

# 学習と教育の心理学

—視覚化による理解と問題解決—



市川伸一（教育学部教育心理学コース）



# わり算の2つの意味

**等分除**: 全体数と単位の数から1単位あたり数を求める

**包含除**: 全体数と1単位あたり数から単位の数を求める

12個のクッキーを3人で同じ数ずつ分けると1人分は何個か

$$12 \div 3 = 4$$

12個のクッキーを4個ずつ分けると何人に分けられるか

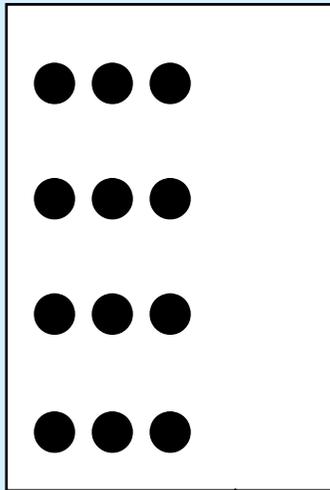
$$12 \div 4 = 3$$

もともとは、 $3 \times 4 = 12$  というかけ算 ……わり算はかけ算の反対

# アレー図

3人

1人分4個



全部で12個

# 面積図

単位の数

1単位あたり数



全体数



# ツルカメ算を面積図で解く

ツルとカメが合わせて16匹います。足の数は、合わせて40本です。ツルとカメは、それぞれ何匹ずついるでしょう。

- ・ まず、方程式を使わずに、「すべてをツルとみなすと」と考えてみよう。
- ・ 面積図を使って解いてみよう。
- ・ 連立方程式で解いてみよう。
- ・ 連立方程式の解法と面積図を対応させてみよう。



## これもツルカメ算？

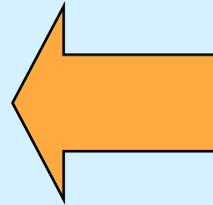
マラソンの42キロを、時速4キロで歩くのと、時速12キロで走るのをまぜながら、6時間で完走したいと思います。歩く時間と走る時間は、それぞれどれだけになるでしょう。

- ・ 面積図を使って解いてみよう。
- ・ 連立方程式で解いてみよう。
- ・ チャレンジ課題：横軸をスタートからの時間、縦軸をスタートからの距離としてグラフにし、ここから解いてみよう。

本日の中心課題：事後確率の推定問題

事前確率  $P$

確率の更新



情報

事後確率  $P'$



# カセットテープ問題

テープ1: サザン / SMAP  
テープ2: サザン / サザン

ランダムに選択

サザン

「テープ1である確率は $1/2$ 」と考える人の理由  
「サザンがはいったのは2つ。そのうちの1つだから」  
「サザンは、両方にあるので情報にならない」

数理的な「正解」は、 $1/3$

反復実験してみる

ベイズの定理を使う

# カセットテープ問題のベイズ解

$$P' = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1} = \frac{1}{3}$$

テープ1      サザン      テープ2      サザン



# 感染者問題

1000人に1人の  
割合で感染

感染の場合  
98%が陽性、2%が陰性  
非感染の場合  
99%が陰性、1%が陽性

検査薬

陽性

多くの人の直観的な判断

「感染している確率は98%以上」

「精度の高い検査薬だから」

ベイズの定理による数理的な解は、0.089

## 感染者問題のベイズ解

$$0.001 \times 0.98$$

$$P' = \frac{0.001 \times 0.98}{0.001 \times 0.98 + 0.999 \times 0.01}$$

↓                  ↓  
感染                  陽性反応                  ↓                  ↓  
非感染                  陽性反応

$$= 0.089$$

直観解よりはるかに小さい！（事前確率の無視）



## 3囚人問題

3人の囚人A, B,  
Cのうち1人だけ恩赦

Aが看守に質問

Bは処刑  
されるよ

自分以外の2人のうち、少なくとも1人は必ず処刑されるはず。1人の名前を教えてくださいよ。

仮定

- 1) 看守はうそをつかない。
- 2) 両方とも処刑される場合は、ランダムにどちらかの名前を言う。

# 3囚人問題(原版)のベイズ解

$$P' = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

A恩赦                  B恩赦                  C恩赦

# 3囚人問題(変形版)のベイズ解

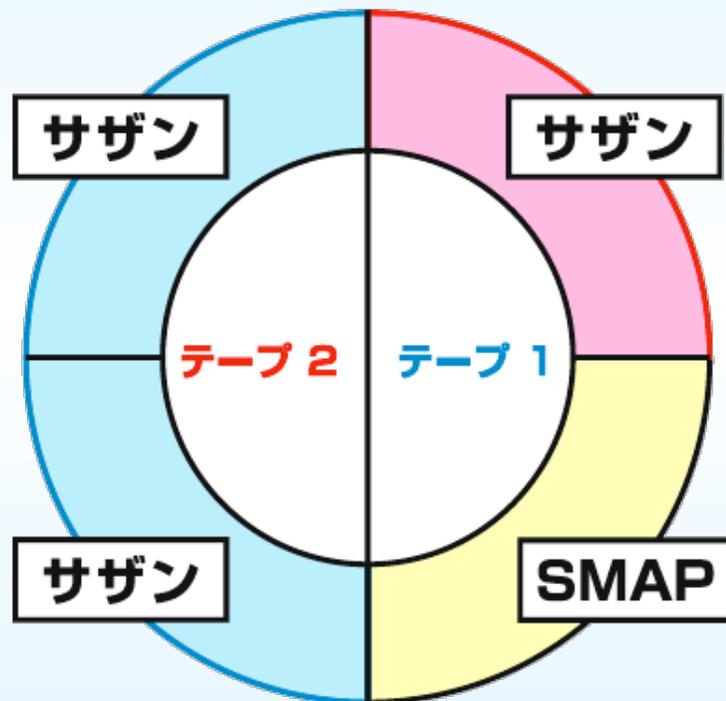
$$P' = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1} = \frac{1}{5}$$

↓ A恩赦      ↓ B恩赦      ↓ C恩赦

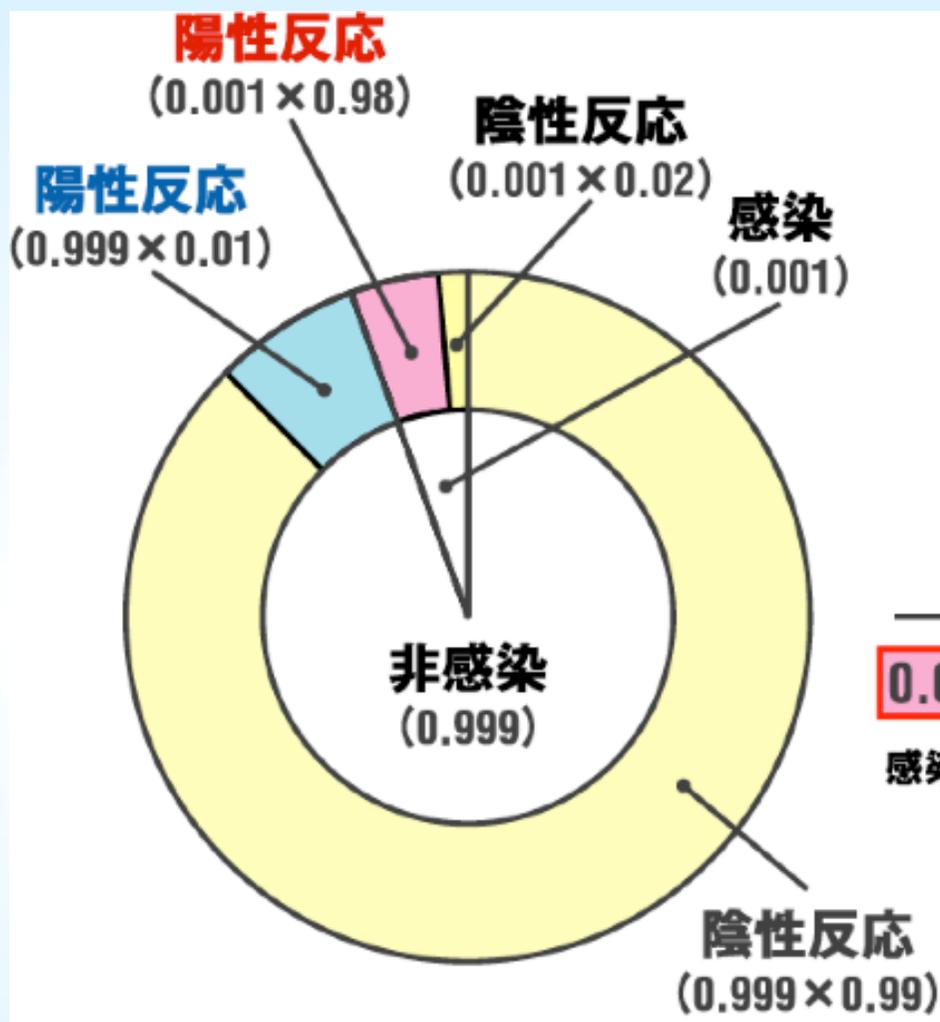
# カセットテープ問題のルーレット表現

テープ2のサザン

テープ1のサザン



$$\frac{\begin{array}{c} \text{テープ1のサザン} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{array}}{\begin{array}{c} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \\ \text{テープ1のサザン} \quad \text{テープ2のサザン} \end{array}} = \frac{1}{3}$$

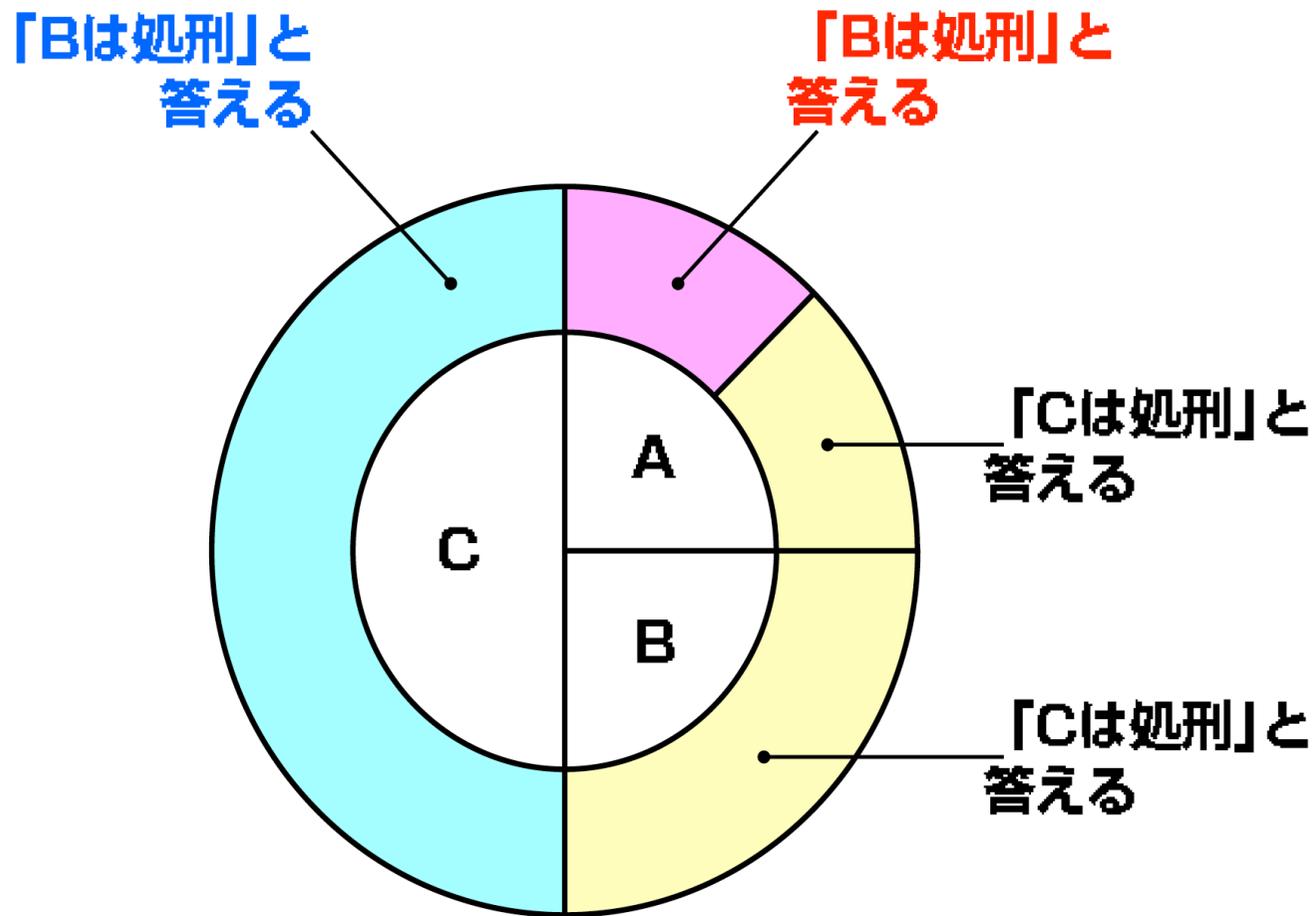


感染者問題に対する  
ルーレット表現

感染で陽性反応

$$\frac{0.001 \times 0.98}{0.001 \times 0.98 + 0.999 \times 0.01} = 0.089$$

感染で陽性反応    非感染で陽性反応



変形3囚人問題に対する  
ルーレット表現

## 確率に対する素朴なスキーマとヒューリスティック

$$\text{確率} = \frac{\text{注目する事象}}{\text{事象全体}}$$

$$\text{条件付き確率} = \frac{\text{条件を満たすものの中で注目する事象}}{\text{条件を満たす事象}}$$

確率を求めるには・・・数えて割る (Counting and Dividing)



## 3囚人問題研究の展開とまとめ

市川(1997)『考えることの科学—推論の認知心理学への招待—』(中公新書)

市川(1998)『確率の理解を探る—3囚人問題とその周辺』(共立出版)

3囚人問題の難しさの所在

事後確率推定の心理プロセス

素朴スキーマとCDH

有効な同型図式の特徴と応用

量的表示と操作容易性

究極の難問づくり

目隠し抽選会問題