

学術俯瞰講義

「数学を創る」 — 数学者達の挑戦 —

2009年度冬学期

第1回「数学はどうやって創られたか」

2009/10/08 室田一雄 ⊕ 岡本和夫

※: このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

数学とは何か考える

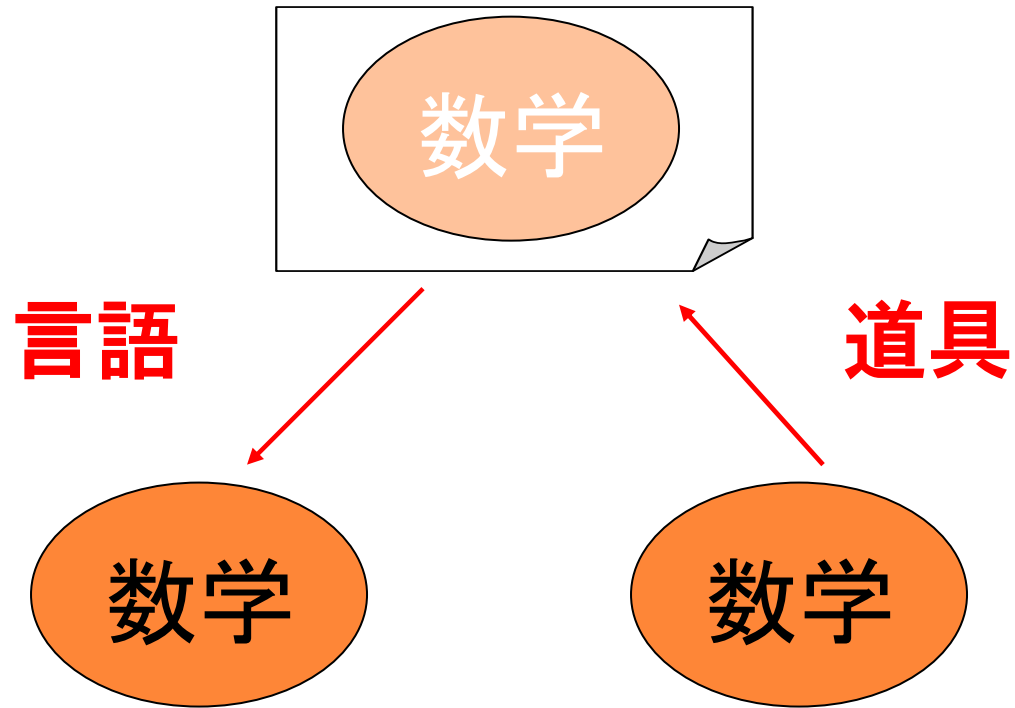
- 数学とはどんな学問だろうか
- 数学はどこで育ったのか
- 数学は何から生まれたのか

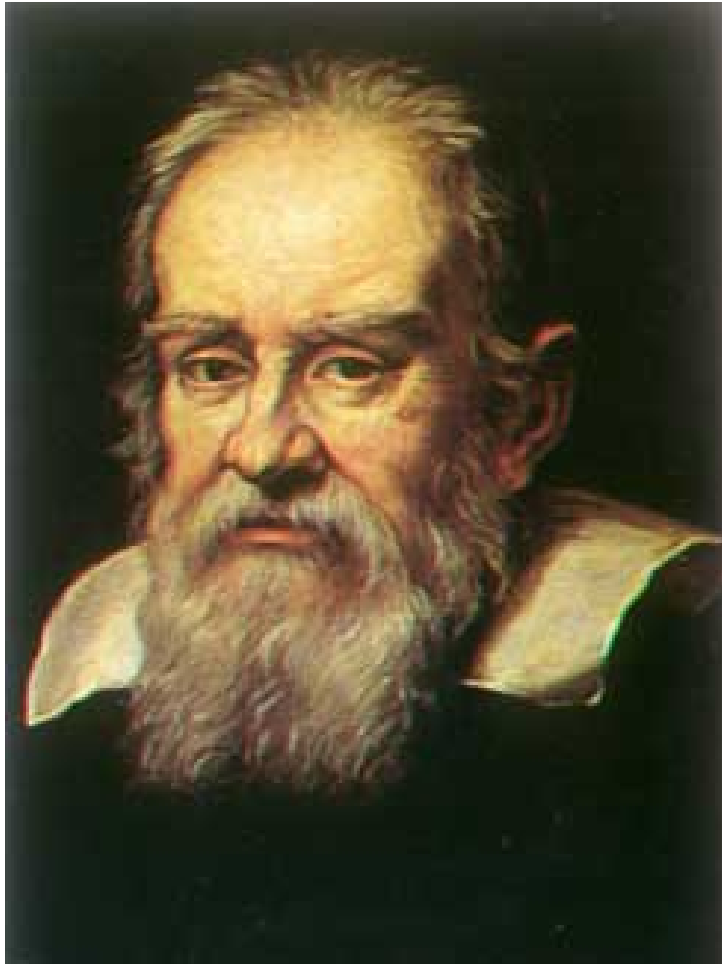
数学の3つの形

- 数学、数楽、数が苦
- 言語としての数学
- 道具としての数学
- 対象としての数学



数学を創るとは？





「自然という本は
数学という言葉
で書かれている」

Galileo Galilei
1564-1642

Original portrait by Justus Sustermans painted in 1636.



数学を創る契機

- 新しいことを知りたい
- 問題を解きたい, 解りたい
- 数学を使ってみたい

- 新しい**数学を創る**きっかけは, 自然, 社会, 数学そのもの

- 必要は発明の母なれども**遊び心**も大切
- **ものの見方を変える**



$$0 + 4 =$$

$$3 + 4 =$$

$$3 \times 2 + 4 =$$

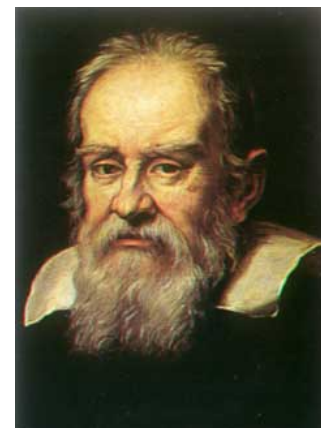
$$3 \times 2^2 + 4 =$$

$$3 \times 2^3 + 4 =$$

$$3 \times 2^4 + 4 =$$

$$3 \times 2^5 + 4 =$$

数列の
計算です



$$0 + 4 = 4,$$

$$3 + 4 = 7,$$

$$3 \times 2 + 4 = 10$$

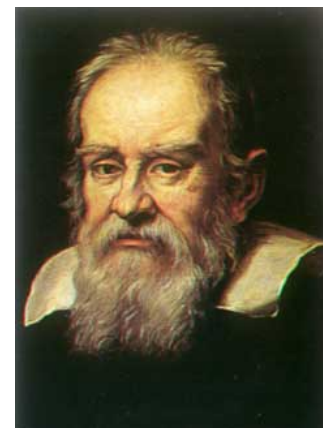
$$3 \times 2^2 + 4 = 16,$$

$$3 \times 2^3 + 4 = 28,$$

$$3 \times 2^4 + 4 = 52,$$

$$3 \times 2^5 + 4 = 100$$

ご苦労様
でした



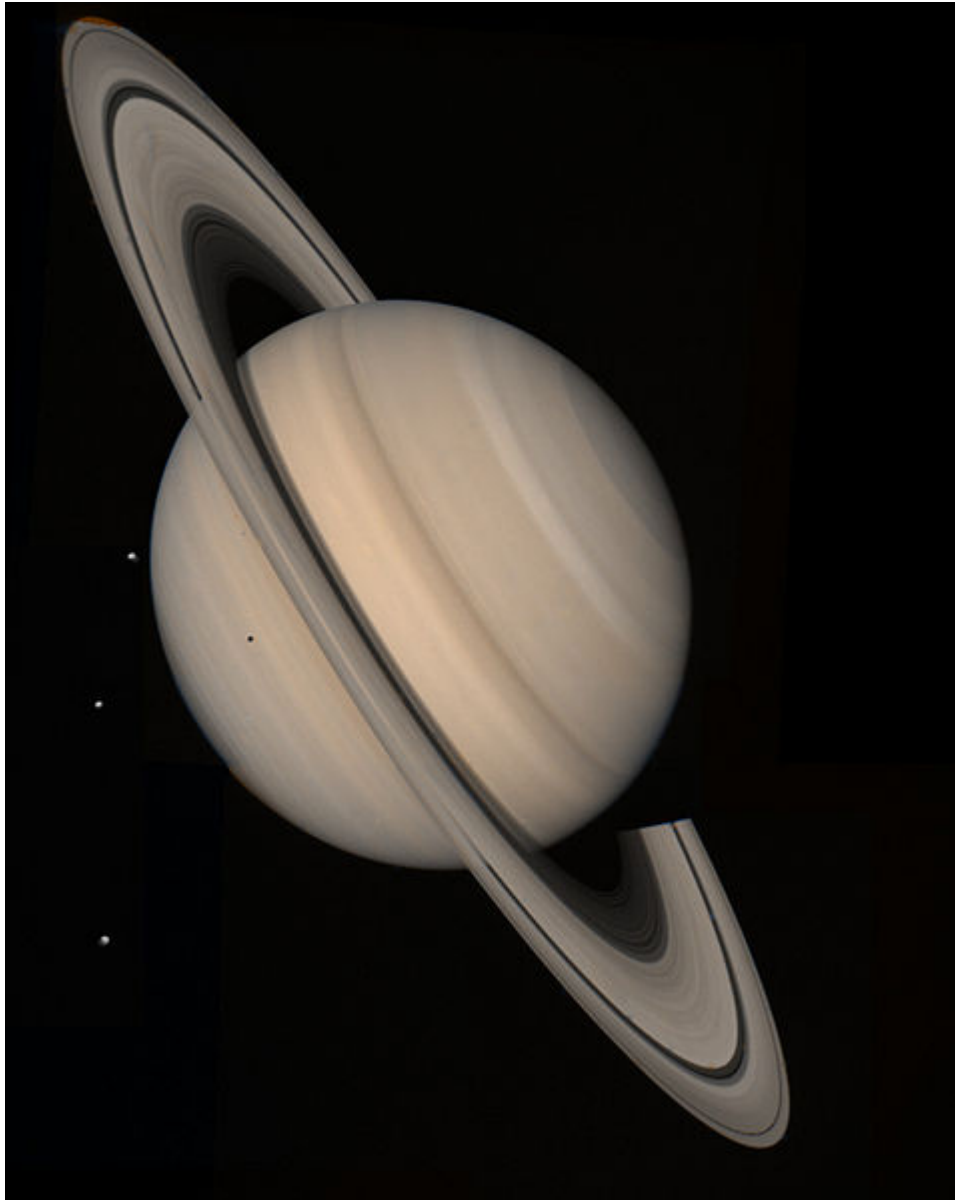
ボーデの法則

惑星と太陽の平均距離

太陽と地球の平均距離を10とすると

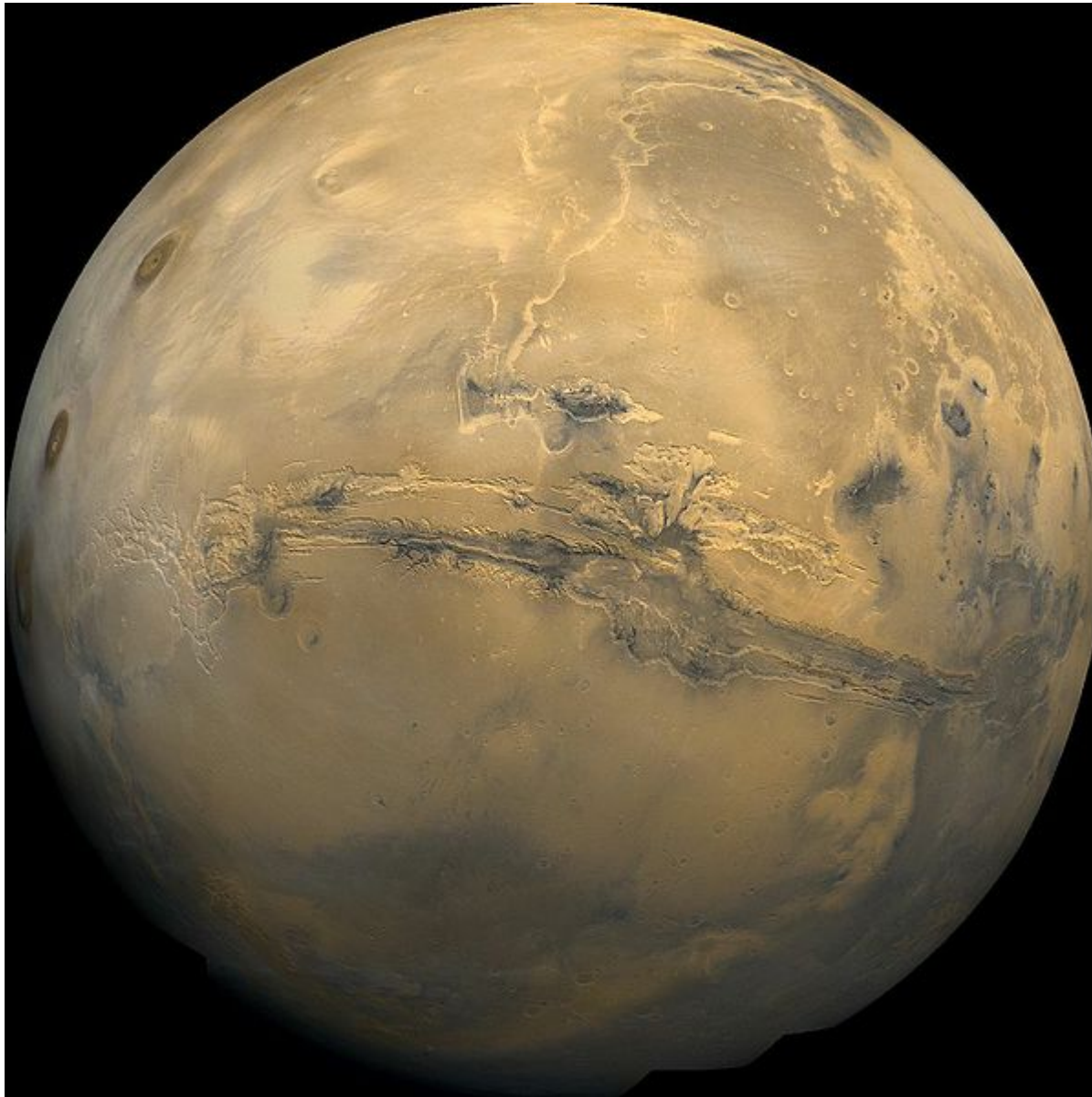
水星	: 3.9	金星	: 7.2	地球	: 10
火星	: 15.2	木星	: 52	土星	: 95.4





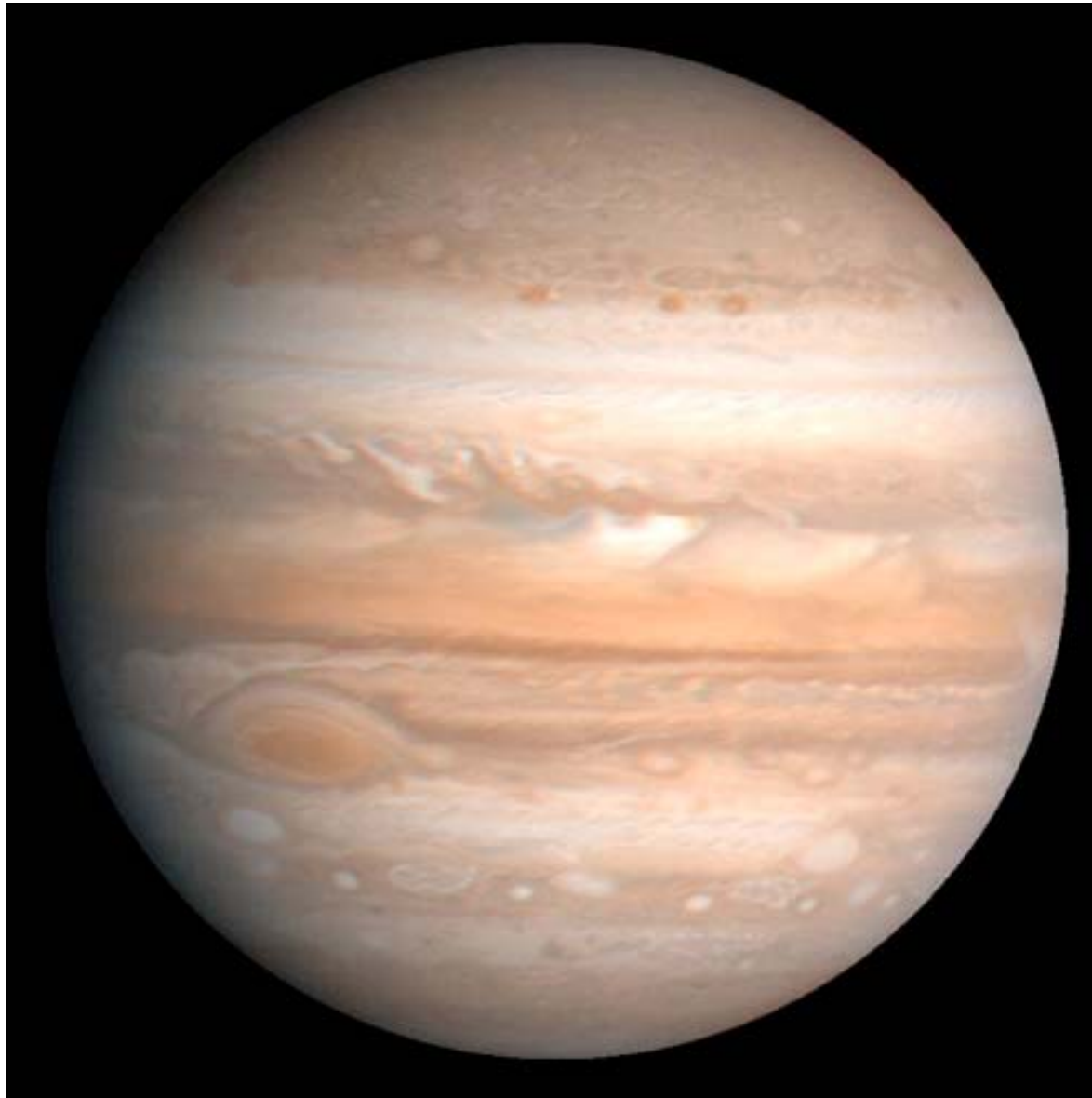
95. 4





15. 2





52



$$0 + 4 = 4,$$

$$3 + 4 = 7,$$

$$3 \times 2 + 4 = 10$$

$$3 \times 2^2 + 4 = 16,$$

$$3 \times 2^3 + 4 = 28,$$

$$3 \times 2^4 + 4 = 52,$$

$$3 \times 2^5 + 4 = 100$$

水星:3.9 金星:7.2

地球:10

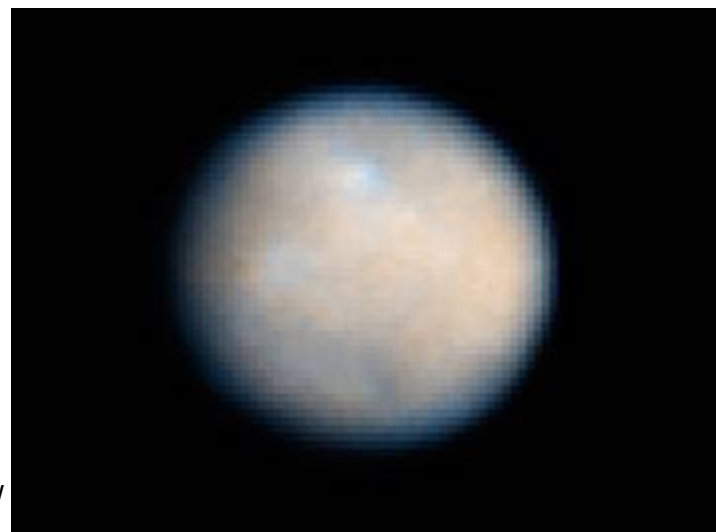
火星:15.2 木星:52

土星:95.4



小惑星の発見

- 28**が欠けている！
- 1801**年、小惑星ケレス(**27. 7**)の発見
- そして見失われた





Carl Friedrich Gauss
1777-1855



Wikipediaより転載(2010/03/02)
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bendixen_-_Carl_Friedrich_Gauß,_1828.jpg

ゲッチンゲン天文台長 ガウスの登場

- 軌道計算による予測とセレスの再発見
- 最小二乗法の採用
- 新しい理論の誕生



数学はどうやって創られたか —— 技術の数理, 最適化の数理 ——

室田 一雄

計数工学科 (工学部)

数理情報学専攻 (情報理工学系)

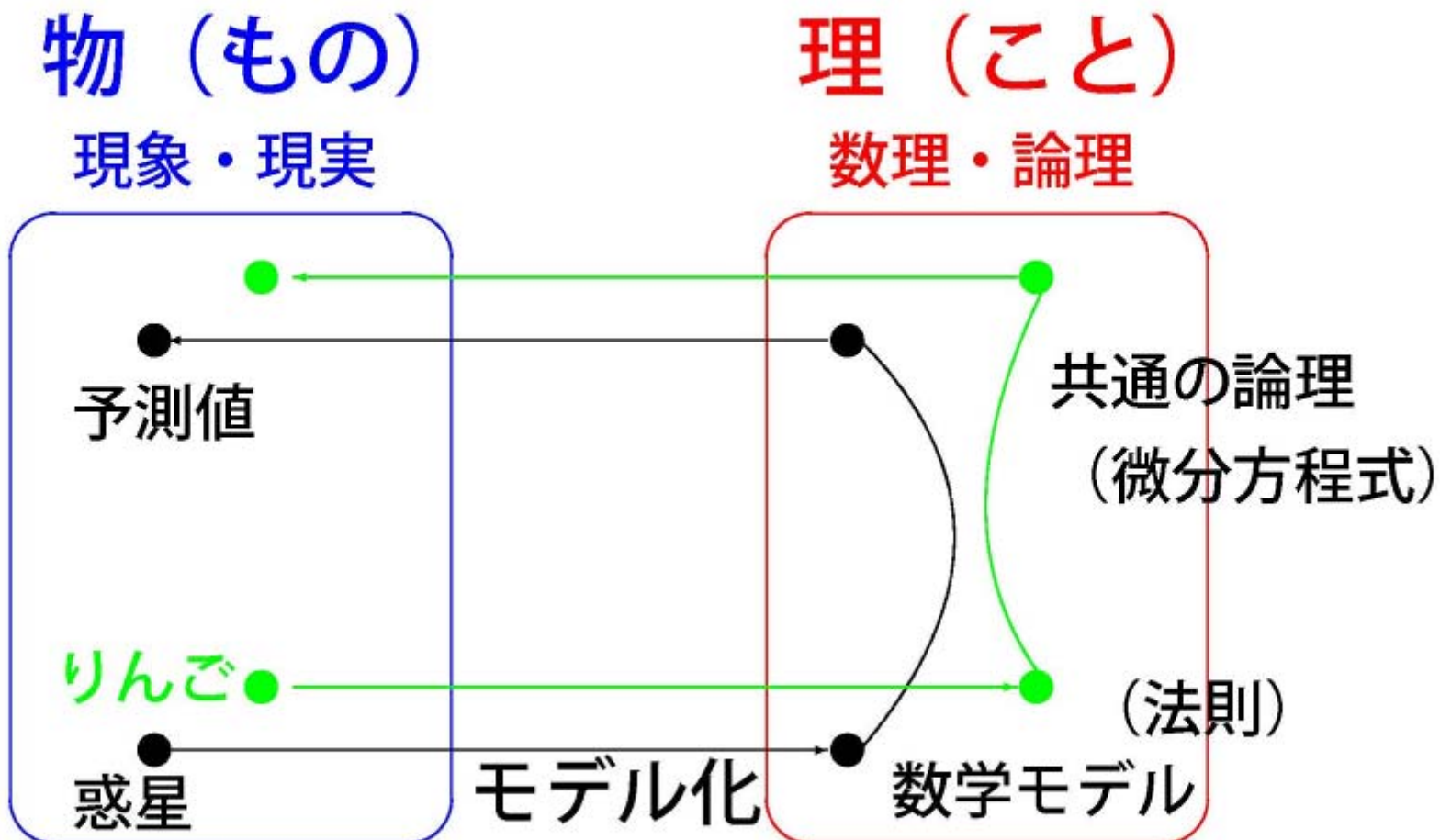
<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota>

1. 技術の数理

2. 最適化の数理

3. モデルとデータ

現象と数理



1. 技術の数理

数学を駆動する力

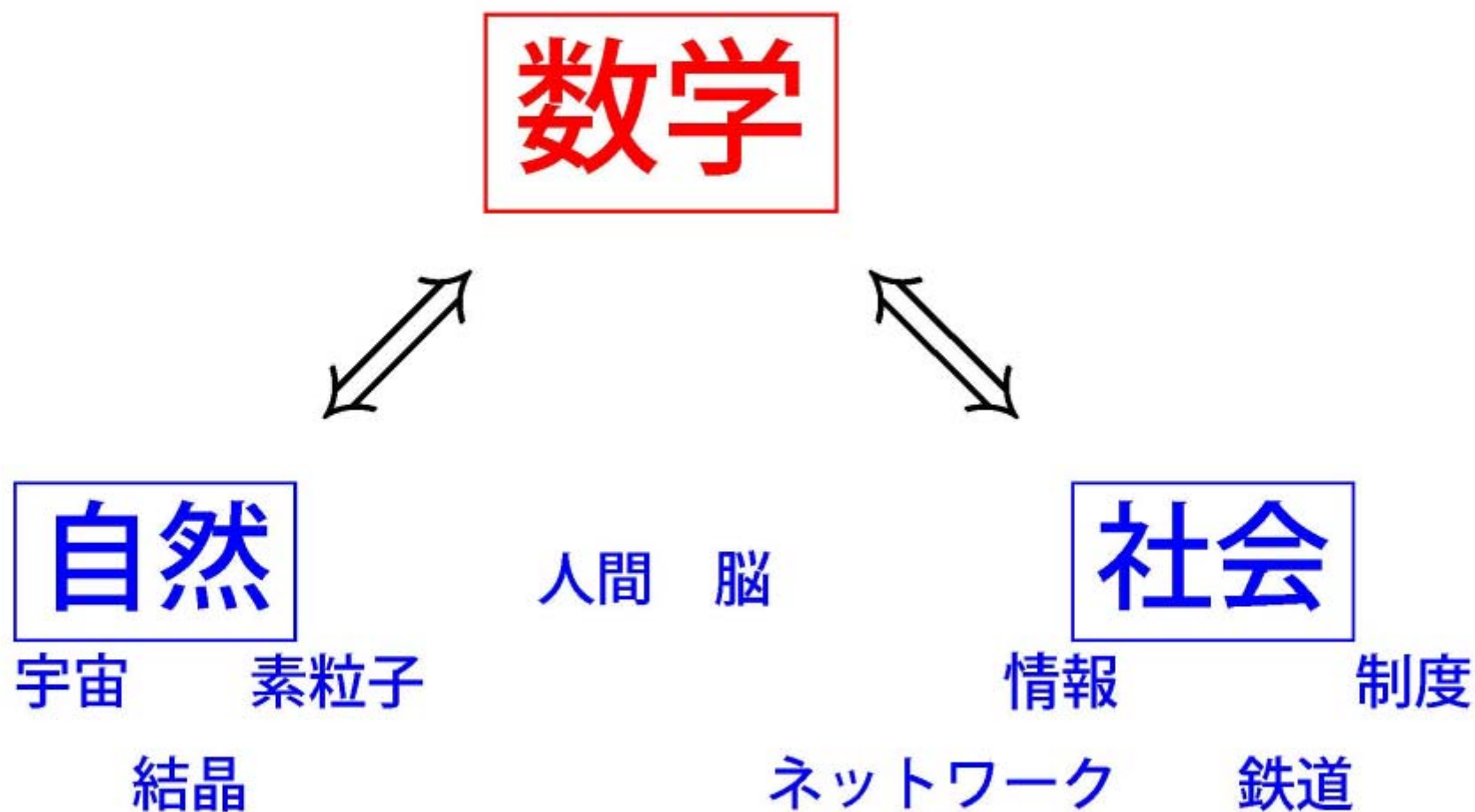
数学



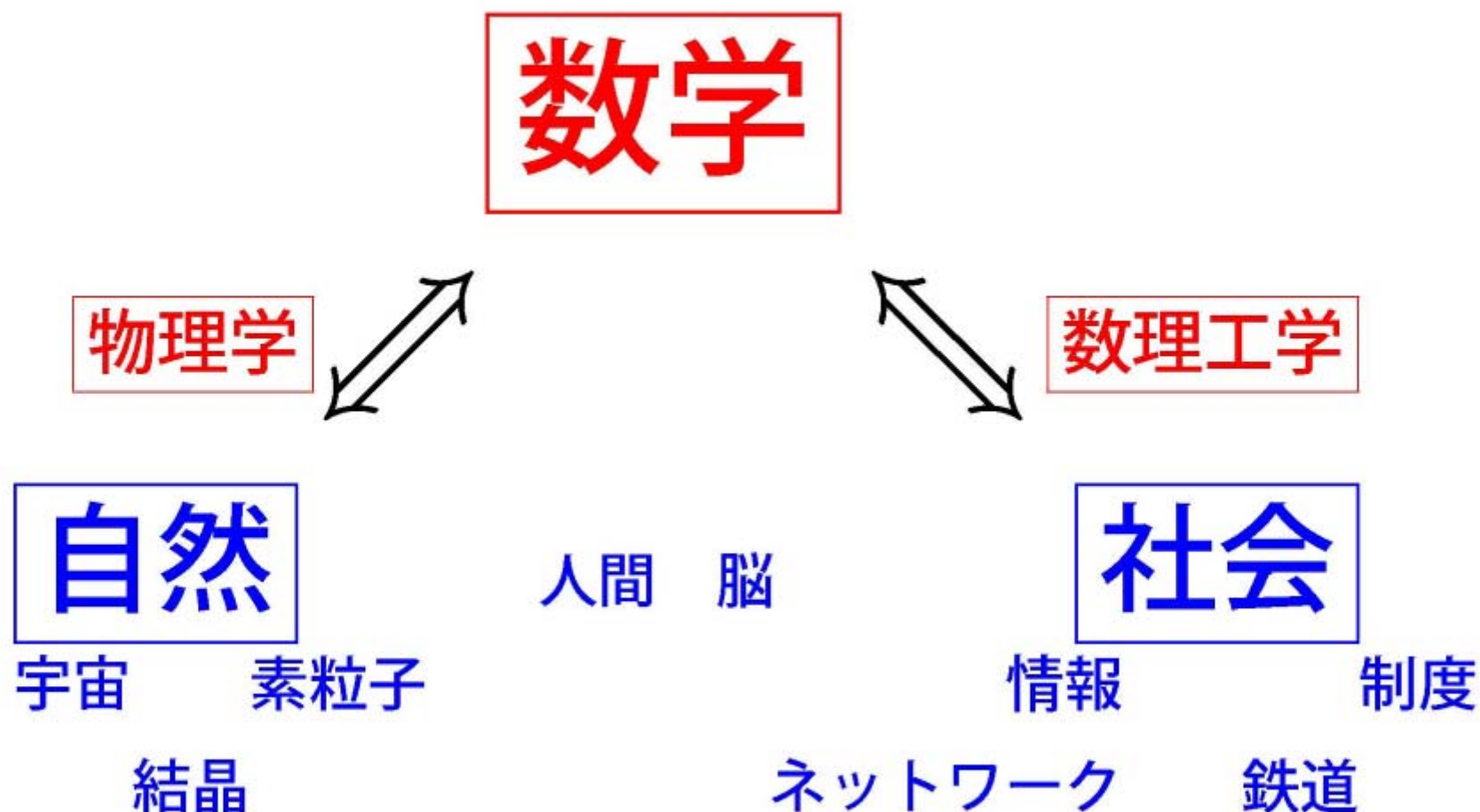
自然

社会

数学を駆動する力



数学を駆動する力



技術の数理の登場

1800頃 天体の運行

Gauss

1900 数学の公理化（形式化）

Hilbert

1945頃 技術の数理

2009 今日の数学・技術・社会

計算 (computation)

- ・ 計算とは何か
- ・ 計算機の原理

Gödel, Turing

Neumann

⇒ 数学基礎論, 計算機科学, 数値解析学

計算 (computation)

- ・ 計算とは何か
- ・ 計算機の原理

Gödel, Turing

Neumann

⇒ 数学基礎論, 計算機科学, 数値解析学

情報 (information)

- ・ 情報の定量的扱い
- ・ サイバネティックス

Shannon

Wiener

⇒ 情報理論, 脳科学, データ科学

計算 (computation)

- ・ 計算とは何か
- ・ 計算機の原理

Gödel, Turing

Neumann

⇒ 数学基礎論, 計算機科学, 数値解析学

情報 (information)

- ・ 情報の定量的扱い
- ・ サイバネティックス

Shannon

Wiener

⇒ 情報理論, 脳科学, データ科学

計画・決定 (planning/decision)

- ・ 線形計画法
- ・ ゲーム理論

Dantzig

von Neumann, Morgenstern

⇒ 最適化理論, 制御理論, 意思決定論 (OR)

技術の数理：黎明期

1800頃	天体の運行	Gauss
1900	数学の公理化（形式化）	Hilbert
1930頃	計算の理論	Gödel, Turing
1944	ゲーム理論	von Neumann, Morgenstern
1945	プログラム内蔵式計算機	von Neumann
1947	線形計画法	Dantzig
1948	通信と情報の理論	Shannon
1948	サイバネティクス	Wiener

2. 最適化の数理

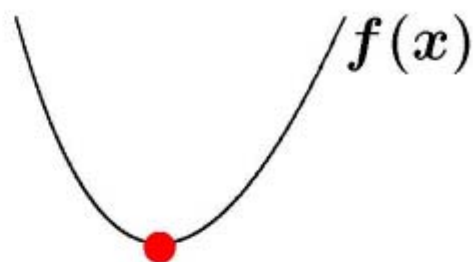
計画 (planning)
決定 (decision)

最大最小問題

最小化

$f(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

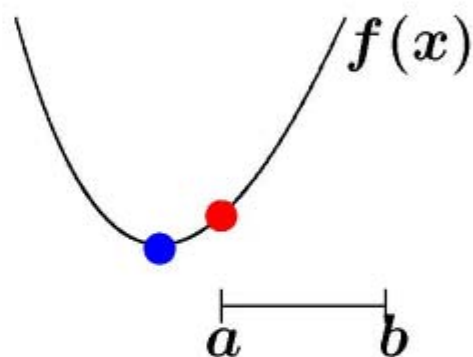


最小化

$f(x)$

制約条件

$$a \leq x \leq b$$

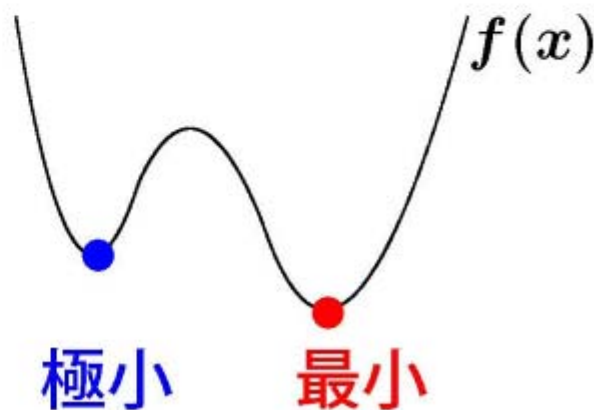


最小化

$f(x_1, x_2, \dots)$

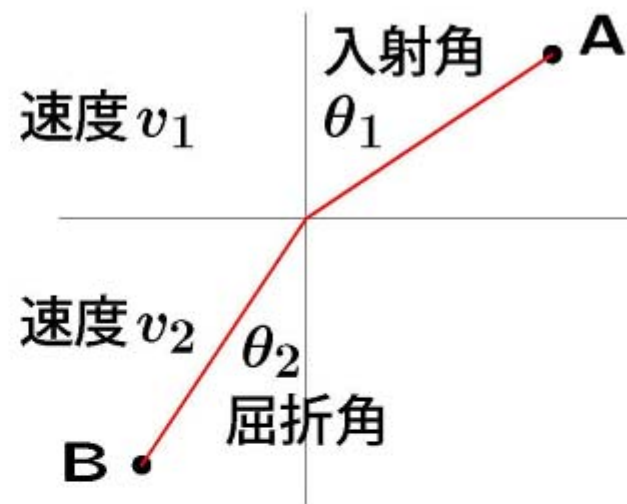
制約条件

$$(x_1, x_2, \dots) \in S$$



自然は最適を選ぶ 変分原理

スネルの法則: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$



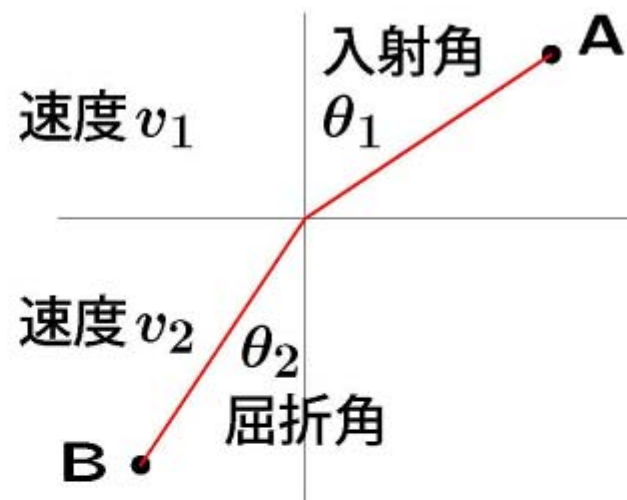
フェルマーの原理: 光は最短時間経路を進む

- 最小作用の原理: 運動経路 = 作用の最小化
- エネルギー原理: 平衡状態 = エネルギーの最小化

自然は最適を選ぶ 変分原理

スネルの法則: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$

● $f'(x) = 0$ の形



フェルマーの原理: 光は最短時間経路を進む

● $f(x) \rightarrow \min$ の形

- 最小作用の原理: 運動経路 = 作用の最小化
- エネルギー原理: 平衡状態 = エネルギーの最小化

人は最適を選ぶ 最適設計

+



0系 (1964)

+



300系 (1992)

+



700系 (1999)

写真提供: 鉄道総合技術研究所 佐川明朗氏

工学的な設計 = 性能 ↑ コスト ↓ の最適化

数式に表現する (モデリング)

⇒ 計算する ⇒ 実験する ⇒ 製造する

人は最適を選ぶ

最適意思決定

★
駒場から本郷まで
どう歩こうか？

(13.7 km)



Goo 地図

(C) 2005 NTT Resonant Inc.

(C) 2000-2005 ZENRIN DataCom CO.,LTD. ; (C) 2001-2005 ZENRIN CO., LTD.

現象と数理

物（もの）

現象・現実

理（こと）

数理・論理

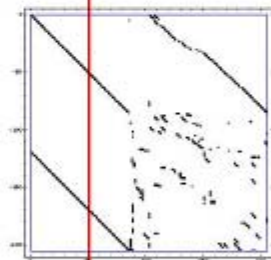
最適形状

共通の論理（行列）

新幹線

モデル化

数学モデル



行列のイメージ

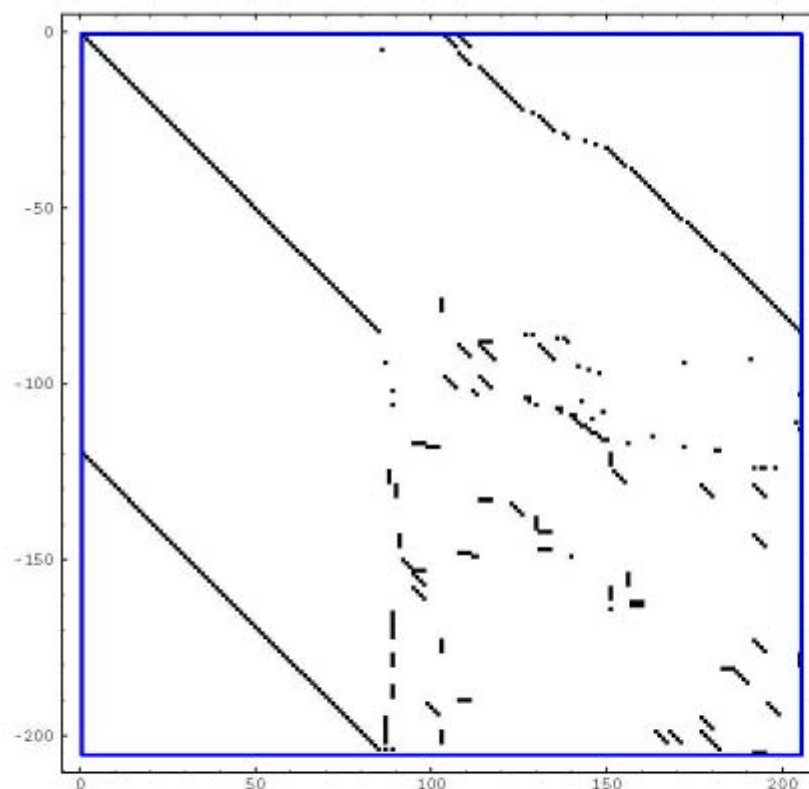
$n = ?$

数学の教科書

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

白いところは0 $\Rightarrow$
大規模・疎行列

工学の問題



最適化の世界

オペレーションズリサーチ (Operations Research)

数理計画法 (Mathematical Programming)

モデリング + 理論 + アルゴリズム

美しい数学

役に立つ数学

数理計画法の誕生

1947年 線形計画法

+



G. Dantzig
(1914~2005)

+



J. von Neumann
(1903~1957)

+

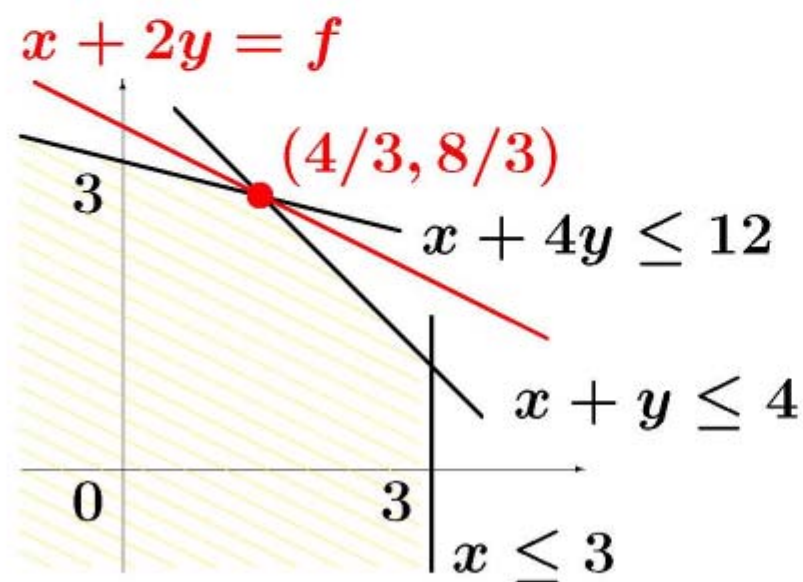


L. V. Kantorovich
(1912~1986)

<http://www2.informs.org/Press/GeorgeDantzig.jpg>
<http://phil.elte.hu/redei/Utrecht/UtrechtNeumann.html>
<http://www.matematycy.interklasa.pl/images/matematycy/kantorovich.jpg>

2変数の線形計画問題

Maximize	$x + 2y =: f$
subject to	$x + 4y \leq 12$
	$x + y \leq 4$
	$x \leq 3$



最適解 $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

最適値 $f = \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$

線形計画の一般形

Maximize $c^T x$
subject to $Ax \leq b$

Max. $x_1 + 2x_2$
s.t. $x_1 + 4x_2 \leq 12$
 $x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1 \leq 3$

モデリング : 線形近似でも実用上有用

理論 : 双対定理

アルゴリズム : 単体法

産業社会への応用 $\Leftrightarrow$ 線形代数の新展開

数学はどうやって創られてきたか？ の一例

線形計画法の双対性

— 転置行列の意味

主問題

$$\text{Max. } c^{\top} x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

双対問題

$$\text{Min. } b^{\top} y$$

$$\text{s.t. } A^{\top} y = c$$

$$y \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & 4y_1 + y_2 = 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

双対定理：主問題の最大値＝双対問題の最小値

双対問題を解いてみる

$$(u, v, w) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & 12u + 4v + 3w =: g \cdots (1) \\ \text{subject to} & u + v + w = 1 \cdots (2) \\ & 4u + v = 2 \cdots (3) \\ & u, v, w \geq 0 \cdots (4) \end{array}$$

$$(3) \rightarrow v = 2 - 4u \geq 0$$

$$(2) \rightarrow w = 1 - u - v = -1 + 3u \geq 0$$

$$(1) \rightarrow g = 12u + 4(2 - 4u) + 3(-1 + 3u) = \boxed{5 + 5u}$$

$$(4) \rightarrow \boxed{1/3 \leq u \leq 1/2}$$

$$\text{最適解} \quad (u, v, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \quad \text{最適値} \quad g = 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

双対問題を解いてみる

$$(u, v, w) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & 12u + 4v + 3w =: g \cdots (1) \\ \text{subject to} & u + v + w = 1 \cdots (2) \\ & 4u + v = 2 \cdots (3) \\ & u, v, w \geq 0 \cdots (4) \end{array}$$

$$(3) \rightarrow v = 2 - 4u \geq 0$$

$$(2) \rightarrow w = 1 - u - v = -1 + 3u \geq 0$$

$$(1) \rightarrow g = 12u + 4(2 - 4u) + 3(-1 + 3u) = \boxed{5 + 5u}$$

$$(4) \rightarrow \boxed{1/3 \leq u \leq 1/2}$$

$$\text{最適解} \quad (u, v, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \quad \text{最適値} \quad g = 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\boxed{\text{主問題の最大値} = 20/3 = \text{双対問題の最小値}}$$

最適化の発展 (連続変数)

1947年	線形計画	Dantzig
1960年	非線形計画, ニュートン法	Powell, Fletcher
1970年	凸解析・双対理論	Rockafellar
1979年	楕円体法	Khachiyan
1984年	内点法	Karmarkar
1995年	半正定値計画	Alizadeh, Nesterov, Nemirovski

理論： 線形／凸／非線形

環境： 計算パワーの増大

人は最適を選ぶ 最適意思決定 (再)

駒場から本郷まで
どう歩こうか？

(13.7 km)



Goo 地図

(C) 2005 NTT Resonant Inc.

(C) 2000-2005 ZENRIN DataCom CO.,LTD. ; (C) 2001-2005 ZENRIN CO., LTD.

計算 (computation)

- ・ 計算とは何か
- ・ 計算機の原理

計算 (アルゴリズム) の効率

情報 (information)

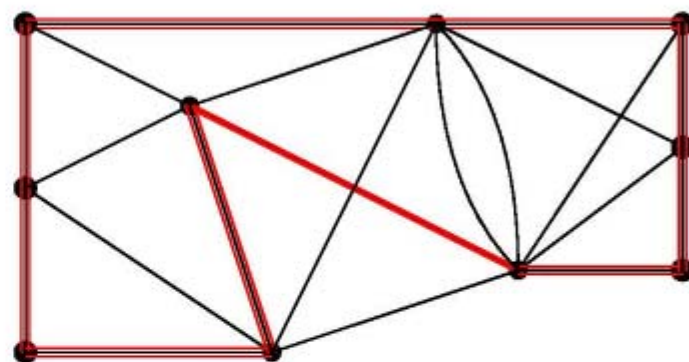
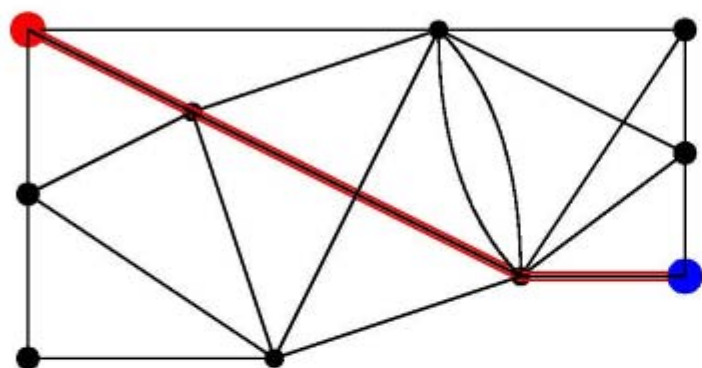
- ・ 情報の定量的扱い
- ・ サイバネティックス

計画・決定 (planning/decision)

- ・ 線形計画法
- ・ ゲーム理論

離散最適化

連続／離散



最短路問題

巡回セールスマン問題

簡単に解ける (経験的事実) なかなか解けない

P (アルゴリズム理論) NP 困難

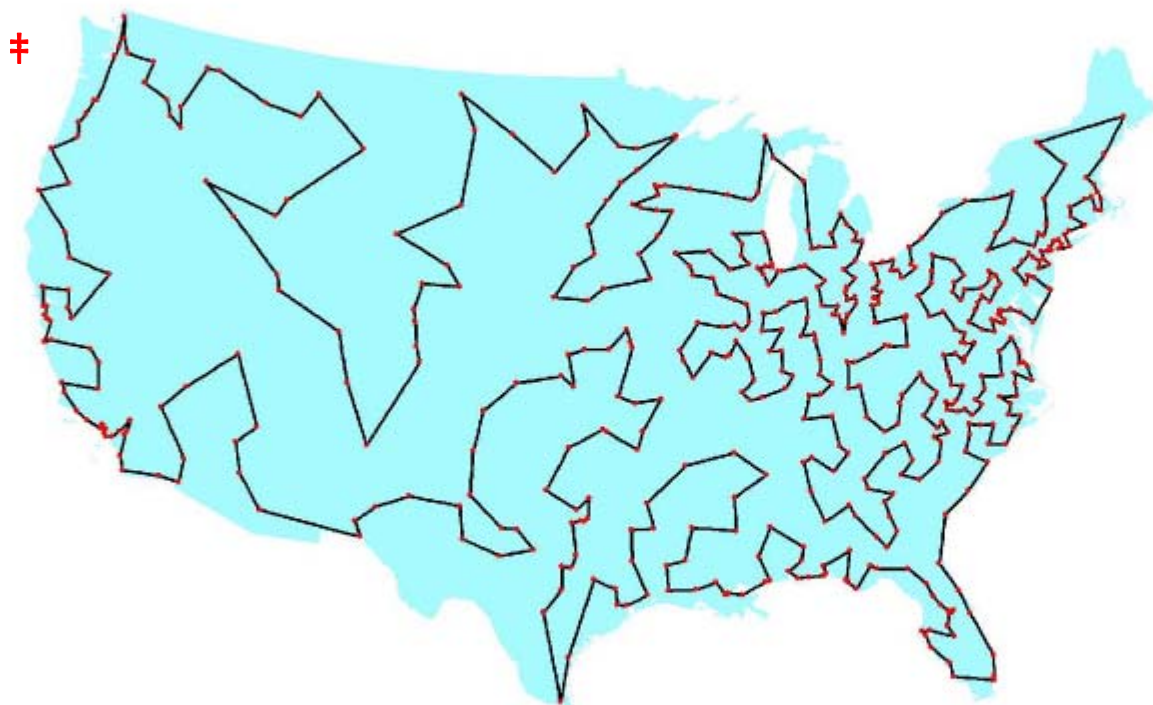
最 短 路 問 題

簡単に解ける

巡回セールスマン問題

なかなか解けない

⇒ デモ (土村展之氏作成)



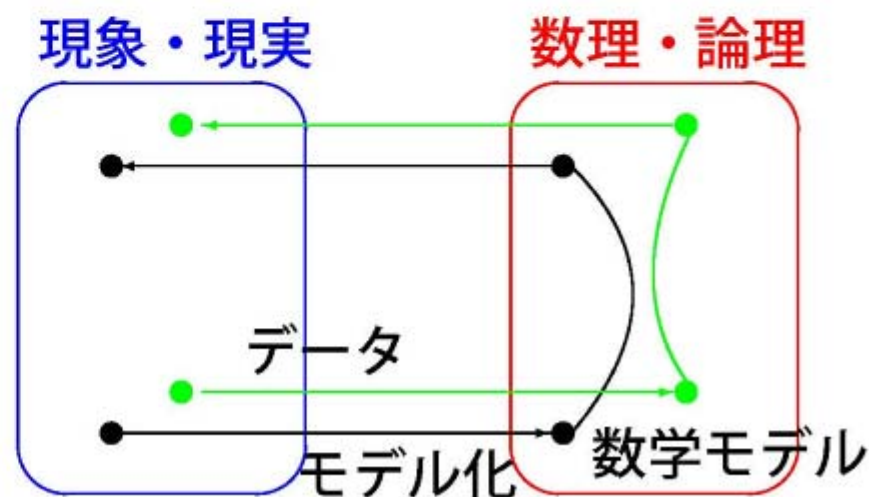
532 cities, M. Padberg–G. Rinaldi (1987)

<http://www.tsp.gatech.edu/history/pictorial/att532.html>

離散最適化理論の発展

1935年	●マトロイド	Whitney
1947年	線形計画法 (単体法)	Dantzig
1956年	ネットワーク・フロー	Ford, Fulkerson
1960年	整数計画法 (切除平面法)	Gomory
1970年	●NP完全性	Cook, Levin
	●グラフ・アルゴリズム	Tarjan
	劣モジュラ関数	Edmonds
1980年	楕円体法	Khachiyan
1995年	近似アルゴリズム	Goemans, Williamson
2000年	離散凸解析	Murota

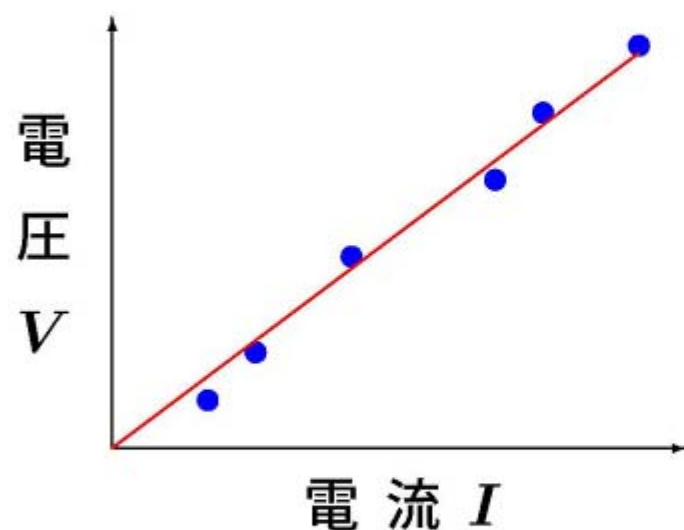
3. モデルとデータ



モデルとデータ

(現象 $\leftrightarrow$ 数理)

$$V = RI \text{ (オームの法則)}$$



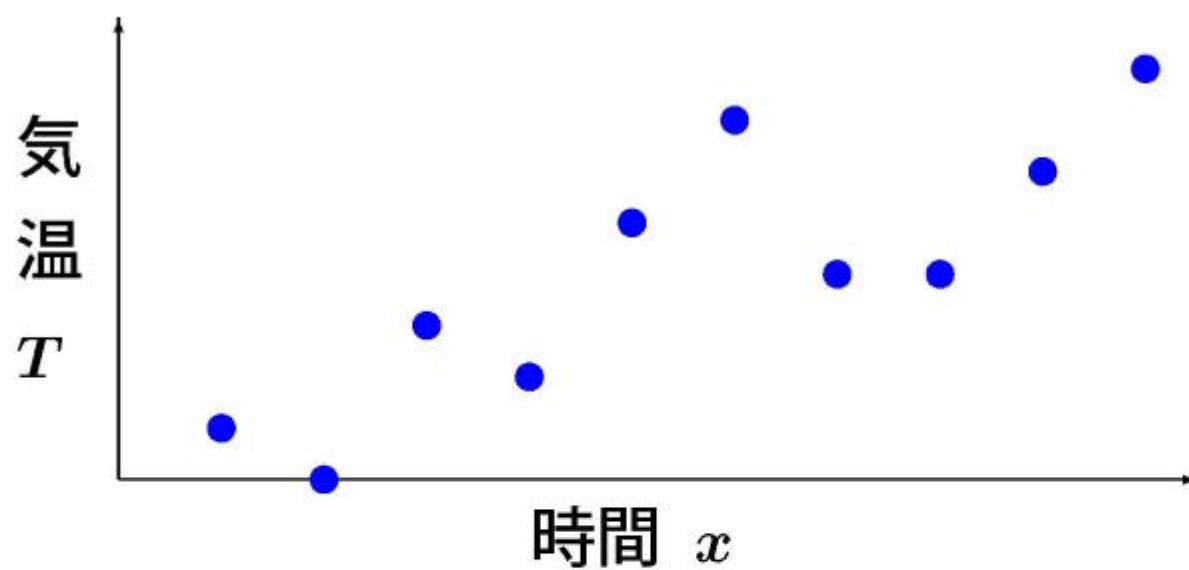
実験して

観測データを集めて

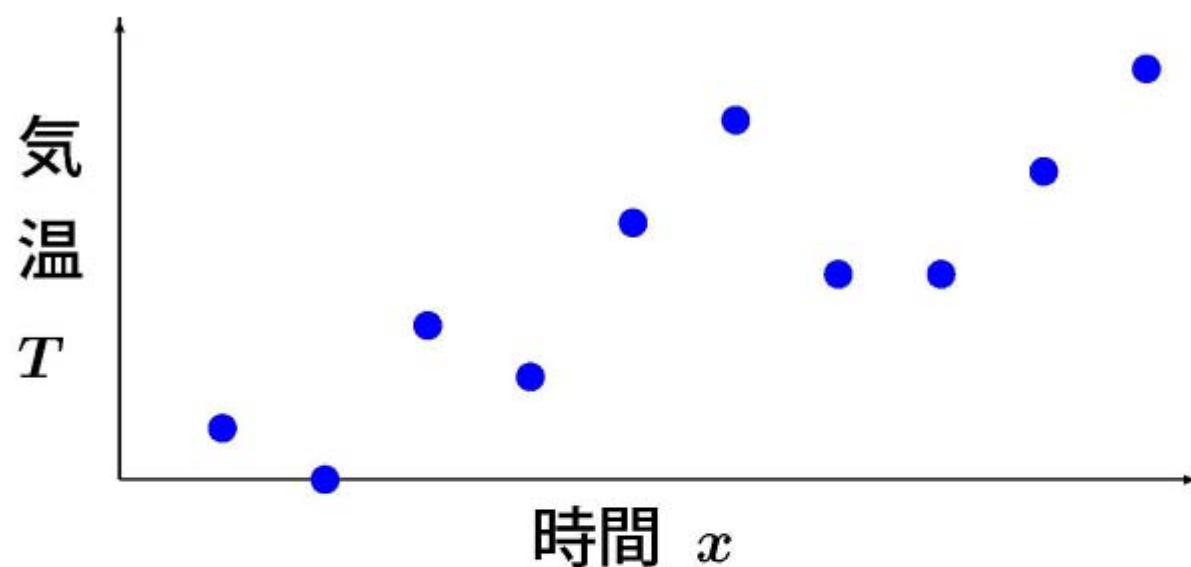
真のモデルを求める

最小2乗法 (Gauss) : $f(R) = \sum_i (V_i - RI_i)^2 \rightarrow \min$

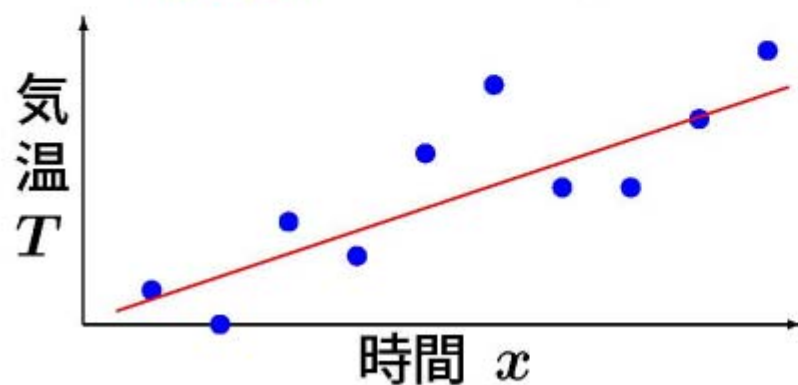
モデルのあてはめ



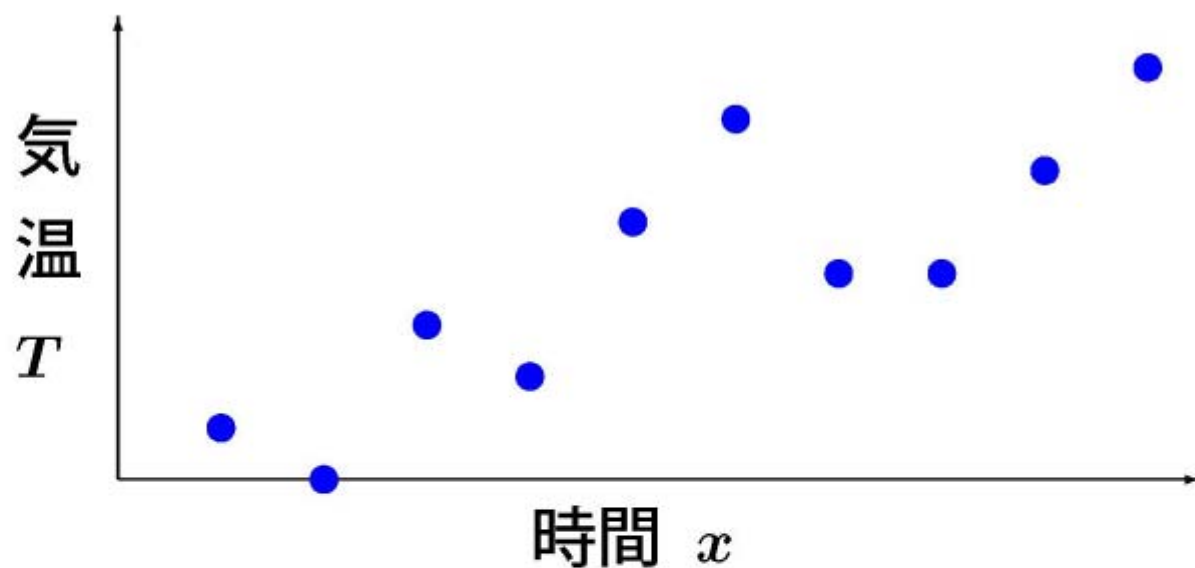
モデルのあてはめ



1次式 $T = ax + b$

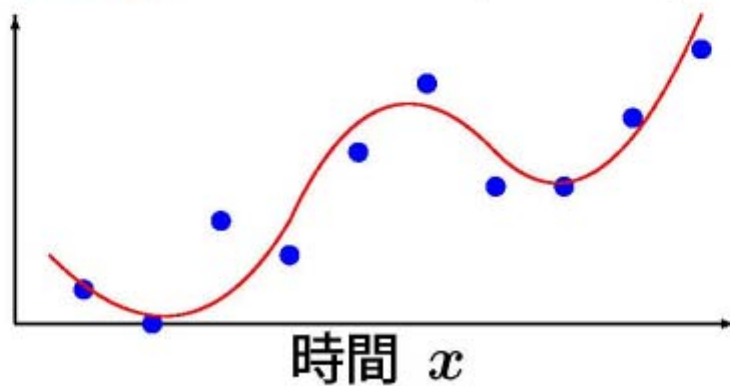
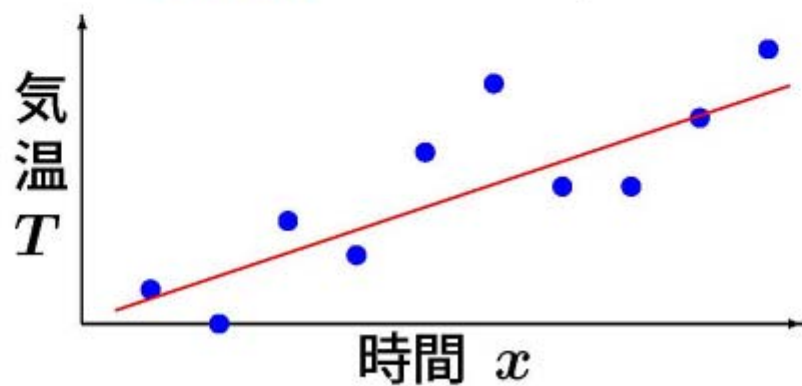


モデルのあてはめ



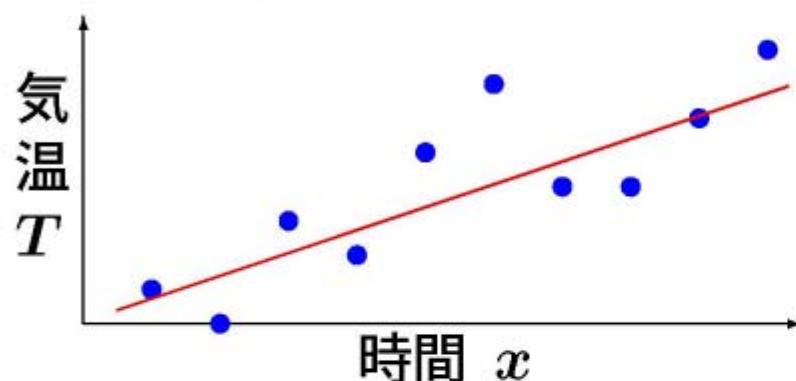
1次式 $T = ax + b$

4次式 $T = ax^4 + bx^3 + \dots$

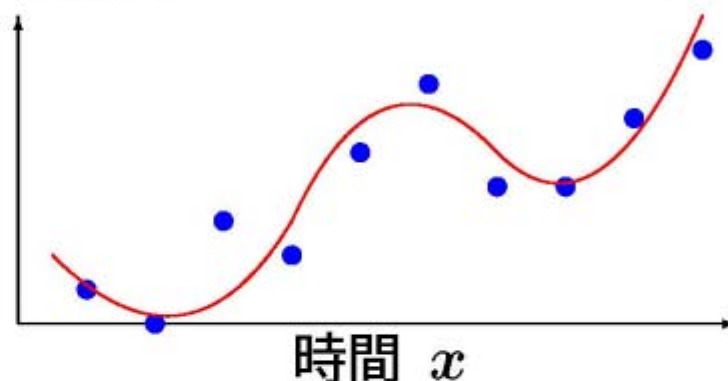


モデルの適切さ

1次式 $T = ax + b$



4次式 $T = ax^4 + bx^3 + \dots$



複雑なモデルは ● データに適合する (過去の説明)
● 誤差に弱く不安定 (将来の予測)

データへの適合性



モデルの単純性

情報量規準

赤池情報量規準

(Akaike Information Criterion)

(データへの適合性)

(モデルの単純性)

$$AIC = -2(\text{対数尤度}) + 2(\text{パラメータ数})$$

1974年 赤池弘次

(1927~2009)

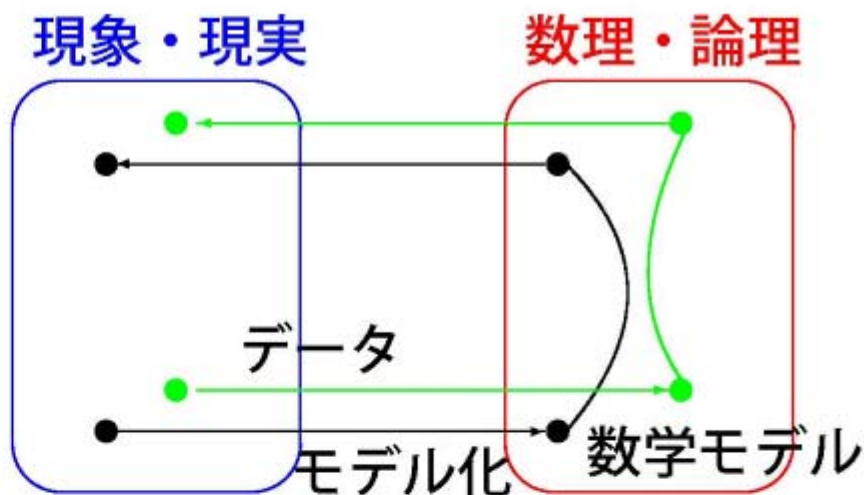
⇒ 情報幾何学
(甘利俊一)

モデルの意味

モデルは

● 現実と数理の架け橋

● 一意に決まらない



自然科学(理学):

真のモデル

自然の真の姿の正しい記述

技術科学(工学):

適切なモデル

目的を実現するための道具

⇒ モデリングの科学

データの質的变化

今まで

実験・観察で作り出す

農業試験

実験計画法（データ取得法）

分散分析（データ分析法）

今（ネット時代）

何処からか集めてくる

検索エンジン

（Yahoo! Google）

分散的蓄積（情報爆発）

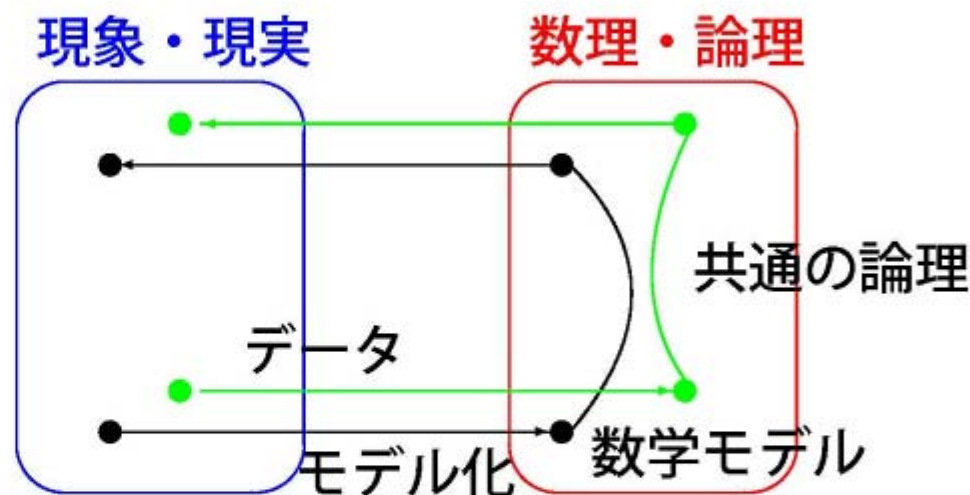
データマイニング

基礎数理：線形代数（固有値），確率の考え方…

まとめ： 数学 <数理工学> 社会

技術の数理

- 計算
- 情報
- 計画・決定



最適化の数理

モデリング + 理論 + アルゴリズム

モデルの意味・データの変容

参考文献

技術の数理・応用の数理

杉原正顯, 杉原厚吉 他: 数理工学最新ツアーガイド

ー 応用から生まれつつある新しい数学, 日本評論社, 2008

合原一幸 他: 社会を変える驚きの数学, ウェッジ選書, 2008

木村英紀: ものづくり敗戦, 日経プレミアムシリーズ, 2009

最適化の数理

今野浩: 最適化時代の旗手: 21世紀のOR, 日科技連出版社, 2007

室田一雄: 離散凸解析の考えかた, 共立出版, 2007

モデルとデータ

赤池弘次, 甘利俊一 他: 赤池情報量規準 **AIC**

ー モデリング・予測・知識発見, 共立出版, 2007

次回は ...