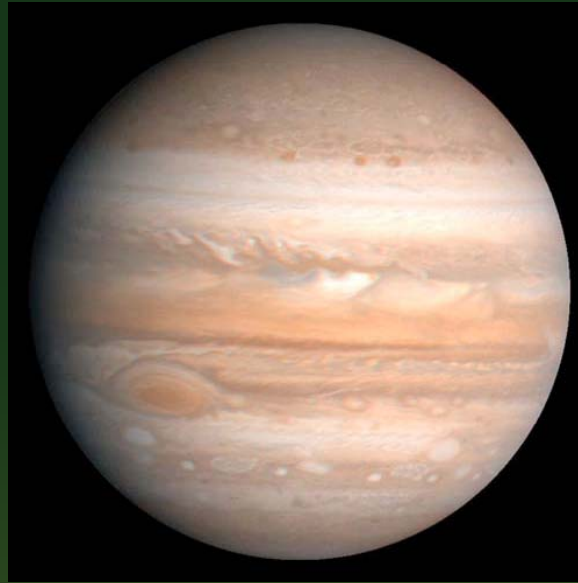
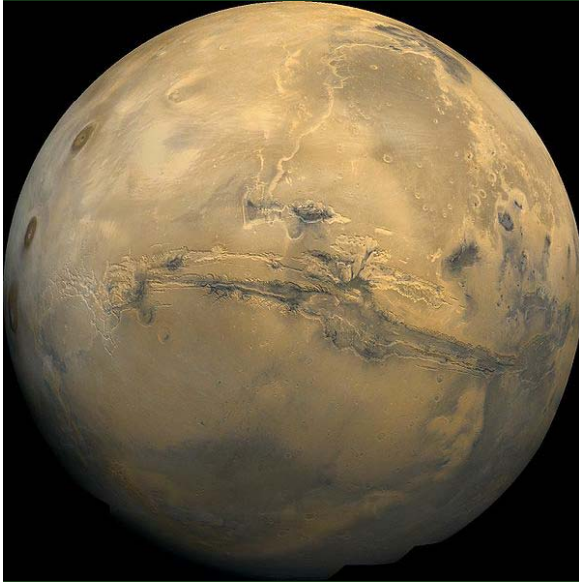
文化と数学 岡本和夫(理学部)

第13回 1/21 文化と数学



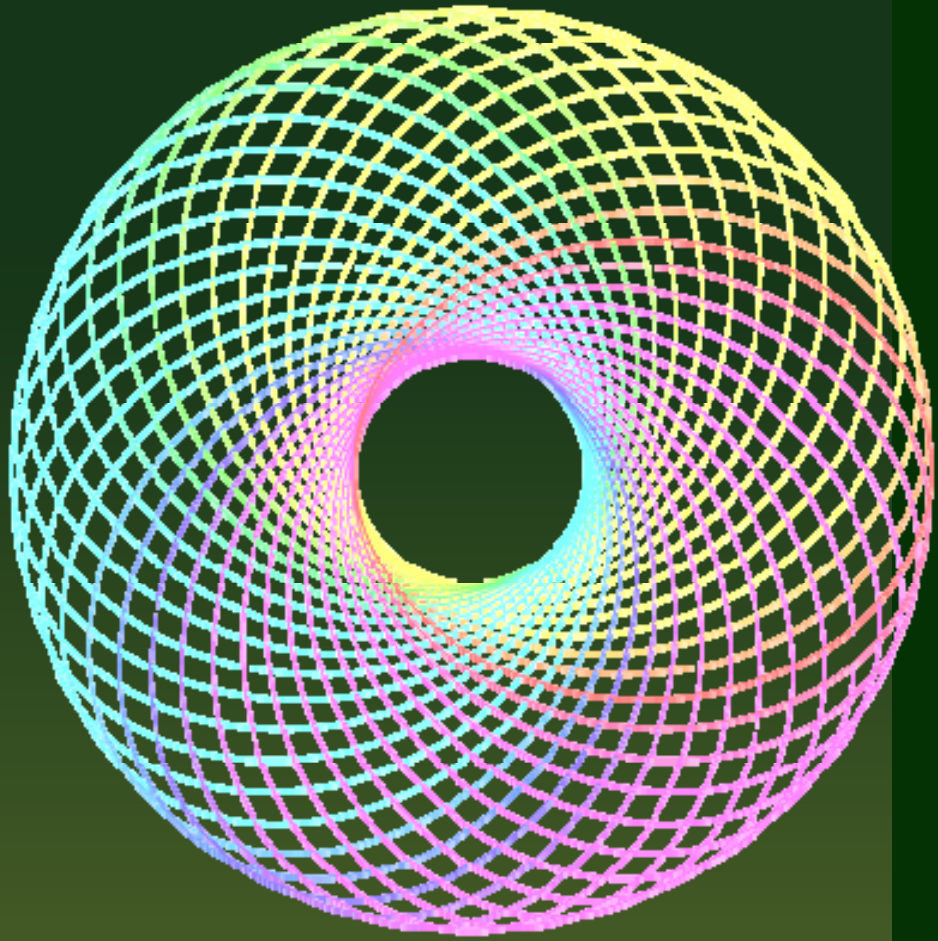
東大ナビ
utnav.jp
キャンパス内各主要施設への案内
東大ナビは、東大の魅力を最大限に引き出す
ためのナビゲーションシステムです。
東大ナビは、東大の魅力を最大限に引き出す
ためのナビゲーションシステムです。

駒場 キャンパス 18号館ホール 木曜日 5時限 (16:20-17:50)
<http://www.gfk.c.u-tokyo.ac.jp/>



惑星

写真: NASAウェブページより転載



●感想

●普段目にする単純な立体でも、オイラーの多面体定理という美しい式で表されることに感動した。

！！感動して欲しい！！

●多面体定理が惑星の軌道と関係しているとは驚いた。

●多面体の定理が曲面にも応用できることは新鮮だった。

！！それが数学の面白さです！！

●トーラスという概念がわからなかった。

！！うむむ！！

●トーラスはゲームの中にも使われている(ロールプレイングゲームの地図、ドラクエなど)

！！ゲームを作るには数学の知識が役立ちますから、知っている人も多いのです！！

●質問

●トーラスなどはユークリッド空間では本当の形を表していないと聞いたことがあるが、本当の形はどのようなものなのか。

！！回転体のドーナツの表面も、自然な形の一つです。
もう1つの自然な形は、どちらに向かっても平らで、
どちらに向かっても近くに帰ってくるというものです！！

●アルキメデスの多面体では空間を埋め尽くせず、ひし形多面体ではできるとするのは、どうやって証明できるのか。

！！埋め尽くせないほうは、辺における2つ面の角度をみます。
埋め尽くすのは実際に模型を作ればできます！！

●実際の惑星の軌道が変わらないのは、保存力がもう一つあるからと聞いたことがあるが、それは本当か。

！！嘘です。逆2乗の法則のためです！！

●質問

●凹多面体は、惑星や自然に関わりがないのか。

！！種数が2以上の曲面の最も自然な形はいたるところ凹であるというものです(3次元の空間のなかでは実現されません(ヒルベルトの定理)。このような曲面も状態の空間になります！！

●曲面の研究は、どのようなことに応用されるのか。

！！数学の中で曲面に関係しないものはほとんどありません。さらに...！！

●多面体はどのような分野で応用され得るのか。

！！我々が認識しているすべての図形は、曲面または多面体の表面です。自動車、列車、飛行機の形の設計、身近にあるプラスチック製品は、金型をつかって作られています。その形を決めるためには、極小曲面の性質や曲面状の樹脂の強度などの多くの知見が必要です。界面での化学反応の研究、高分子の反応の研究などにも応用されています！！

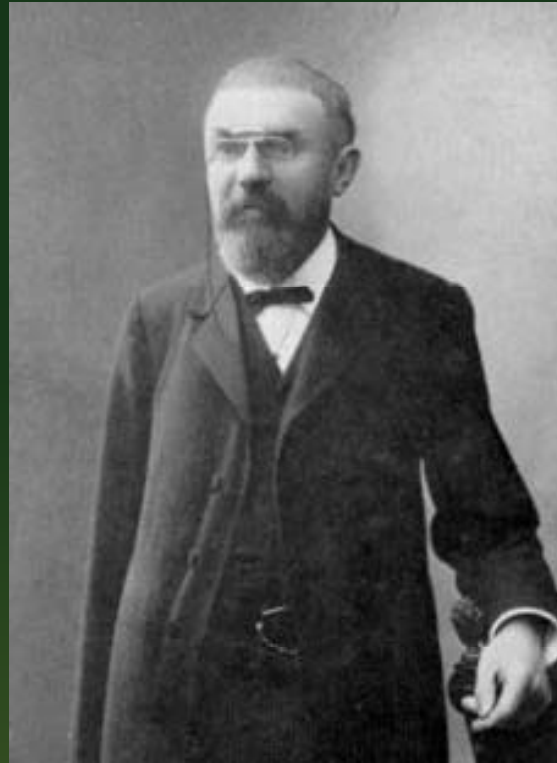
●質問

●プラトンの多面体のところで、正4, 6, 8, 12, 20面体が上げられていたが、これ以外は数学的に存在し得ないのか。

！！それは、オイラーの多面体定理を用いて証明されます！！

●メビウスの輪は、オイラー数ゼロで、トーラスと似たような性質なのだろうか。

！！その通り。メビウスの帯(輪)の表面に、境界(縁)に、つねに直交する模様、あるいは境界を軌道とする模様で、内部に停留点がないものが描けます！！



ポアンカレ(1854－1912)はどのような問題を考えたのだろうか。

- ポアンカレの時代には、2次元多様体である(あるいは1次元複素多様体である)曲面についての理解が非常に深まった。
- すなわち、リーマンの写像定理が、現在の形で認識されるに至った。
- 「リーマンの写像定理」
単連結な複素1次元多様体は、リーマン球面、複素数平面、開単位円板のどれかに複素解析的に同型である。
- 次元の高い多様体の研究は始まったばかりであった。
- 多様体の定義が落ち着くのは20世紀半ばである。

ポアンカレはこのような時代に数学の研究をしている。

- 3体問題は難問だ。
- 平面上の3体問題であっても3つの質点の座標、速度の空間は $(2+2) \times 3 = 12$ 次元である。
- その3つの点に対して、2体問題と同様に、重心を原点とする座標が取れ、状態の空間の次元は8となる。
- 角運動量の保存則とエネルギーの保存則から、状態の空間の次元は6になるが、それを理解するためには次元が大きすぎる。

- 当面は、円平面制限3体問題を研究しよう。
- 太陽と木星が重心の周りに円軌道を描いて運動しているとして、第3の惑星の運動を記述しよう。

国立天文台 提供

✦

ダイヤモンドリング (第3接触直後) 2009年 7月22日 硫黄島沖(ばしふいづくびいなす 船上)にて



撮影時刻: 2009年7月22日, 11時31分56秒 [JST]

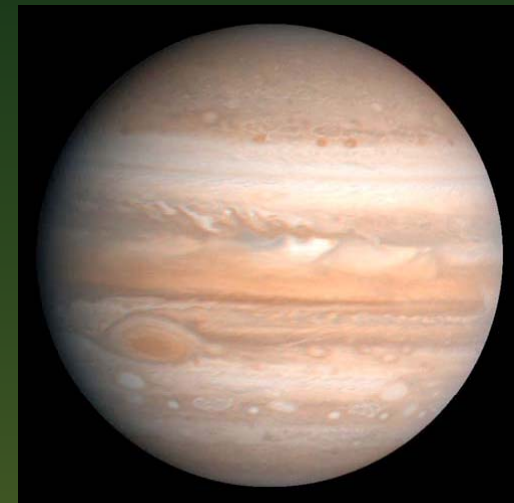
口径10.1cm屈折望遠鏡 (BORG 101ED F6.3, f=640mm), 赤道儀: ビクセン GP

カメラ: ニコン D700 (ISO800), 露出時間: 1/2000

撮影場所: 硫黄島近海

撮影: 福島英雄, 宮地晃平, 片山真人 画像処理: 福島英雄

Hideo Fukushima, A. Miyachi and M. Katayama

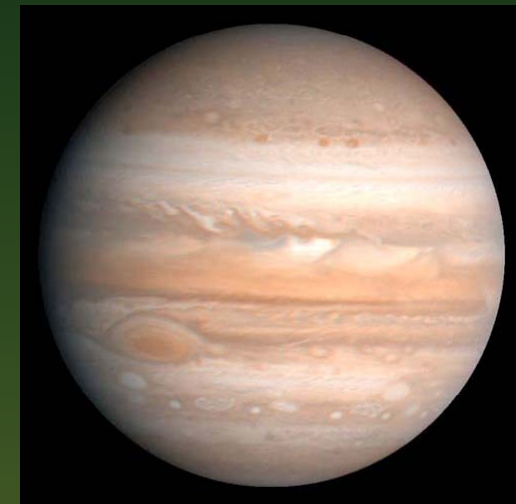
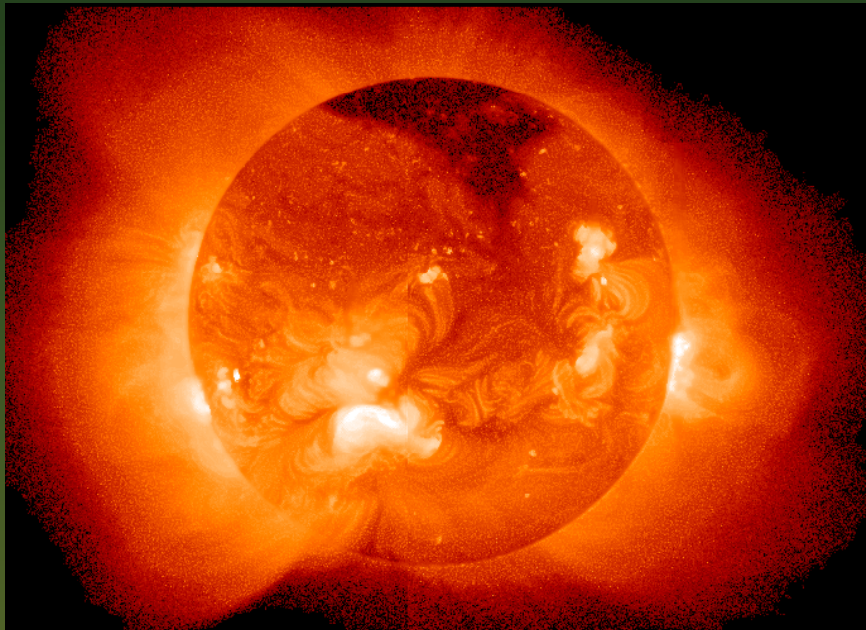


円平面制限3体問題の
[BASICのプログラム](#)

- 当面は、円平面制限3体問題を研究しよう。
- 太陽と木星が重心の周りに円軌道を描いて運動しているとして、第3の惑星の運動を記述しよう。

写真: NASAウェブサイトより転載

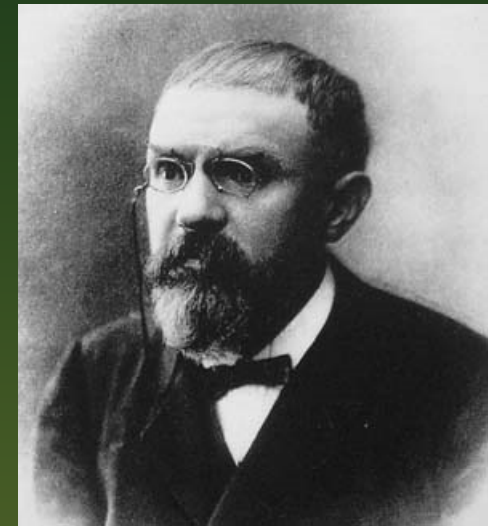
✦



円平面制限3体問題の
[BASICのプログラム](#)

- 円平面制限3体問題では、円軌道を描く太陽と木星が固定される(回転している)座標系をとることができる。
- この座標系では、重力のほかに遠心力、コレオリの力をうける運動となる。
- 第3の惑星の位置と速度をあらわす状態の空間は $2 + 2 = 4$ 次元である。
- この運動には、エネルギーに対応するヤコービの積分という不変量があり、**状態の空間の次元**は、3である。
- 3次元の多様体上のフローを研究すれば、円平面制限3体問題が理解できるはずだ。

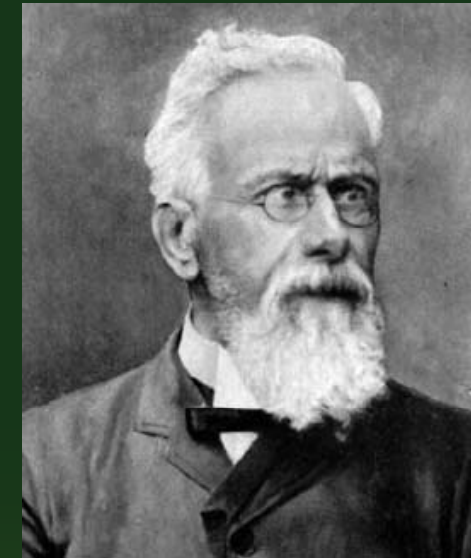
回転している座標系での
円平面制限3体問題の
[BASICのプログラム](#)



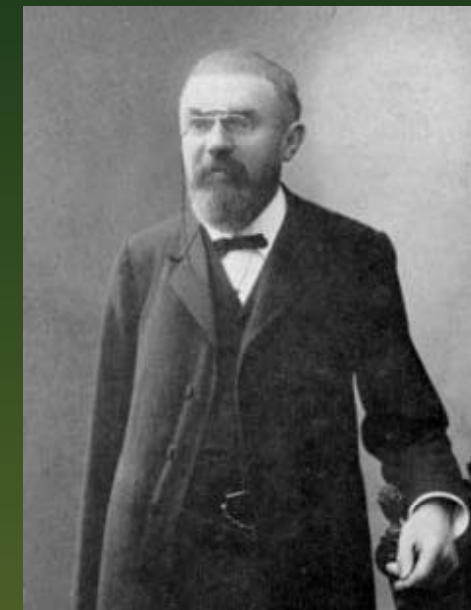
ポアンカレ(1854-1912)

3次元多様体に対して:

- ポアンカレ・ホップの定理は成立する。
3次元では、考えるべき停留点の種類が増えるが、それらに \pm の符号(一般には整数値)を対応させ、和をとると多様体のオイラー数となる。
- コンパクトな3次元多様体のオイラー数は、常に0である。
- 3次元多様体に対する不変量は、ほかにあるだろうか？
- ベッチ(1823-1892)が定義した数は、不変量に違いない。

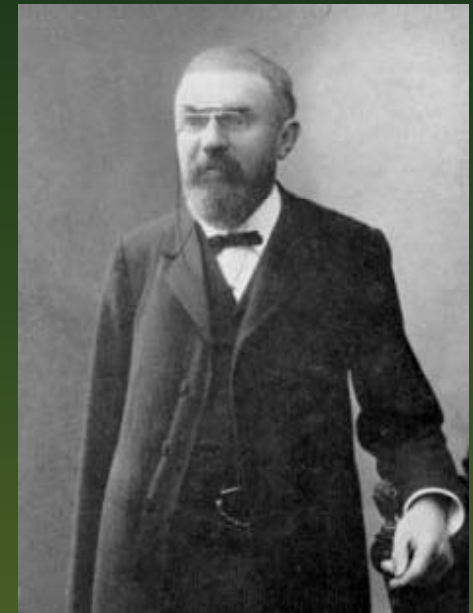


ベッチ(1823-1892)



ポアンカレ(1854-1912)

- ポアンカレは、ベッチの理論を進めて、ホモロジー理論を構築した。
- 「ホモロジー群が3次元球面と同型な3次元多様体は、3次元球面と同相である」という主張を出版した(1900)。
- この主張の誤りに気がついたポアンカレは、この主張の反例を作った(1904)。
- ポアンカレは反例であること(球面と異なること)を「基本群」を定義して示した。
- そして、「単連結な(基本群が自明な)コンパクト3次元多様体は、3次元球面と同相であるか」という問題(ポアンカレ予想)を提出した。

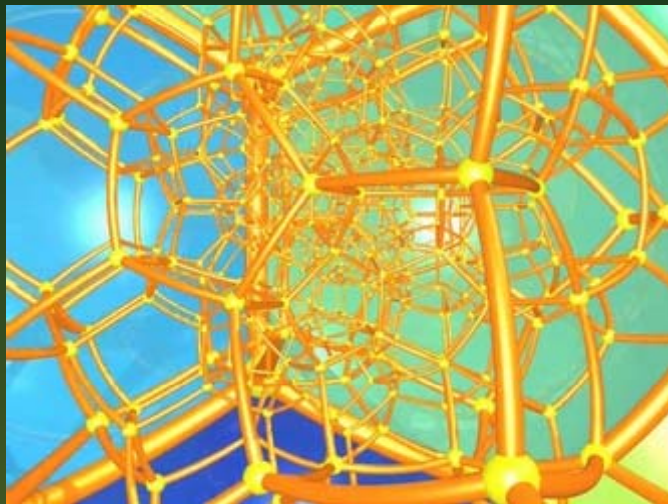


ポアンカレ(1854—1912)

ポアンカレの反例は、ポアンカレ・ホモロジー球面と呼ばれる。
4次元空間の正多面体の1つである正120胞体の各胞体は、
ポアンカレ・ホモロジー球面の基本領域である。

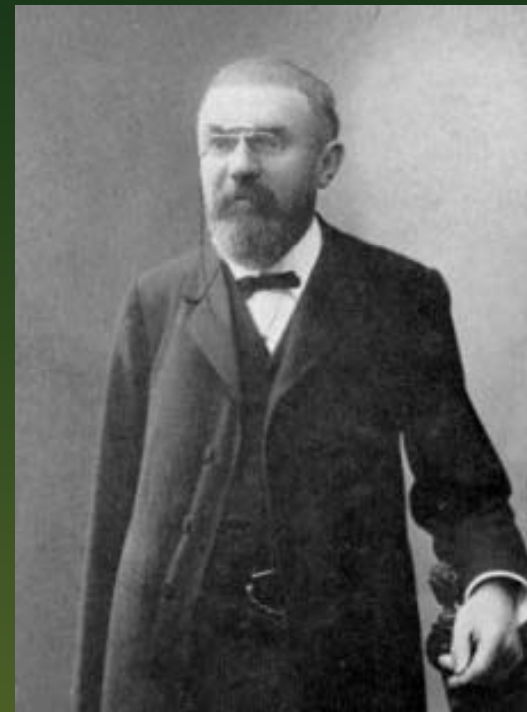
ポアンカレ・ホモロジー球面は、現在では、3次元多様体の分
類理論のなかで非常に重要であることが認識されている。

✦



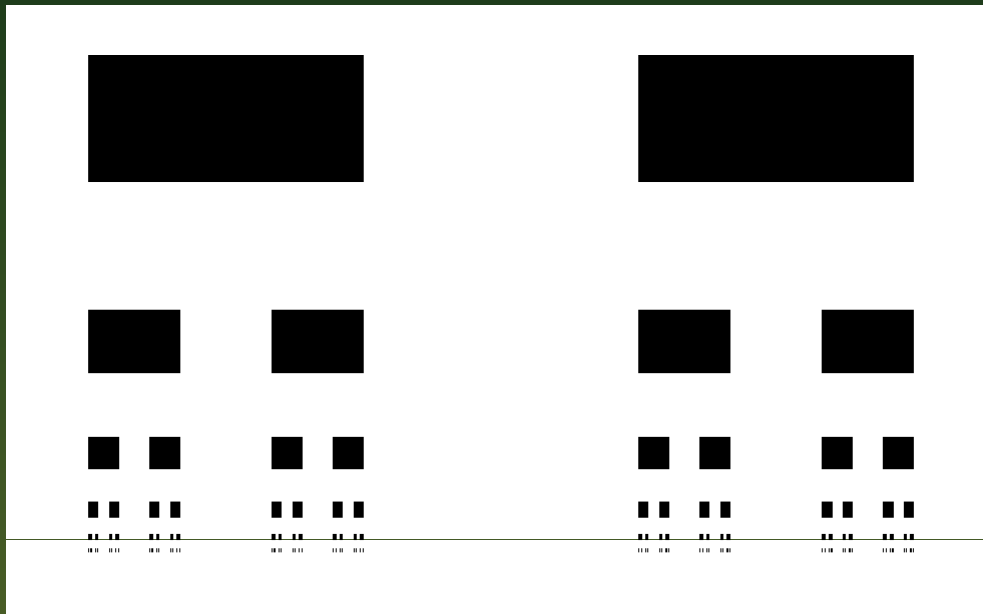
DIMENSIONS

<http://www.dimensions-math.org/>



ポアンカレの時代には、多くの数学者が空間の形について研究をしている。

カントール(1845－1908)は、集合の比較、位相とは何かを研究した。

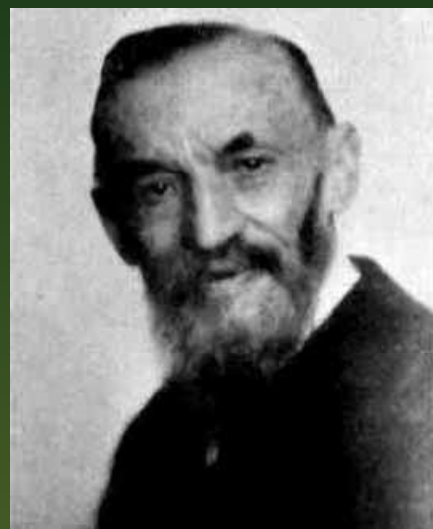


カントールは、「無限」にもいろいろな種類があるということを発見した。

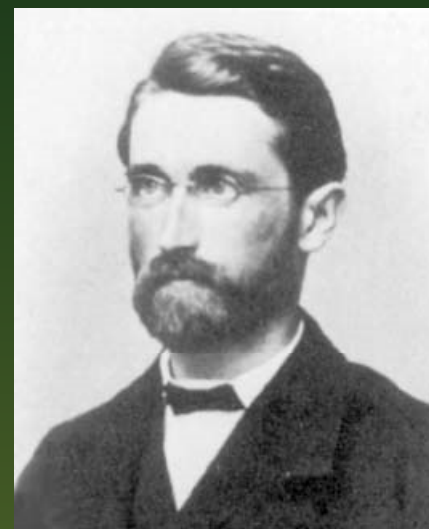
「有理数全体は、実数全体の中で、まばらである」ということを「証明」した。

「数とは何か」ということも問題になった。

ペアノの自然数の定義、デデキンドの切断による実数の定義が与えられた。



ペアノ
(1858—1932)



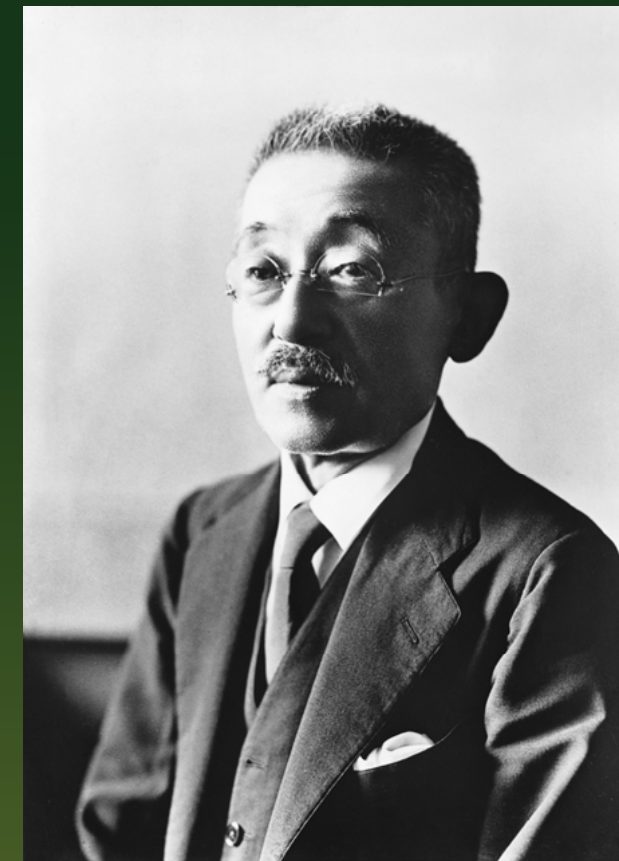
デデキンド
(1831—1916)

高木貞治は、1900年前後にベルリン、ゲッチンゲンに留学している。

日本の数学の教育研究は、高いレベルにあった和算の伝統の上に成立してきた。

高木貞治は、東京大学の3人目の数学教授として教育研究を行った。

高木貞治の類体論の研究は高く評価されるもので、フェルマーの大定理の証明につながっている。



✦ 高木貞治 (1875—1960)

高木貞治の「解析概論」には、
当時、世界で認められ始めた
実数論が書かれている。

今年、高木貞治50年祭の
年で、2月20日には数理科
学研究科大講義室で市民講
演会が行われる。

世界的な業績を残した
近代日本の数学者 —
高木貞治 1875-1960



社団法人 日本数学会
高木貞治50年祭
記念事業

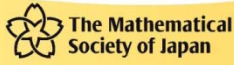
記念学術講演会
京都大学数理解析研究所研究会「代数的整数論とその周辺」企画講演
日時 2009年12月9日水曜日 14:00-17:30
会場 東京大学大学院数理学研究科大講義室 (資料展同時開催、申し込み不要、入場無料)

プログラム
14:00 開会
14:15-15:30 齋藤秀司 (東京大学)
「類体論の高次元化と高次化」
15:45-16:00 DVD 上映
16:15-17:30 三宅克哉 (早稲田大学)
「高木類体論 何処から? そして 何処へ?」
17:30 閉会

記念市民講演会
日時 2010年2月20日土曜日 13:30-16:30
会場 東京大学大学院数理学研究科大講義室 (資料展同時開催、申し込み不要、入場無料)

プログラム
13:30 開会
13:40-14:40 足立恒雄 (早稲田大学)
「高木貞治先生に見る数学思想の変遷」
14:50-15:05 DVD 上映
15:20-16:20 野崎昭弘 (サイバー大学)
「数学教育と高木貞治先生」
16:30 閉会

会場アクセス <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/access/>
問い合わせ先 takagi50@faculty.ms.u-tokyo.ac.jp



<http://mathsoc.jp/meeting/takagi50/index.html>

提供: 社団法人 日本数学会

✦



Heinz Hopf

ホップ(1894 - 1971)

さて、多様体の理論は
多くの数学者によって
整備された。

✦



ホイトニー(1907 - 1989)
<http://www.math.ias.edu/people/past-faculty>



ドラーム(1903 - 1990)

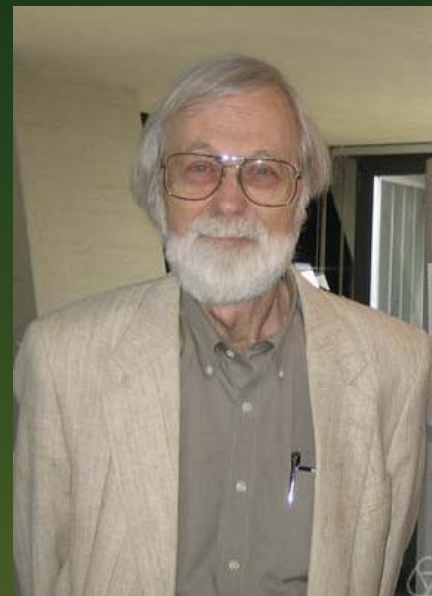
✦



トム(1923 - 2002)

Copyright(c)MFO
http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=4170

✦



ミルナー(1931 -)

Copyright(c)MFO
<http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=9831>

- ポアンカレ予想については、
- まず5次元以上の同様の問題がスメールにより肯定的に解決された(1960)。
- その後、フリードマンにより、4次元のポアンカレ予想が解決された(1982)。

✦



Copyright(c) George M. Bergman, Berkeley
http://owpodb.mfo.de/detail?photo_id=5121

次元の高い多様体が扱いやすかった理由の1つは、2次元円板からの写像の像の自分自身との交わりが解消できるからであった。

多様体の研究の基本は、その上のモース関数と呼ばれる関数を考え、そのグラディエント・フロー、すなわち、モース関数を高さ関数と考えたときの、最大傾斜線の模様を、出来るだけ簡単にすることから始まった。

すなわち、多様体の影を見る(関数を考える)こと、多様体上の模様(フロー)を考えること(常微分方程式を解くこと)により行われた。

3次元多様体に対しては、基本群が等しい有限巡回群で同相ではない3次元多様体が数多くあることがわかったので、ポアンカレ予想の反例を探すことも行われた。

このような多様体は多くはないが、分類のためにはさらに詳しい不変量を必要とした。そのような詳しい不変量が、ポアンカレ予想の反例を見分けるかもしれないと期待された。

一方、コンパクト3次元多様体は、有限個のピースを球面あるいは2次元トーラスに沿って貼り合わせた形をしていることが証明された。

✦



Copyright(c) George M. Bergman, Berkeley
http://owpodb.mfo.de/detail?photo_id=6119

サーストン

サーストンはそのピースのそれぞれに8つの幾何構造の1つが入るという幾何化予想を提出した(1980年代初め)。これが正しいならば、ポアンカレ予想は正しい。

$$S^3, E^3, H^3$$

$$S^2 \times E, H^2 \times E$$

$$\text{Nil, Sol, } \widetilde{SL_2R}$$

サーストーンは、そのピースに定負曲率の計量（双曲計量）が入るための条件を定式化した。双曲計量の存在定理は、証明が長大で、「怪物定理」と呼ばれた。

ハミルトンは、多様体上のリーマン計量を変形していく偏微分方程式の解であるリッチ・フローを用いて、曲率が正の多様体の計量を一定の正曲率に変形することを考えた。



by courtesy of international mathematicians union

ペレルマンは、リッチ・フローを解析して、それが、多様体のピースへの分解を導き、さらにそれぞれのピースの計量が8つの幾何学のどれかに収束することを示した。

それにより3次元のポアンカレ予想は肯定的に解かれた。

その後、このような計量の変形は、新しい方法の一つとして定着してきている。



ペレルマン

by courtesy of Matthias Webe

3次元多様体上の1点の近傍での座標をとると、計量は $g_{ij}dx_i \otimes dx_j$ と表わされ、リッチ曲率は、 $R_{ij}dx_i \otimes dx_j$ と書かれる。
計量の変化を記述する次の方程式の解をリッチ・フローという。

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

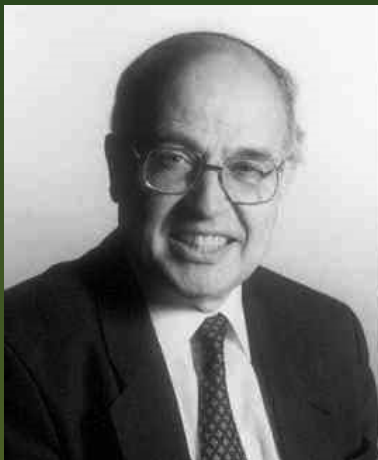
(座標と時刻に依存する3行3列の対称行列についての方程式)

このように、3次元のポアンカレ予想は多様体上で「音を聞く、波を見る、熱の伝わり方を計る」という(偏微分方程式を解く)方法で証明された。

多様体は、解析をおこなうための空間として用意されたものであるから、その上で偏微分方程式を解くことは初期から研究されてきた。

アティヤ・シンガーの理論や、ヤウの理論、ドナルドソンの理論などが作られ、多様体の理論を深化させてきていた。

ペレルマンの証明もこのような基礎の上に得られたものである。



✦



✦



ここまでのまとめ

- 力学(微分方程式)の研究の中で、曲面を一般化した多様体が定式化された。
- 多様体の形を理解するために、ホモロジー群、基本群などが定義された。
- ポアンカレは「単連結な(基本群が自明な)コンパクト3次元多様体は、3次元球面と同相であるか」という問題(ポアンカレ予想)を提出した。
- 多様体の発展により、多様体上の微分方程式を考えることで、ポアンカレ予想は解かれた。

各次元のポアンカレ予想の成立が証明されたことで、多様体自身の研究から、多様体上の構造の研究へ展開している。

多様体自身の研究も、多様体上の構造を用いて行われてきたのであるが、さらに様々な構造が研究対象となっている。

曲面に対しても、その複素構造の研究が進展している。一方で、曲面上の面積形式をめぐる研究も盛んである。

3次元多様体に対しては、その上の接触構造の研究が進展している。

4次元多様体に対しては、その上の複素構造とシンプレクティック構造の研究が進展している。

曲面上の面積形式をめぐる研究は、円平面制限3体問題に関係がある。

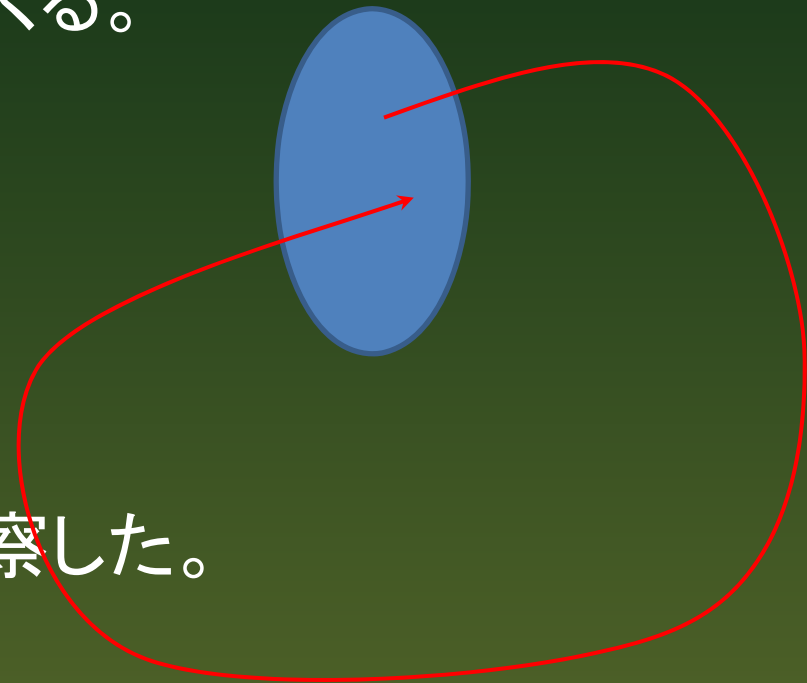
円平面制限3体問題の解は3次元の状態空間上のフローで、体積を保つことがわかっている。

このフローに対して、曲面が交わっていると曲面から出た軌道は、曲面に戻ってくる。

これを再帰写像と呼ぶ。

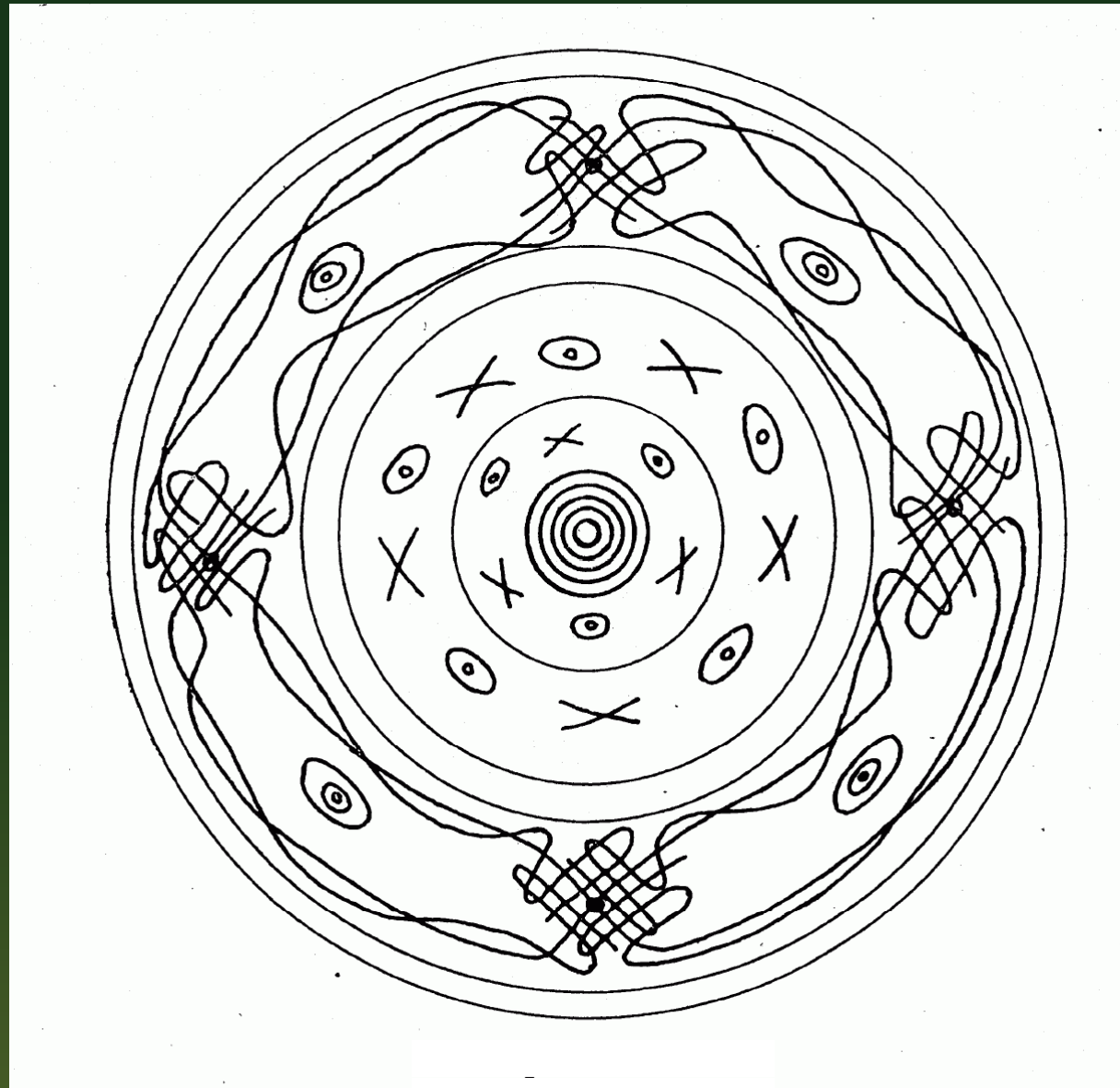
再帰写像は面積を保つ。

ポアンカレはその様子を観察した。



その様子は
右の図のよう
である。

卍



Arnold

Small denominators and
problems of stability of
motion in classical and
celestial mechanics

Figure 6 , Page 93

"Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics"

Vladimir I Arnol'd, 1963, Russian Mathematical Surveys,18, pp85-191

By courtesy of London Mathematical Society

Poincaré, Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste

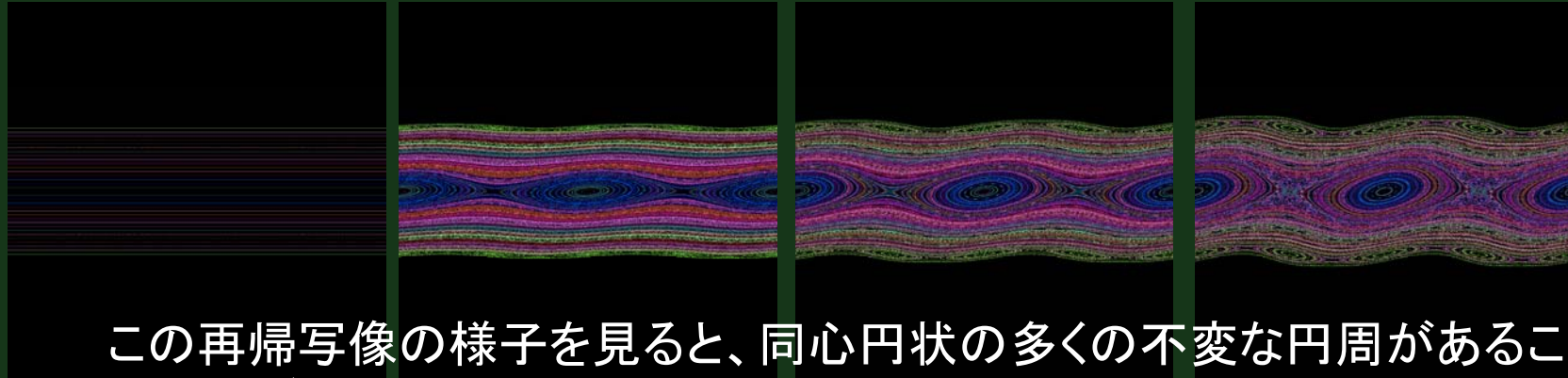
Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes ... On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

ポアンカレは円平面制限3体問題において、画期的なアイデアを持っていた。

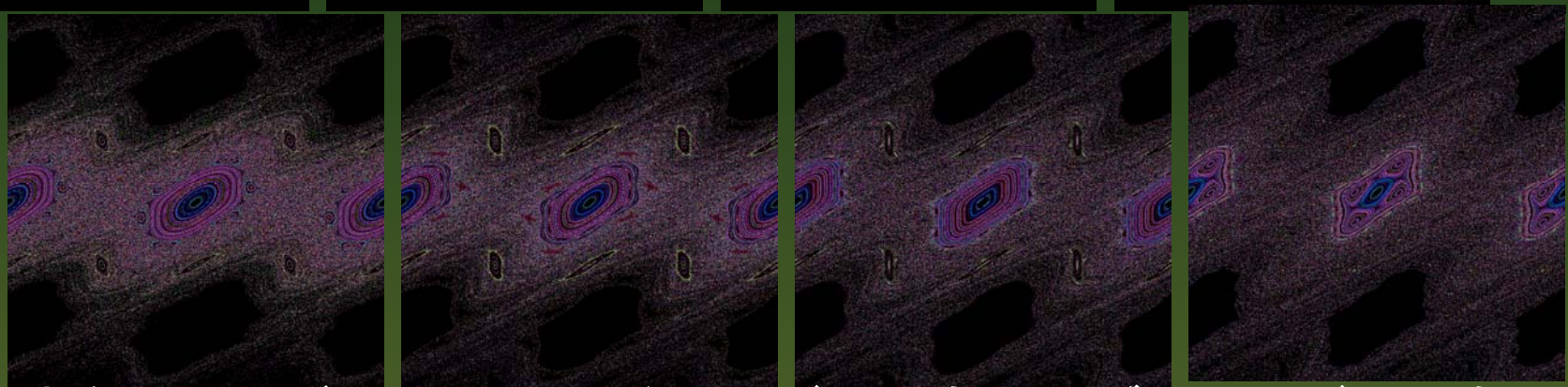
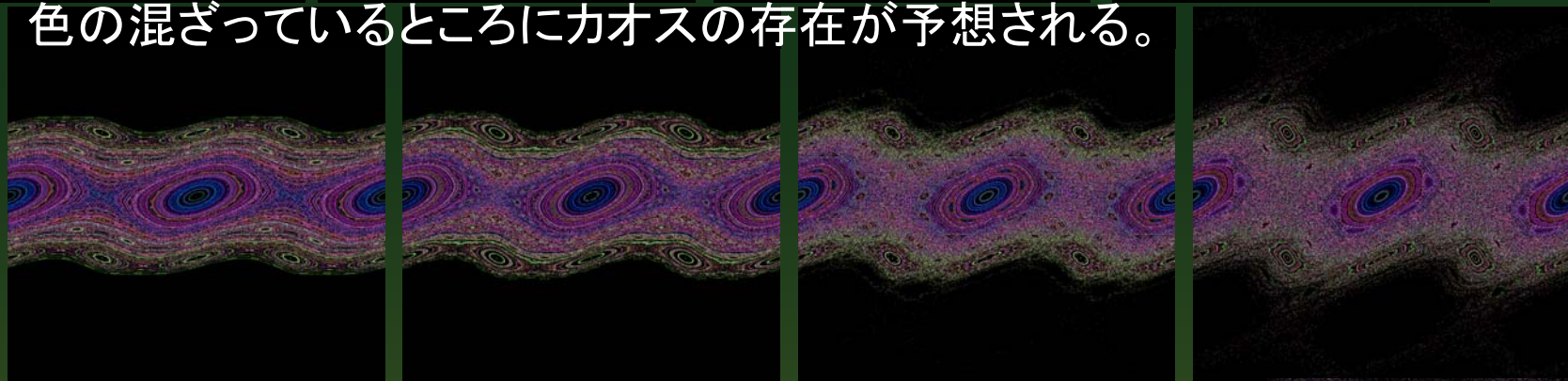
ポアンカレのアイデアは、円平面制限3体問題にあるパラメータ木星の質量／太陽の質量を 0 から変化させて、フローの再帰写像の変化を見ようというものである。

詳しく説明できないが、その一部分の様子をみると、次のものとほとんど同じである。

[BASICプログラム](#)



この再帰写像の様子を見ると、同心円状の多くの不変な円周があること、色の混ざっているところにカオスの存在が予想される。

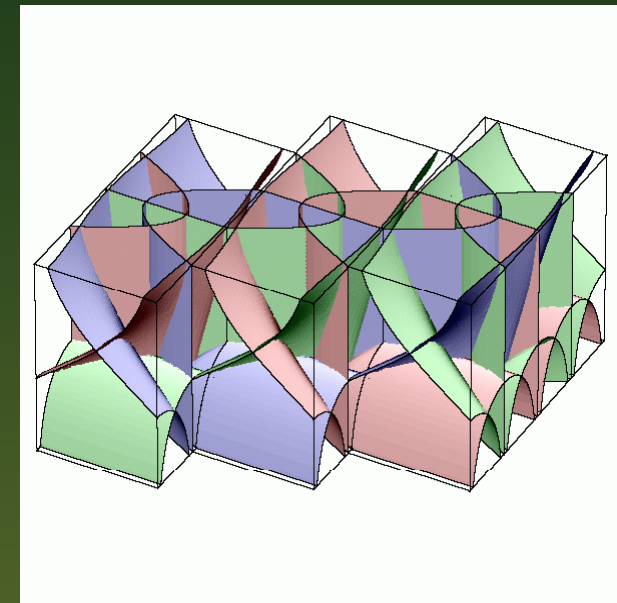
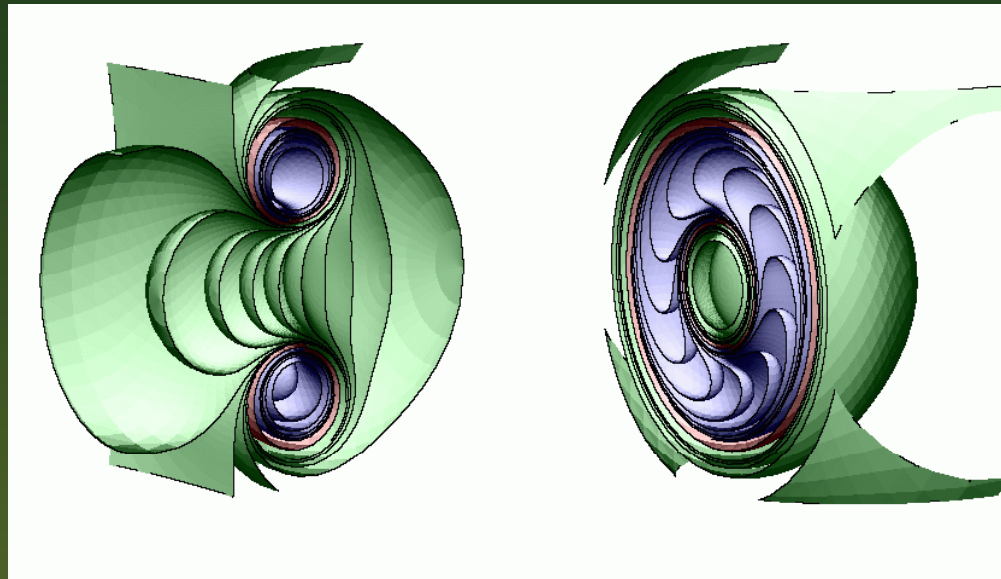


実際、コルモゴロフ・アーノルド・モーザー理論、オーブリー・マザー理論により、それらが明快に述べられる。

現在、創られている数学の中には、多様体上の構造を研究するものが多い。

図示しやすい構造としては、私も研究している葉層構造というものがある。例えば、以下のページに葉層構造のアニメーションがある。

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/showroom/>



- さて、今日の話の最初のところに戻ってみよう。
- ポアンカレ予想を題材に話をしたのだが、最初の出発点は、状態の空間がどうなっているか調べようということだった。それが分かれば、フローの様子が制限され、情報を得ることができる。
- 曲面の形が同じかどうかは、よく観察すればわかるように思える。
- ところで、空間や構造が同じであること、空間や構造が異なることは、どうやって調べるのだろうか？

同じであること

- 多様体が同じであるかどうかを決定するのはやさしくない。
- そもそも、同じであることも定義が必要である。
- 2つの多様体と同相(同じ形)であるとは、一方から他方への連続写像で連続な逆写像を持つものがあることである。
- 同じであることは、このような写像を実際に構成するか、構成できることを証明して示される。
- 違うことを示すことは、このような連続写像が作れないことを証明することである。

違うということ: 形を見分ける方法

- そのために、背理法を用いる。
- 2つの多様体と同相ならば同じになる数値を見つける。
- 2つの多様体に対して、この数値が異なれば違うということがわかる。
- これまで出てきたものでは、オイラー数、基本群がそれにあたる。
- こういう数値を不変量という。

空間の不変量の定義

空間上に、ある構造をとり、それに対して定義される量を計算すると、同じ空間に対しては、その構造の取り方に依らず同じ量となるとき、この量を空間の不変量と呼ぶ。

空間上の構造の不変量の定義

構造の与えられた空間上に、(さらにある構造をとり、)それに対して定義される量を計算すると、同じ構造を持つ空間に対しては、(細かい構造の取り方に依らず)同じ量となるとき、この量を構造の与えられた空間の不変量と呼ぶ。

美しい定理1.
異なる方法で定義された不変量は同じ値になる。
「本質的な定理」

美しい定理2.
同じ不変量を持つ2つの空間(構造)は同じ。
「分類理論」

例：線形代数

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ 行列 A, B が「同じ」であることを、ある n 次正則行列 P, Q があって $P A Q = B$ となることとする。

行列の k 次の小行列式 ($\binom{n}{k}^2$ 個) の中に 0 でないものがあり、 $k+1$ 次の小行列式 ($\binom{n}{k+1}^2$ 個) がすべて 0 となるとき、行列のランクは k と定義する。

「分類定理」

A と B が「同じ」であることと A のランクと B のランクが等しいことは同値である。

曲面に対し、三角形で分割したとき、

頂点の個数 - 辺の個数 + 面の個数

は、分割の方法に依らない。この値をオイラー数と呼ぶ。

「モースの定理」

曲面上の関数について、臨界点は、極小点、鞍点、極大点からなるものについて、

極小点の個数 - 鞍点の個数 + 極大点の個数

は、オイラー数に一致する(特に、関数の取り方に依らない)。

「ポアンカレ・ホップの定理」

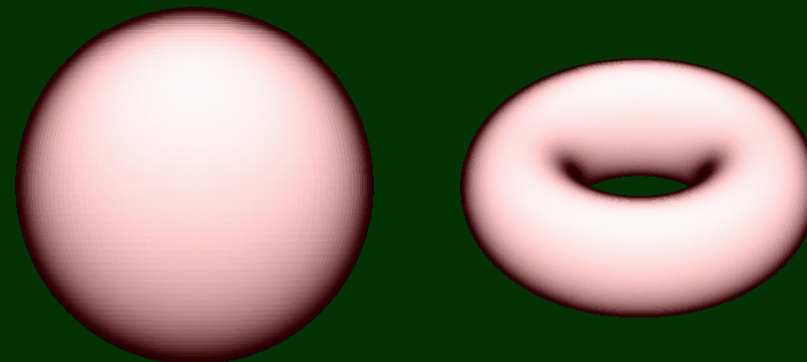
曲面上のフロー(流れ)で、停留点が、ソース、サドル、シンクからなるものについて、

ソースの個数 - サドルの個数 + シンクの個数

は、オイラー数に一致する(特に、フローの取り方に依らない)。

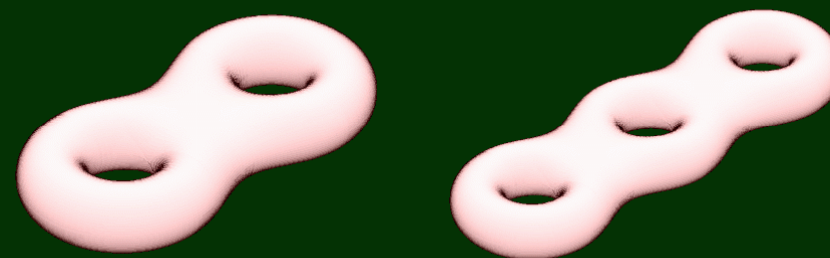
曲面についての定理

「ガウス・ボンネの定理」



3次元ユークリッド空間内の閉曲面の曲率の積分は、 2π のオイラー数倍となる。

「分類定理」



3次元ユークリッド空間内の2つの閉曲面は、オイラー数が等しいならば、同相である。

3次元多様体の定理

「ポアンカレ・ホップの定理」

3次元コンパクト多様体のフローが有限個の停留点をもつとき、停留点の指数の和は、0である。

「ポアンカレ予想」

3次元コンパクト多様体の基本群が自明な群ならば、それは3次元球面と同相である。

形の見分け方：不変量を定義して計算する。

これは、必ずしも難しくない。

役にたつかどうかという数値を定義して計算すればよいのである。

難しい点は、その数値が「同じものに対して同じ値を与えるか」ということである。

十分な区別の方法が確立したときに分類の問題が実際に解かれる段階になるのである。

数学研究上でしばしば出会うこと。

最も多いのは、苦勞して定義した不変量は実は0という値しかとらない。

これも無駄ではない。ある対象に対して、1つの性質が常に成り立つという定理でもある。

2番目は、定義した不変量は実は知られている不変量である。

これは1つの定理である。

滅多に起こらないが新しい自明ではない不変量の定義ができあがることがある。

参考

制限3体問題

斎藤利弥 「解析力学入門」 至文堂 1964 (絶版ですが図書館にはあります)

高木貞治

<http://mathsoc.jp/meeting/takagi50/index.html>

ミルナー:ポアンカレ予想

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/kokaikoz/milnor-j.pdf>

DIMENSIONS

<http://www.dimensions-math.org/>

The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, 2002

<http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>

Ricci flow with surgery on three-manifolds, 2003

<http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>

Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, 2003

<http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245>