俯瞰講義

ファイナンスの数学

第１０回

伊藤解析とファイナンス

マルコフ過程とは

全國紙上數學談話會
第244號
昭和十七年十一月二十日

1077.	Markoff過程ヲ定メル微分方程式	伊藤清(1352)
1078.	一般タウバー型定理ノ環論的証明	深宮政範(1402)
1079.	Wimannノ定理ニツイテ	有馬喜八郎(1406)

編輯者　大阪市北區　大阪帝國大學理學部數學教室
發行所　同　前
振替口座番號　大阪一七七四二番
大阪市北區
大阪帝國大學理學部數學教室　清水辰次郎

1077. Markoff過程ヲ定メル微分方程式

伊藤　清（内閣統計局）

ハシガキ

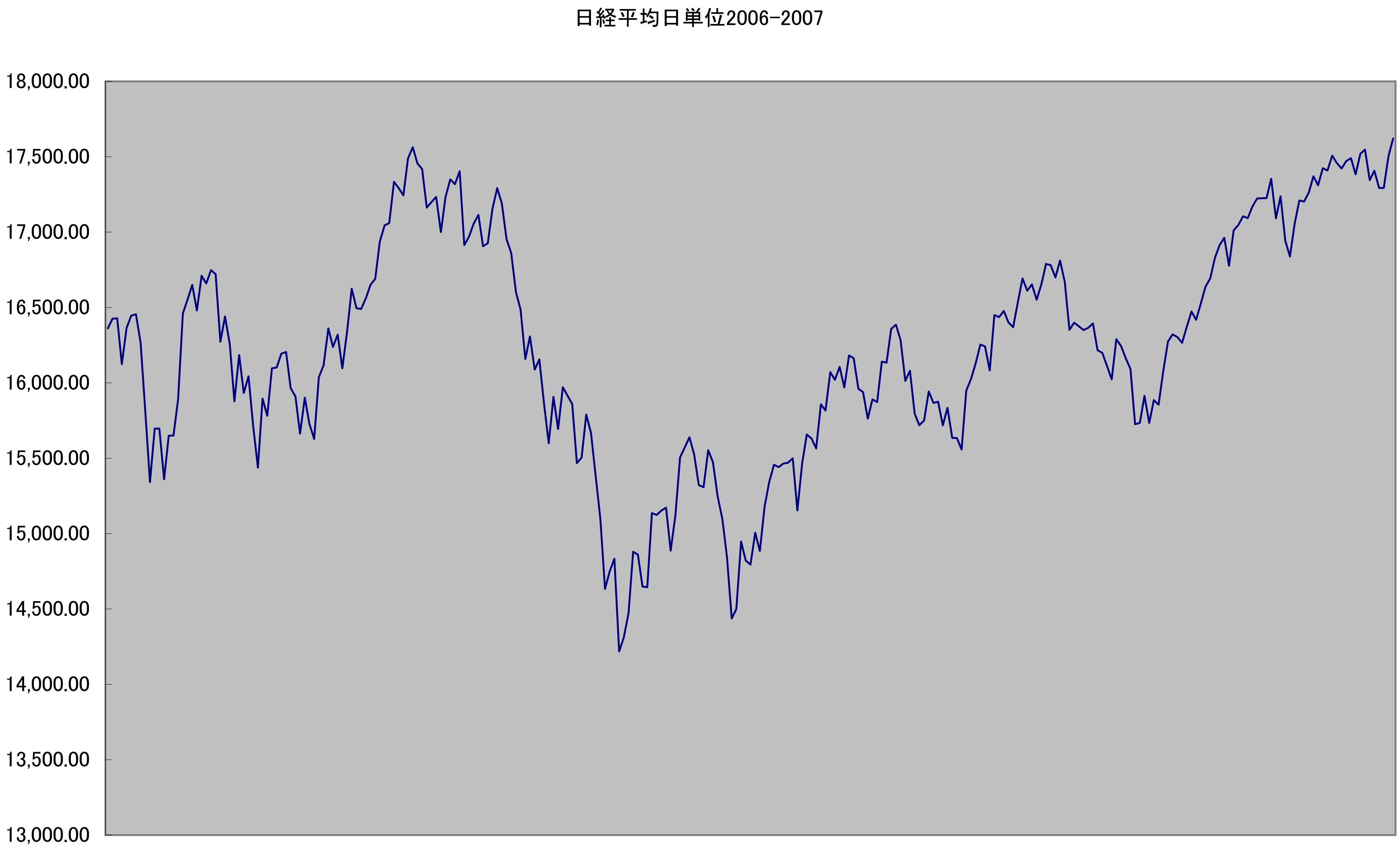
(I) 有限個ノ可能ナ場合 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_m$ ヲ有シ、自然数ヲ径数トスル simple Markoff process $x_1, x_2, \cdots\cdots$ ニ関シテ、多クノ遷移確率ヲ考ヘルコトが出来ル。例ヘバ $x_k = a_i$ ナル條件ノ下ニ於ケル $x_2 = a_j$ ノ確率、或ハ $x_1 = a_{i_1}$, $x_2 = a_{i_2}, \cdots\cdots, x_n = a_{i_n}$ ナル條件ノ下ニ於ケル $x_{n+1} = a_{i_{n+1}}$ トナル確率等々。シカシ乍ラソレ等ハ結局 $x_k = a_i$ ノ時ノ $x_{k+1} = a_j$ ナル確率 $p_{ij}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \cdots\cdots, i, j = 1, 2, \cdots\cdots m$) ニ帰着セラレル。コレハ Kolmogoroff ノ本[*1]ニモ書イテアル。以後コレヲ基本的ナ遷移確率ト呼バウ。

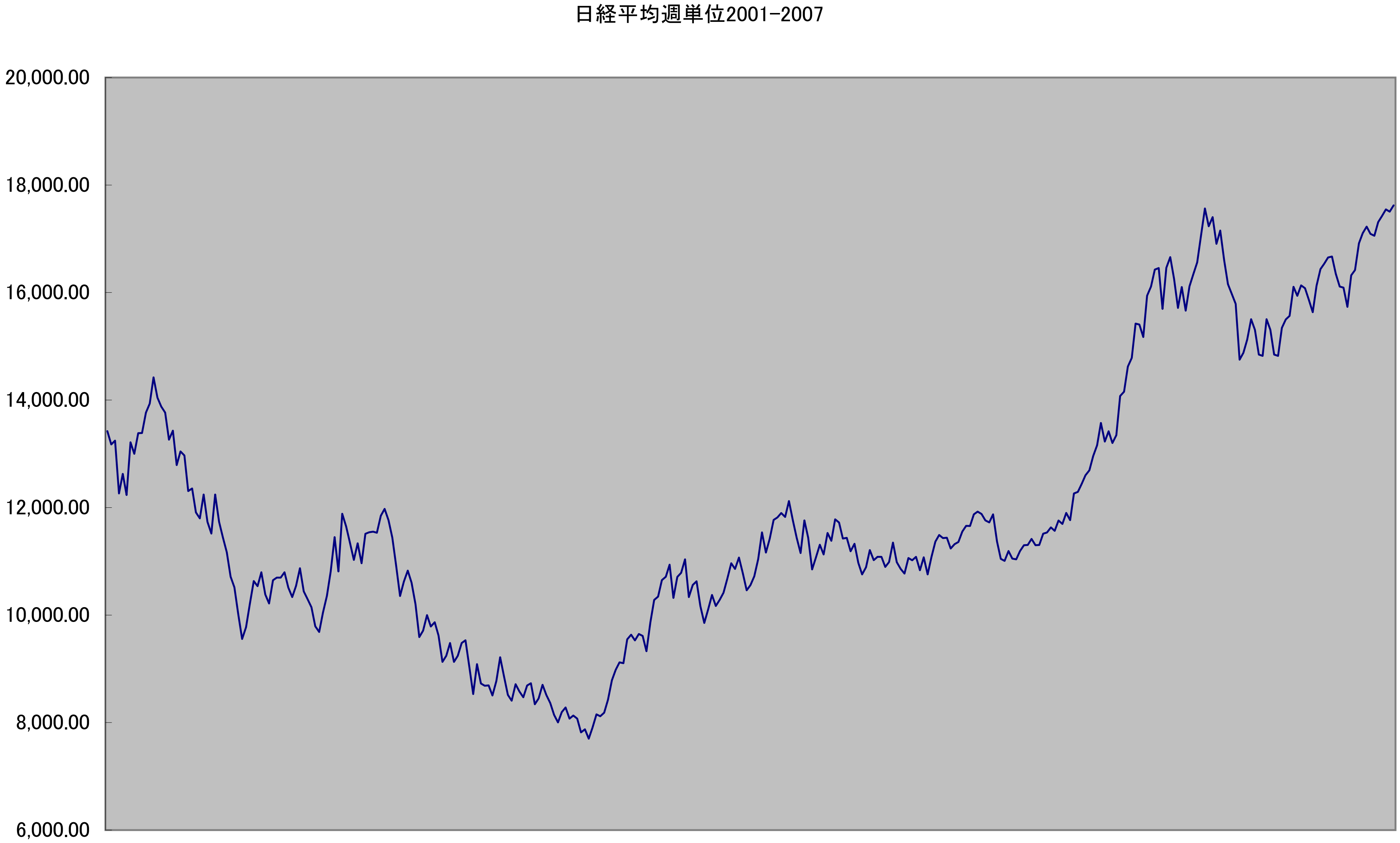
更ニ可能ナ場合が有限デナクトモ、例ヘバ実数ヲ以テ標識ヅケラレル時ニハ、同ジコトがイヘルノハ云フマデモナイ。

併シナガラ係数が自然数デナクテ、実数ノ場合即チ continuous parameter ニ依存スル Markoff process ニ於テ、上ノコトハ如何ニナルカトイフコトハソレ程簡単デハナイ。[*2]

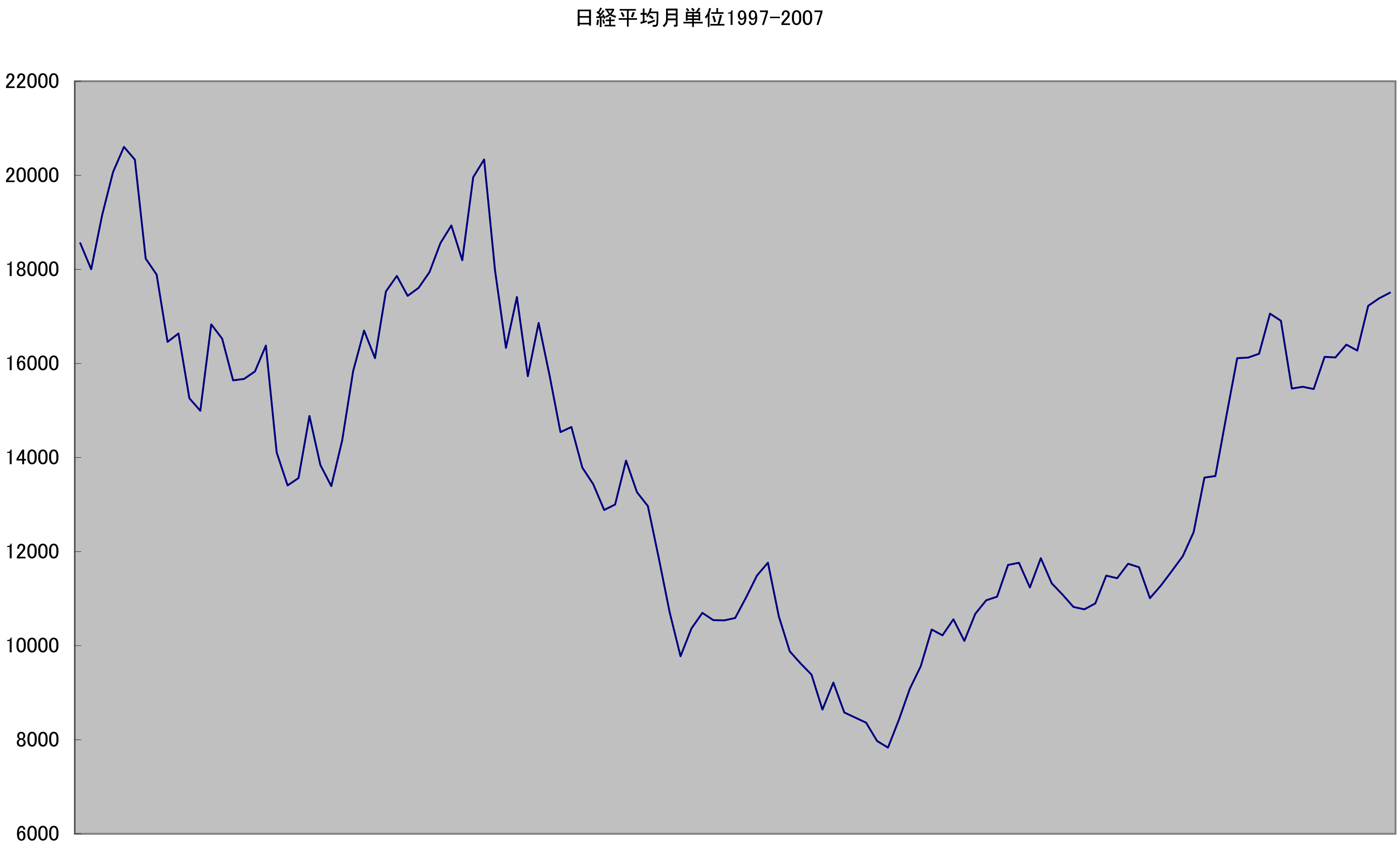
更ニ一般ニ可能ナ場合が実数ニヨリ標識付ケラレ、且ツ continuous parameter ニ依存スル simple Markoff

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた
図版を省略させていただきます。


日経平均日単位2006-2007
18,000.00
17,500.00
17,000.00
16,500.00
16,000.00
15,500.00
15,000.00
14,500.00
14,000.00
13,500.00
13,000.00



日経平均週単位2001-2007
20,000.00
18,000.00
16,000.00
14,000.00
12,000.00
10,000.00
8,000.00
6,000.00


日経平均月単位1997-2007
22000
20000
18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000

確率過程モデル

偶然に支配され刻一刻変化するもの

マルコフ過程モデル

最も重要な確率過程モデル

マルコフ過程

1． 時間：離散　空間：離散

2． 時間：離散　空間：連続

3． 時間：連続　空間：離散

4． 時間：連続　空間：連続

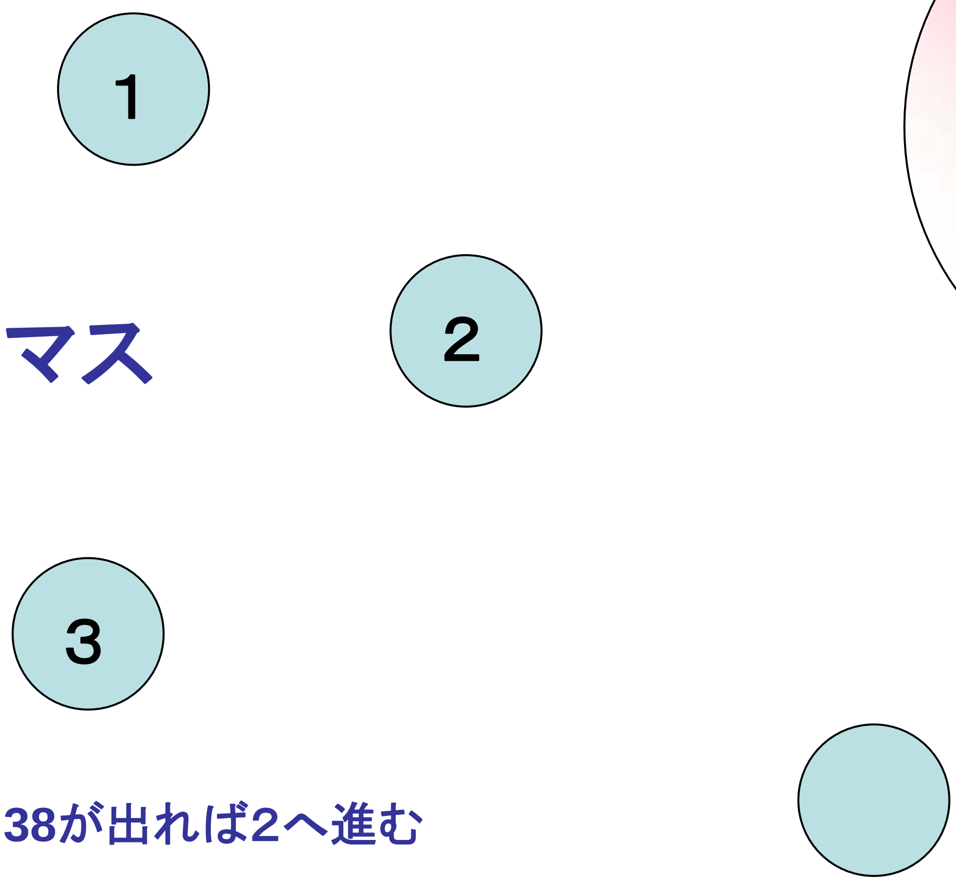
ジャンプで動く場合

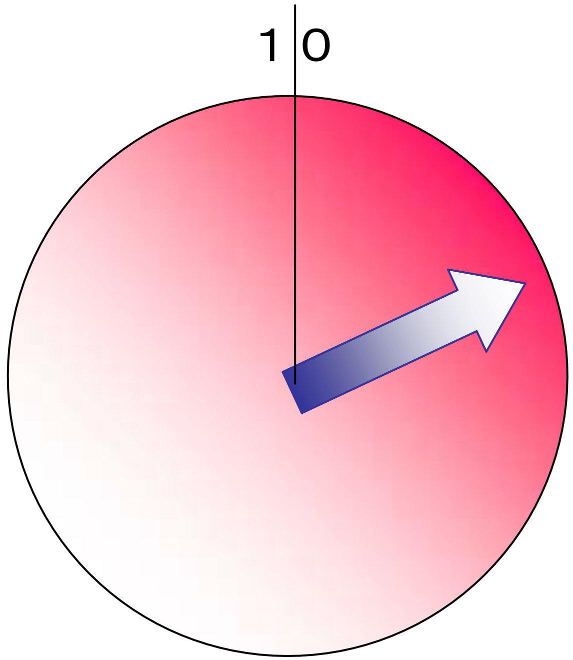
連続的に動く場合

1． 時間：離散　空間：離散

一人すごろく

1人すごろく





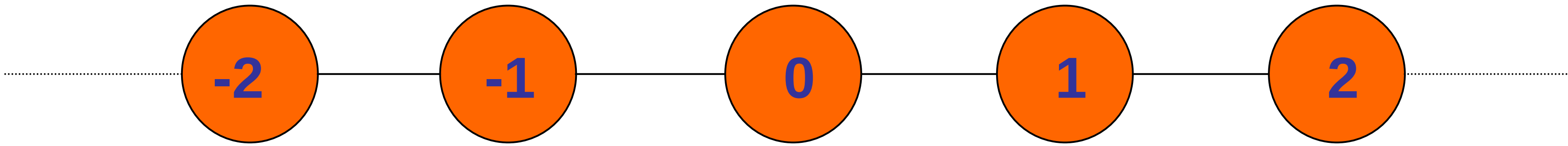
回転板

0.0-0.38が出れば2へ進む

0.38-0.9が出れば5へ進む

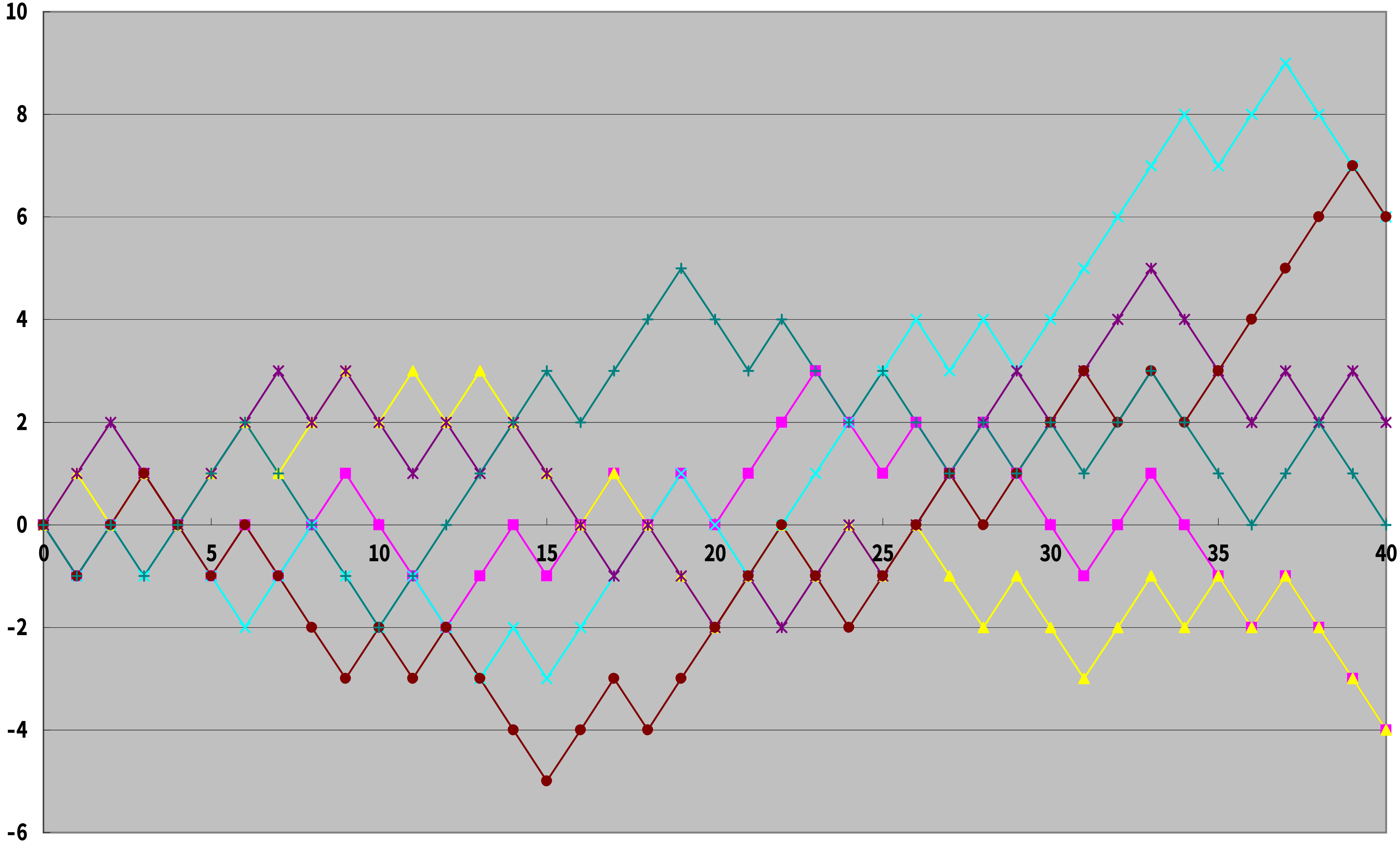
0.9-1.0が出ればそのまま動かない

ランダムウォーク



0.0-0.5 が出たら右へ一つ移動

0.5-1.0 が出たら左へ一つ移動


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
5
10
15
20
25
30
35
40

応用に使われる例：行列の長さ「待ち行列の理論」

スーパーでレジをいくつあけるか

スーパーマーケットのある時間帯にレジを何台あけるべきか

多くあければレジに並ぶ客の列は短くなるが、人件費等のコストがかかる

少ないと列が長くなりすぎて、客が来なくなり、売り上げが落ちる

最適なレジの数はいくらか

最も単純なモデル

レジ：単位時間あたりに１人の客の用を処理できる

ある時間帯では、単位時間あたりにあらたな客が１人か２人来る

客が１人または２人来る確率

p, q ($p, q > 0, \quad p + q < 1$)

明らかなこと

2台レジをあければ列はできない

来る客の平均人数 $p + 2q > 1$ の時、
レジ1台ならば列がどんどん長くなる

$p + 2q < 1$ の時、

レジ1つ：行列の長さはどれくらい？

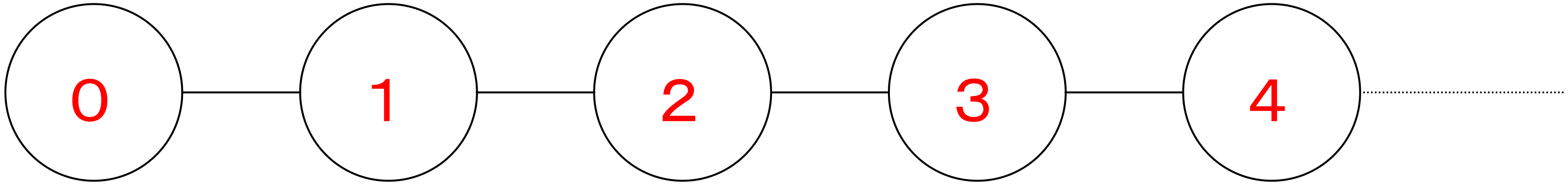
１人すごろく

マス： $n = 0, 1, 2, \ldots$
待っている人の人数

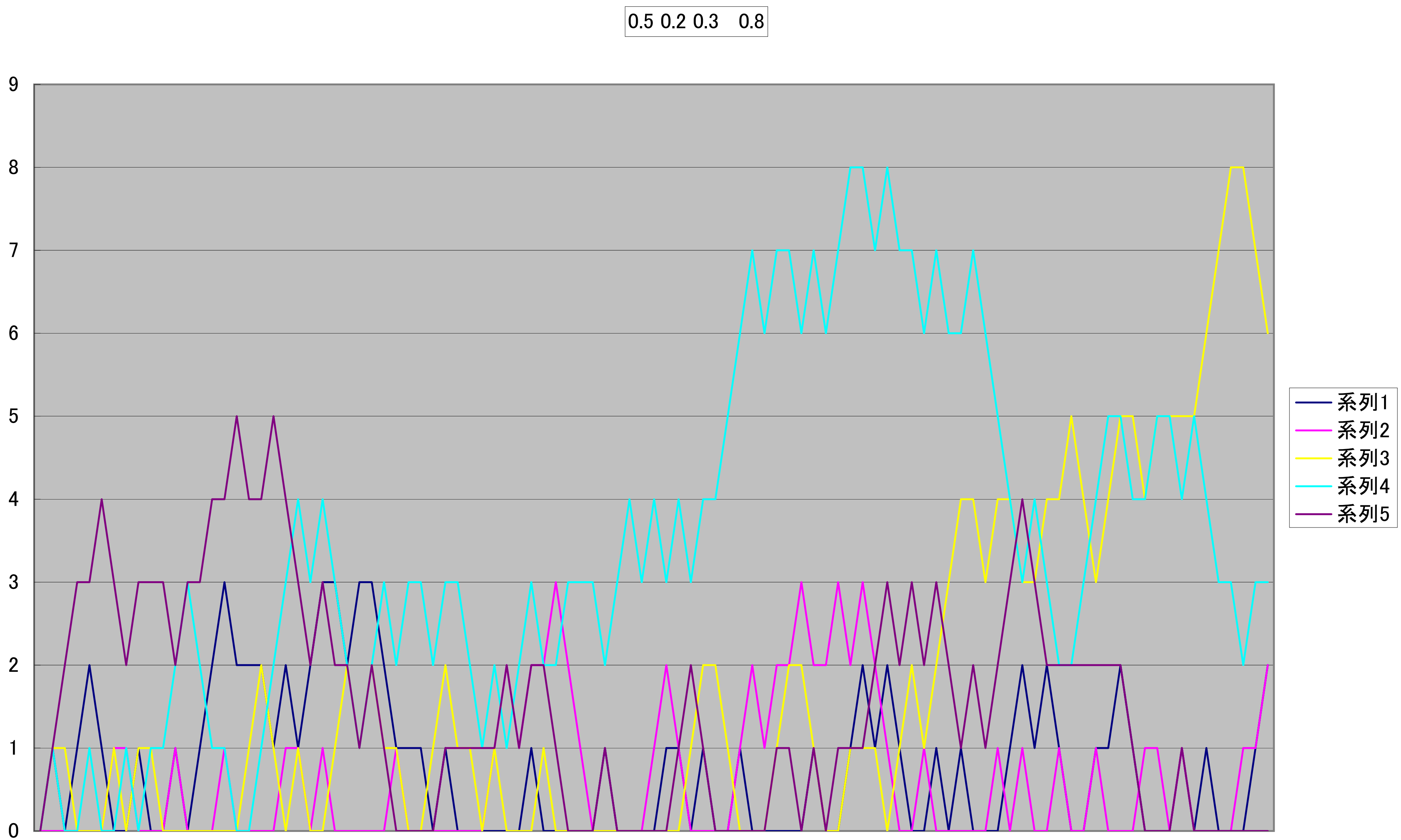
マス n （ n は 0 でない）
$\Rightarrow$ 確率 q で $n+1$
確率 p で n
確率 $1-p-q$ で $n-1$

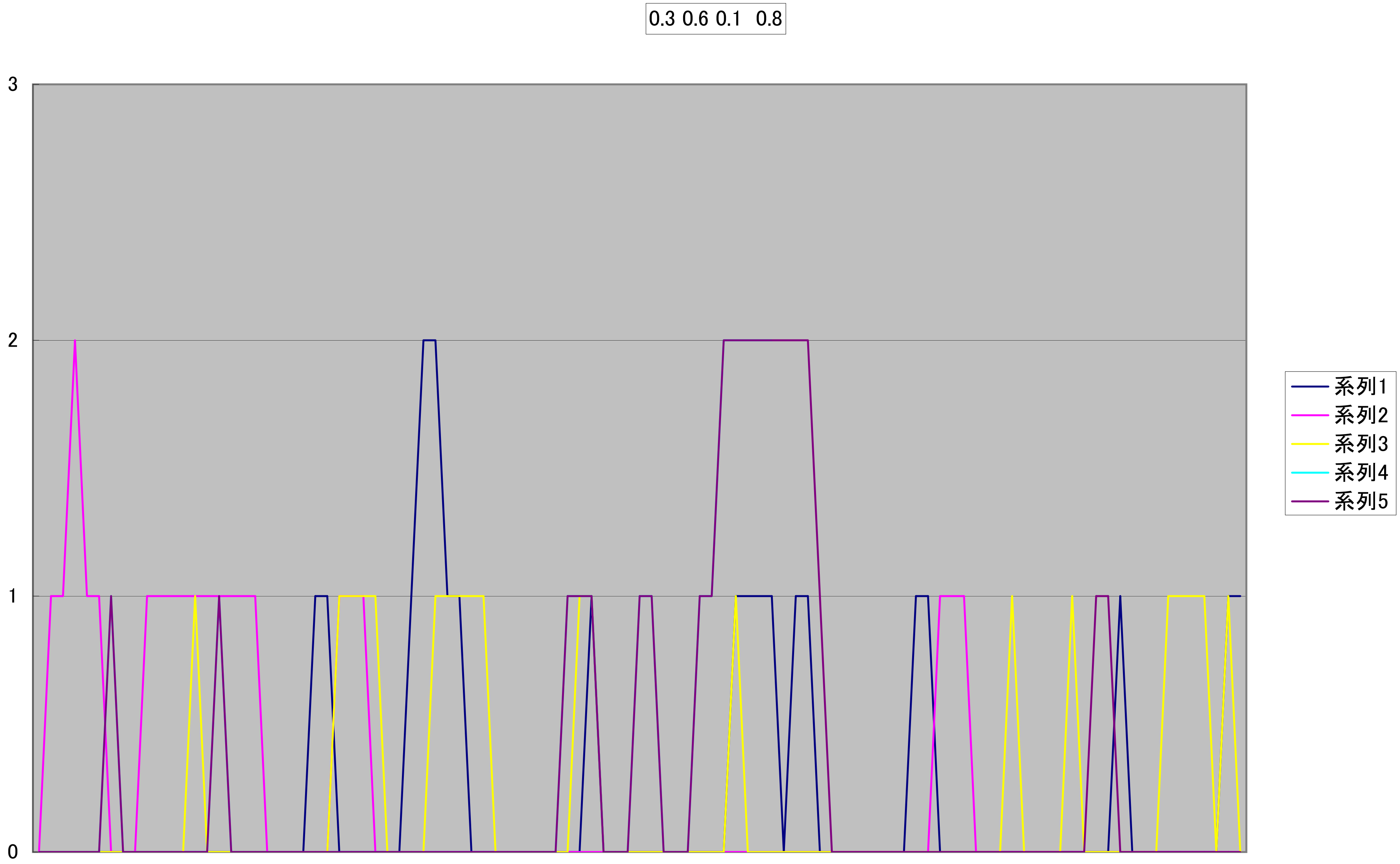
マス 0
$\Rightarrow$ 確率 q で 1
確率 $1-q$ で 0

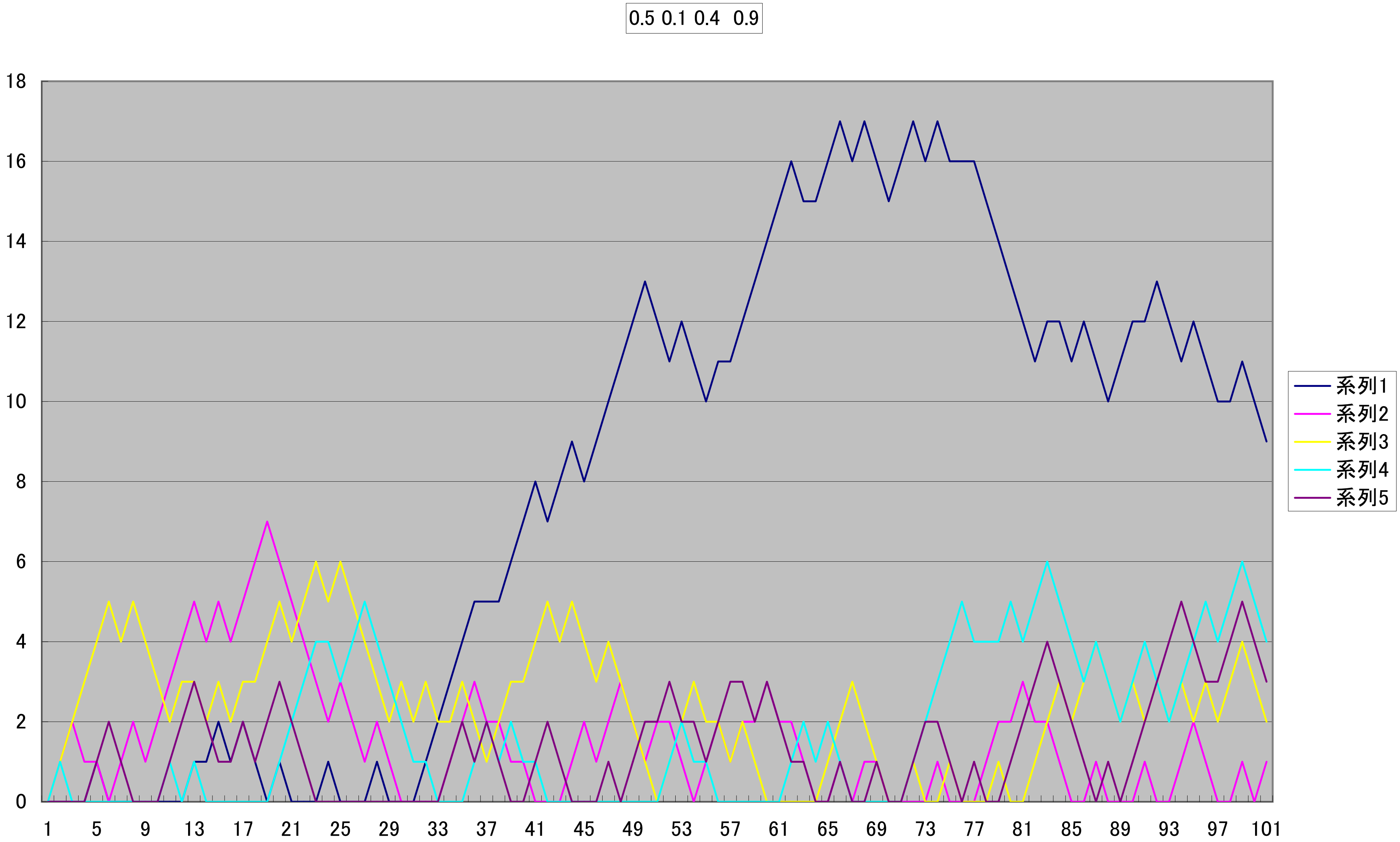
待ち行列すごろく



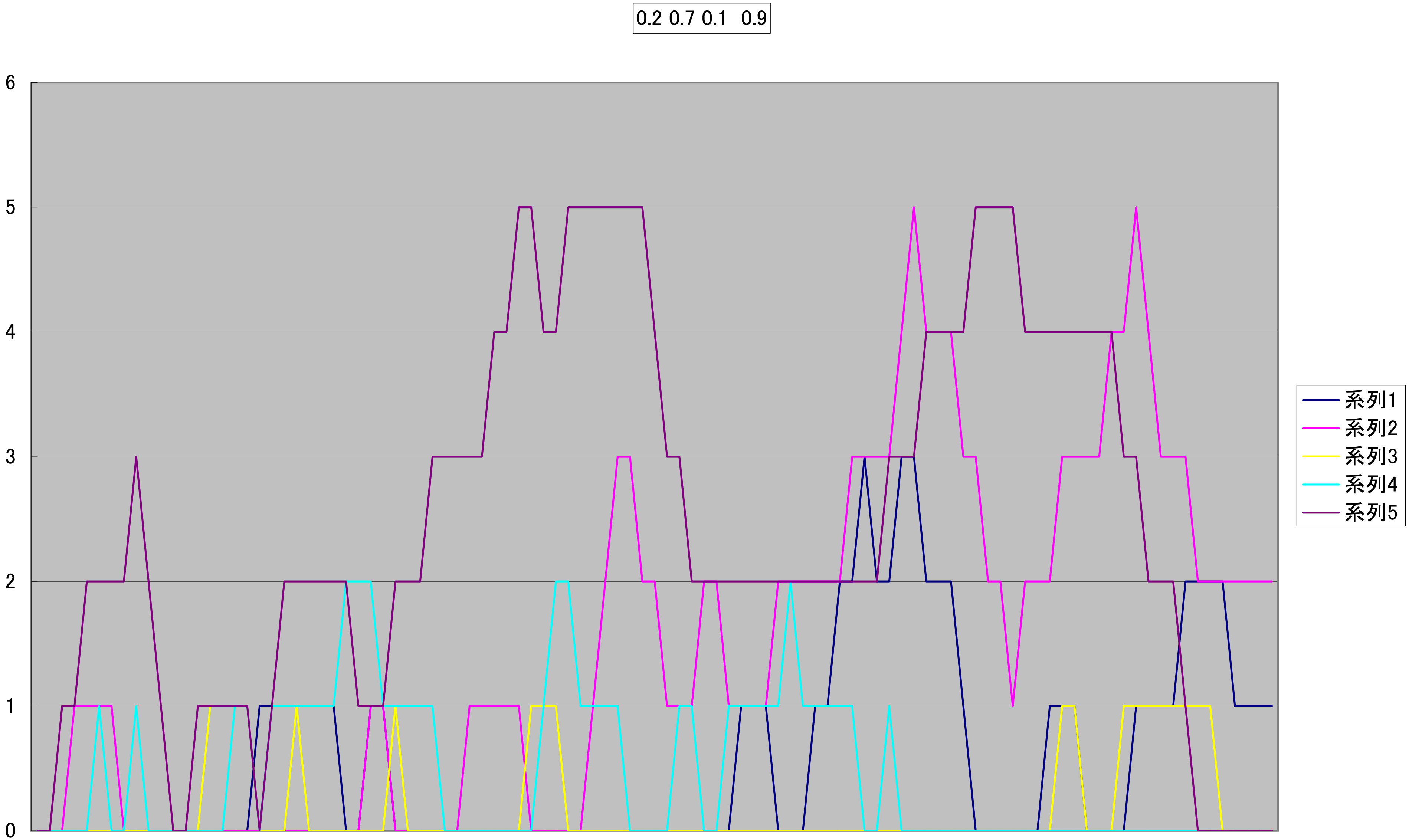
待っている人数


0.5 0.2 0.3 0.8
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
系列1
系列2
系列3
系列4
系列5


0.3 0.6 0.1 0.8
3
2
1
0
系列1
系列2
系列3
系列4
系列5



0.5 0.1 0.4 0.9
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
5
9
13
17
21
25
29
33
37
41
45
49
53
57
61
65
69
73
77
81
85
89
93
97
101
系列1
系列2
系列3
系列4
系列5


0.2 0.7 0.1 0.9
6
5
4
3
2
1
0
系列1
系列2
系列3
系列4
系列5

長時間たった時の列の長さ

平均の長さ $M = \frac{q}{1-(p+2q)}$

n 人以上の長さとなる確率 $(\frac{M}{M+1})^n$

$M = 4$　１０人以上いる確率 $\geqq 0.1$

$M = 1.5$　4 人以上いる確率 $\geqq 0.12$

窓口が 1 の時は容易な計算で答えがわかる

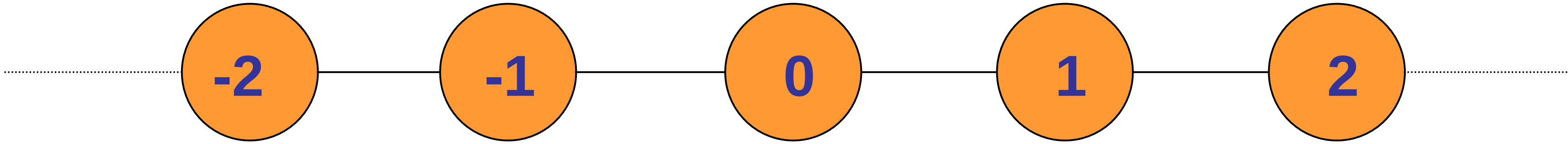
窓口が 2 以上の時は一般にはわからない

多様な待ち行列のモデル

現在も巨大なシステムにおいてシステム設計のための

基本的モデルとして使われている

ランダムウォーク



$x \to x+1$　$\frac{1}{2}$ の確率

$x \to x-1$　$\frac{1}{2}$ の確率

ランダムウォーク

規則に対応する漸化式

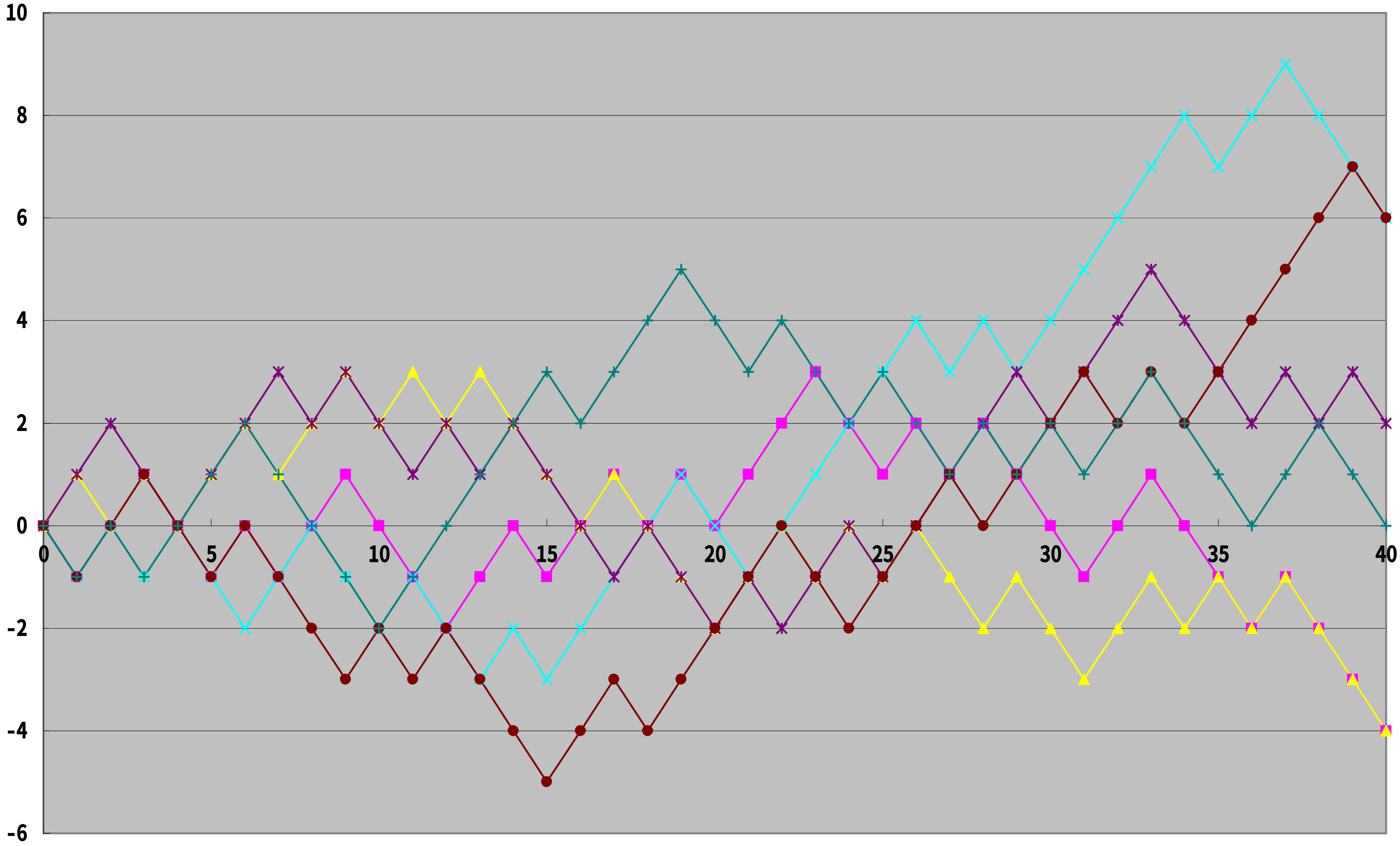
$$u(t+1,x) = \frac{1}{2}(u(t,x+1) + u(t,x-1))$$

書き換えた差分方程式

$$u(t+1,x) - u(t,x) = \frac{1}{2}(u(t,x+1) + u(t,x-1) - 2u(t,x))$$

平均量（統計量）の従う方程式

この方程式がすごろくの規則を決定している


10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
5
10
15
20
25
30
35
40

一般化

2．　時間：離散　　空間：連続

3．　時間：連続　　空間：離散

4．　時間：連続　　空間：連続

ジャンプで動く場合

容易

連続的に動く場合

拡散過程

Kolmogorov　1931

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた
図版を省略させていただきます。

Kolmogorov (1931) のアイデア

空間：直線（多次元化は容易)

マス ： x すべての実数

マス x から dt 時間後に動く先のマス y

y の分布は平均 $x + b(x)dt$, 分散 $\sigma(x)^2 dt$

位置に依存している!

平均量の従う拡散方程式を導く

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\sigma(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)$$

Kolmogorov (1931) の 拡散方程式

すごろくの規則、平均量の記述

実際に駒の動く様子を記述したい

確率微分方程式

考えた人は何人もいたはず

Bachelier, Levy, ...

さいころを連続的に振るという発想

数学的に矛盾をはらむ（ Doob ）

ブラウン運動を基礎にとり
「確率積分」をまず定義する

ブラウン運動: ランダムウォークの極限

Bachelier 1900　株価のモデル

Einstein 1905　ブラウン運動、原子論

彼らが導いたのは偏微分方程式

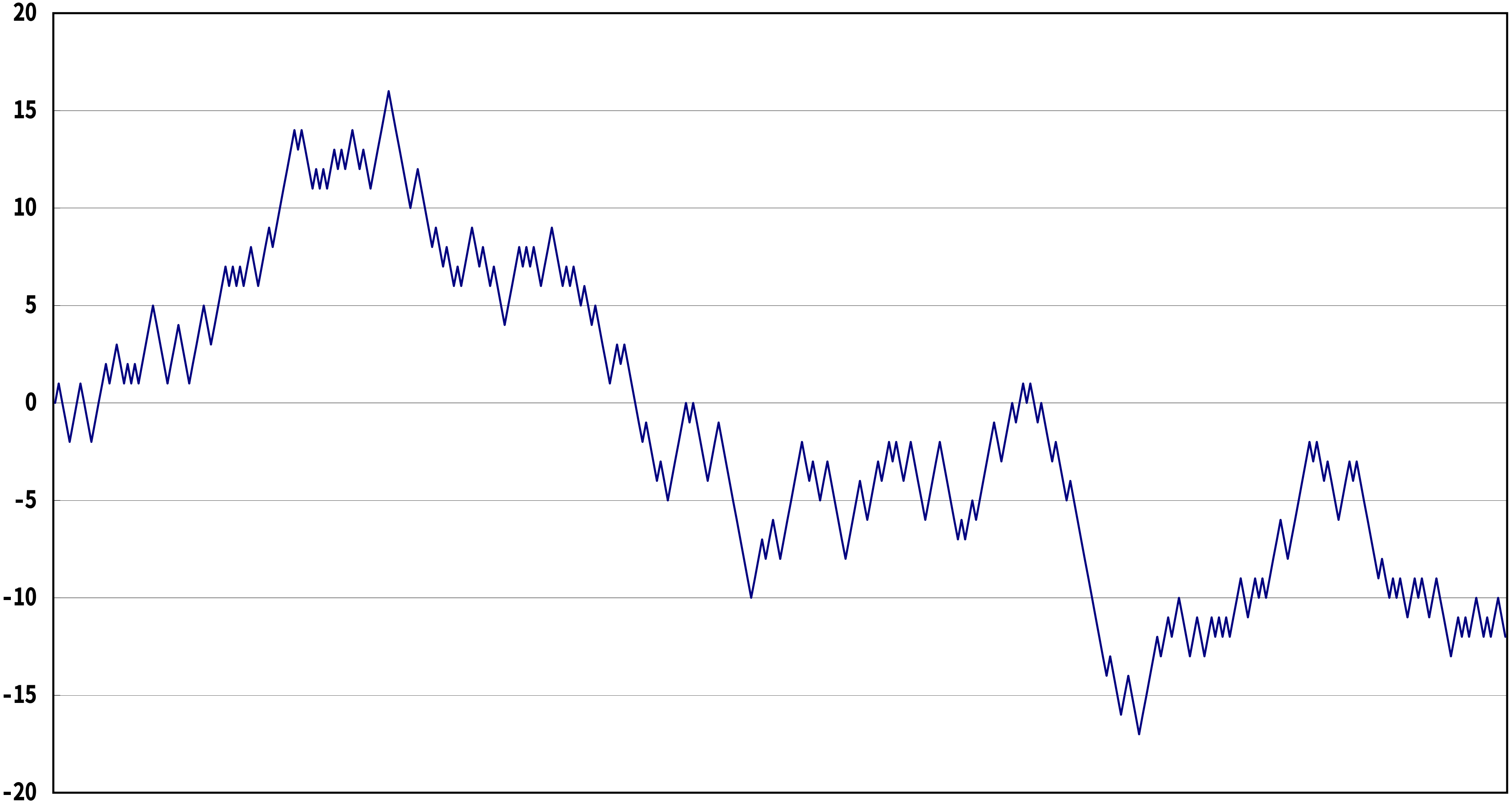
$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

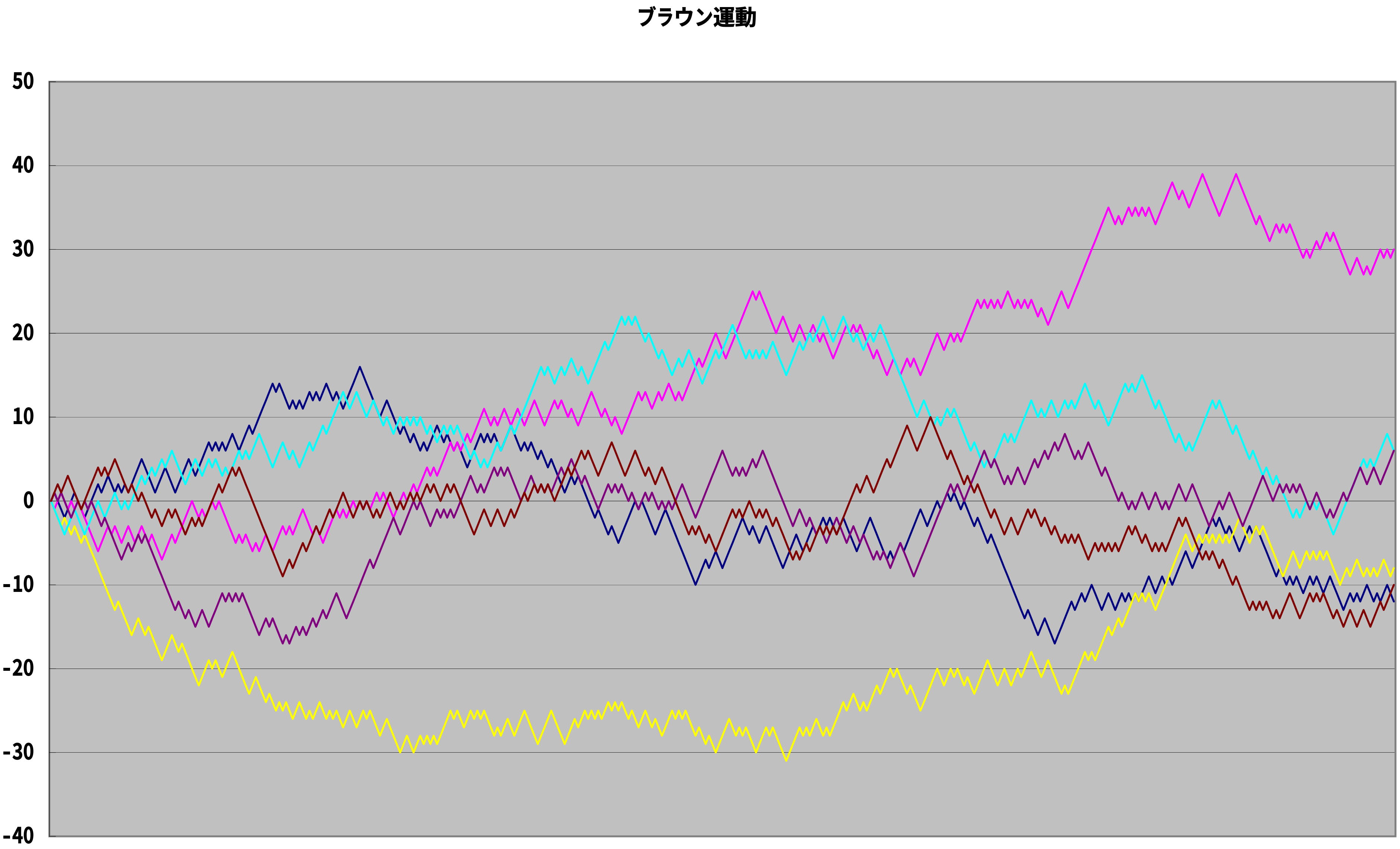
Wiener 1923 : 関数空間上の**測度** を構成

１本１本のブラウン運動の軌道の記述

測度論の成立が背景にある

ブラウン運動




ブラウン運動
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた
図版を省略させていただきます。

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた
図版を省略させていただきます。

伊藤 1942

ブラウン運動の増分 dB_t を基礎にとる

$$x_t \longrightarrow x_t + \sigma(x_t)dB_t + b(x_t)dt$$

ブラウン運動：すごろくにおけるさいころの役割

確率微分方程式

$$dx_t = \sigma(x_t)dB_t + b(x_t)dt$$

「微分」は形式的なもの

確率積分方程式ととらえる

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma(x_s)dB_s + \int_0^t b(x_s)ds$$

伊藤 (1942) で示されたこと

確率積分の定義

確率微分方程式の解の存在と一意性

Kolmogorov の拡散方程式の導出:

複雑な議論が必要

1951　**伊藤の公式** の発見

国田-渡辺（1967）確率積分の一般化

$\Downarrow$

Meyer, ストラスブルグ学派

ファイナンス

Black-Scholes（1973）

ヨーロピアンコールオプションの価格モデル

債券価格：一定金利
株価　　：幾何的ブラウン運動

動的ヘッジング　無裁定

株と債券のポートフォリオを

刻一刻組み替えオプションを複製

オプションの価格

ヨーロッパコールオプション

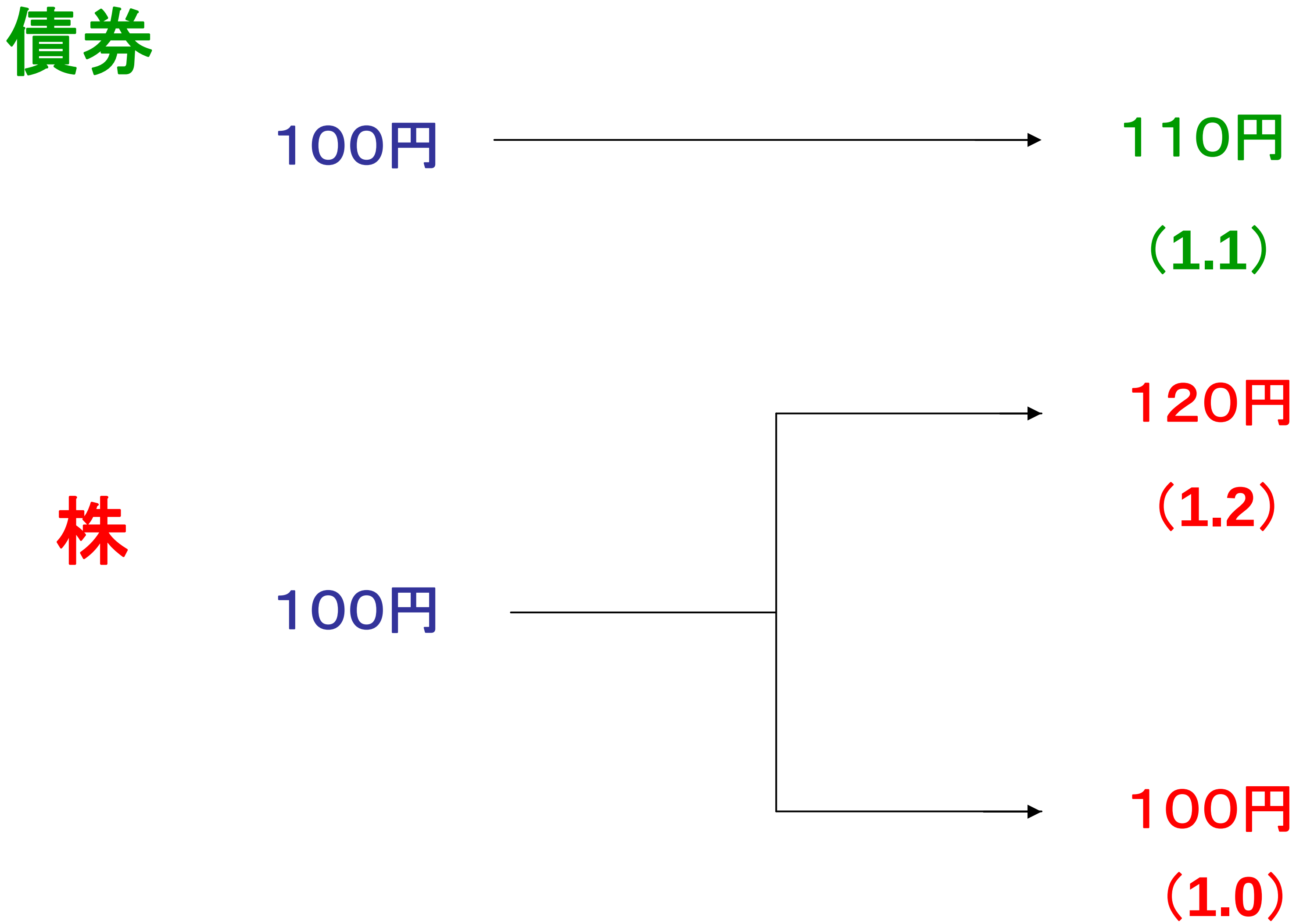
ある証券を

ある日時（満期）に

ある定められた価格（行使価格）で

ある量　買う　権利

権利なので行使する義務はない



債券
100円
110円
（1.1）
株
100円
120円
（1.2）
100円
（1.0）

株式コールオプション

1株を115円で44株買う権利

株

100円

120円

5×44＝220円

100円

0円

オプションの複製

株　x 円

債券 y 円

（x+y=100）

X=1100, y=-1000

1.2x + 1.1y 円

440円

1.2x+1.1y=440

1.0x + 1.1y 円

0円

1.0x+1.1y= 0

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた
図版を省略させていただきます。

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた
図版を省略させていただきます。

著作権処理の都合で、この場所に挿入されていた
図版を省略させていただきます。

Merton（1973）

Black-Scholesの議論の正当化

伊藤解析でモデルを書き換えた

BS論文では確率過程は裏で想定
表には微分方程式のみが現れている

刻一刻のポートフォリオ組み替え

$\Longrightarrow$ 確率積分

２次微分での打ち切り

$\Longrightarrow$ 伊藤の公式

その後の発展

Harrison-Kreps（1979）

モデルの一般化

国田・渡辺, **Meyer** 以後の結果が必要

伊藤の表現定理

以後複雑なモデルが実務で登場
（現実の現象をよりよく説明するため）