

非線形有限要素法特論

2004 年 11 月 15 日

非線形有限要素法特論

- 講義内容は、非線形有限要素法の解説
- 夏学期の「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる。
- 受講していない場合は、「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著、丸善を読んで理解しておくこと。
- 講義資料は<http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2004> からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003> から昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「有限要素法特論」ですが、基本的に同じ内容です。
- 今年度（2004）から新設した演習は、翌週の講義時間に提出してください。必須ではありませんし、採点しませんが、実際に手を動かして計算することは有限要素法の理解を深める上で重要です。
- 質問などは、nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp まで。

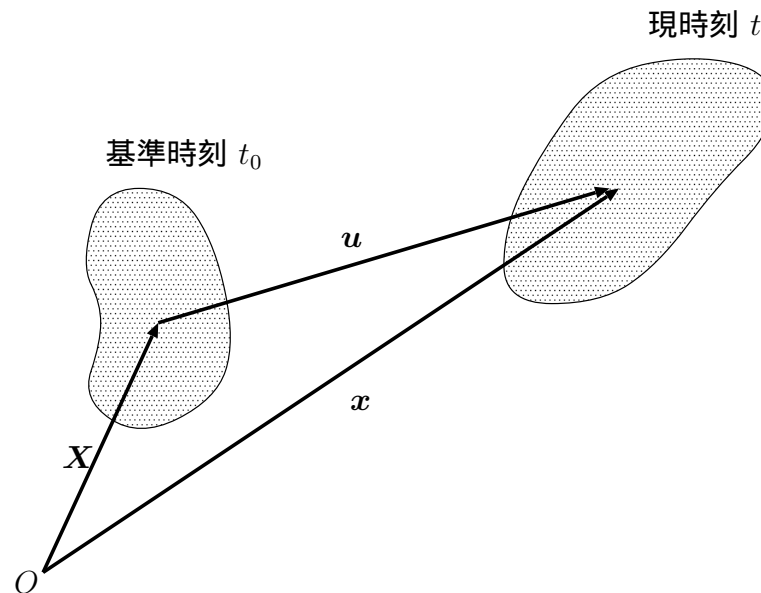
非線形有限要素法特論講義予定

1.	10/ 4	微分方程式の境界値問題の有限要素解析
2.	10/18	線形弾性体の有限要素解析
3.	10/25	アイソパラメトリックソリッド要素 (プログラム)
4.	11/ 1	連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 (演習あり)
5.	11/ 8	線形有限要素法の基本的なプログラム構造 (プログラム)
6.	11/15	幾何学非線形問題の有限要素定式化 (プログラム)
7.	11/22	非線形方程式の静的解析手法、超弾性体、弾塑性体 (プログラム)
8.	11/29	第 7 回の演習
9.	12/ 6	非線形方程式の動的解析手法、固有値解析
10.	12/13	構造要素
11.	12/20	連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法
12.	1/17	ALE 有限要素流体解析
13.	1/24	ALE 有限要素流体解析

連続体力学の復習

- ある基準時刻 t_0 における物体の配置を基準配置とし, 各物質点の位置ベクトルを X
- 物質点 X の現時刻 t における位置ベクトルを x
- 物質点の時刻 t_0 から t までの変位ベクトル u

$$u = x - X \quad (1)$$



変形勾配テンソル 1

- 時刻 $t_0 = 0$ の基準配置における物質点 X およびその近傍の点 $X + dX$ は現時刻 t において $x(X, t)$ および $x(X + dX, t)$ の位置を占める.

- dX が微小であれば

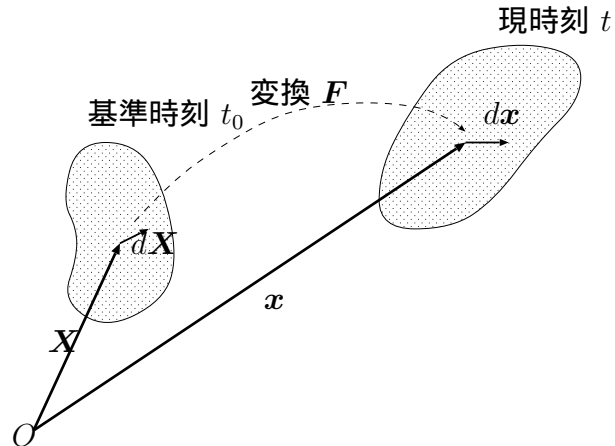
$$dx = x(X + dX, t) - x(X, t) \quad (2)$$

は dX に対して線形の関係にあると考えられるから, 線形変換

$$dx = F \cdot dX \quad (3)$$

を定義することができる.

- ここで F を変形勾配テンソル (deformation gradient tensor) と呼ぶ



変形勾配テンソル 2

- 変形勾配 F は一般には対称ではない.
- 特異 ($\det F = 0$) であってはならず, 必ず逆の関係 :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (4)$$

が存在するような変形のみを対称とする.

- これは $d\mathbf{x}$ と $d\mathbf{X}$, すなわち変形の前後の物質点が一対一対応することとに相当する.
- 一般に R を直交テンソル, U を正值対称テンソルとしたとき変形勾配 F は

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (5)$$

の形に分解することが可能である.

- U は右ストレッチテンソル (right stretch tensor) と呼ばれる. これを変形勾配テンソルの右極分解 (right polar decomposition) と呼ぶ.
- 同様に, R を右極分解と同一の直交テンソル, V を正值対称テンソルとして

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (6)$$

の形に分解することができる. これを変形勾配テンソルの左極分解 (left polar decomposition) と呼ばれ, V を左ストレッチテンソル (left stretch tensor) と呼ぶ.

極分解の例

- 右極分解：2 倍にのばして 90° 回転

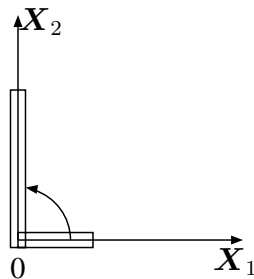
$$F = R \cdot U \quad (7)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_F = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_U \quad (8)$$

- 左極分解：90° 回転して 2 倍にのばす

$$F = V \cdot R \quad (9)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_F = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_V \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \quad (10)$$



変形勾配テンソル 3

- 右 Cauchy-Green 変形テンソル

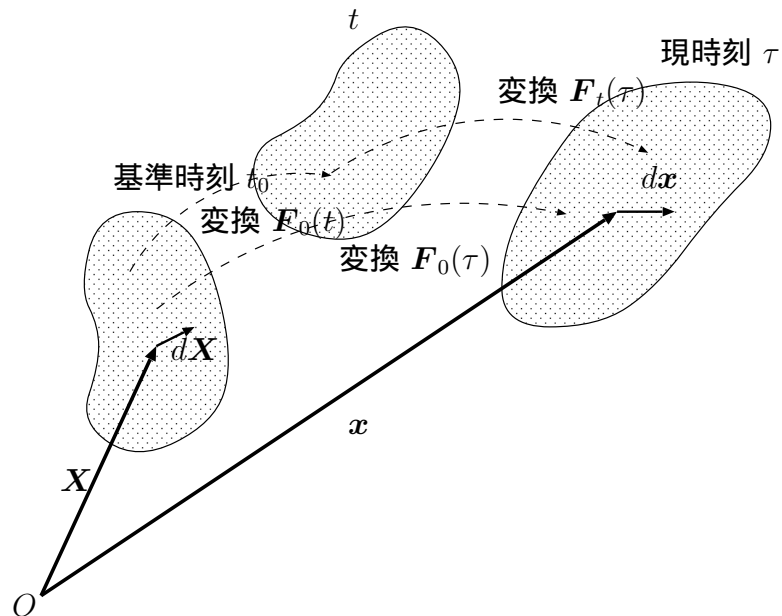
$$C = F^T \cdot F = U \cdot R^T \cdot R \cdot U = U^2 \quad (11)$$

- 左 Cauchy-Green 変形テンソル

$$B = F \cdot F^T = V \cdot R \cdot R^T \cdot V = V^2 \quad (12)$$

- 相対変形勾配テンソル

$$F_0(\tau) = F_t(\tau) \cdot F_0(t) \quad (13)$$

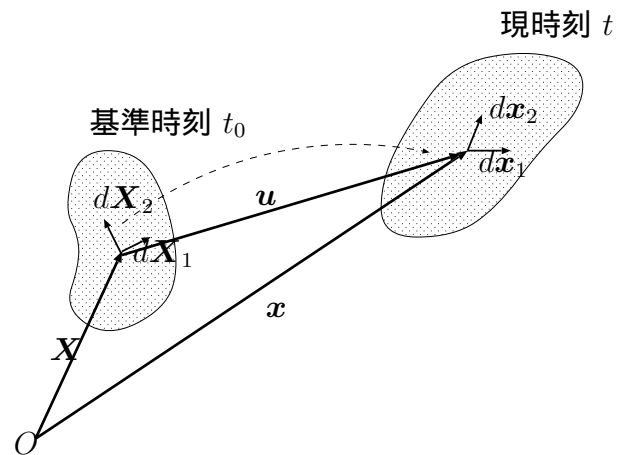


ひずみ 1

- 微小ひずみ：単位長さあたりののび
- 2つの微小ベクトルの変形前後での内積の差

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2) - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X}_2 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}_2) \\ &= d\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \cdot d\mathbf{x}_2 \end{aligned} \tag{15}$$



ひずみ 2

- 2つの微小ベクトルの変形前後での内積の差

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2) - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X}_2 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \\ &= d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}_2) \\ &= d\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \cdot d\mathbf{x}_2 \end{aligned} \tag{17}$$

- Green-Lagrange ひずみ E

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \tag{18}$$

- Almange ひずみ A

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \tag{19}$$

ひずみ 3

- 1次元で考えると,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{l}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_1 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_1 \\ &= \frac{l}{L}d\mathbf{X}_1 \cdot \frac{l}{L}d\mathbf{X}_1 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_1 \\ &= d\mathbf{X}_1 \cdot \left(\frac{l^2}{L^2} - 1 \right) \cdot d\mathbf{X}_1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_1 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_1 \\ &= d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_1 - \frac{L}{l}d\mathbf{x}_1 \cdot \frac{L}{l}d\mathbf{x}_1 \\ &= d\mathbf{x}_1 \cdot \left(1 - \frac{L^2}{l^2} \right) \cdot d\mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (22)$$

- Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{L^2} - 1 \right) \quad (23)$$

- Almange ひずみ \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L^2}{l^2} \right) \quad (24)$$

- それぞれ微小変形を考えると

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{L^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(u+L)^2 - L^2}{L^2} \right) \approx \frac{u}{L} \quad (25)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L^2}{l^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(u+L)^2 - L^2}{l^2} \right) \approx \frac{u}{l} \approx \frac{u}{L} \quad (26)$$

ひずみ 3

- 成分表示

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right\} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{A} &= A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \mathbf{E}_L &= E_{Lij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right\} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\end{aligned}\tag{27}$$

- \mathbf{E} と \mathbf{A} の関係

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}\end{aligned}\tag{28}$$

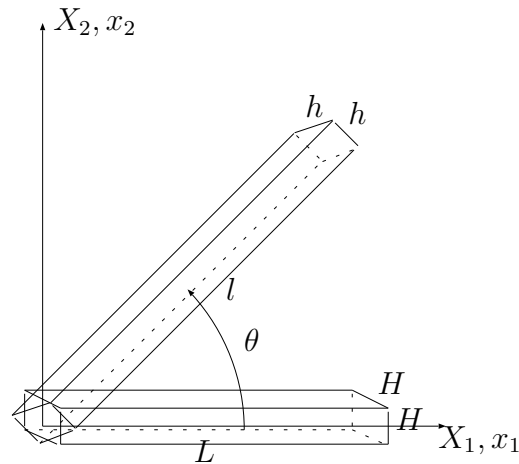
ひずみ 4

• 例

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (29)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{l}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{H} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{l}{L} \cos \theta & -\frac{h}{H} \sin \theta & 0 \\ \frac{l}{L} \sin \theta & \frac{h}{H} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{l^2}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{H^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{H^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{l^2}{L^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{H^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{H^2} - 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$



変形速度テンソル 1

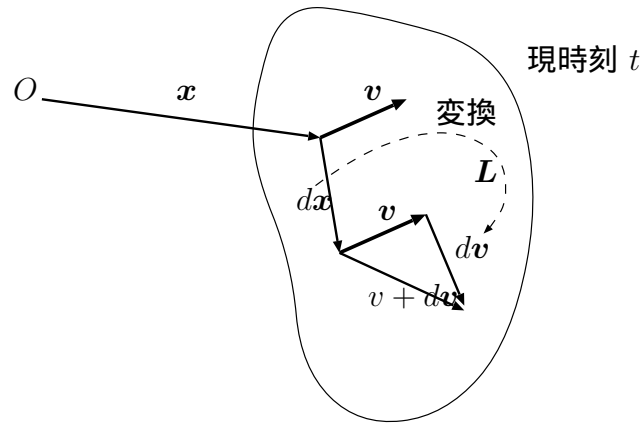


図 1: 速度勾配テンソル

- 一般に近接する2つの物質点 X および $X + dX$ は、時刻 t において x および $x + dx$ に位置し、速度 \dot{x} および $\dot{x} + d\dot{x}$ を持つ。 \dot{x} を v 、 $d\dot{x}$ を dv と表すと、速度勾配テンソル (velocity gradient tensor) L は次のように定義される。

$$dv = L \cdot dx \quad (31)$$

- すなわち、2つの物質点の相対速度 dv への dx の線形変換を表す。これは時刻 t におけるベクトル場 v の勾配 $\text{grad}v$ にほかならない。

$$L = v \otimes \nabla_x \quad (32)$$

変形速度テンソル 2

- ここで

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X} \quad (33)$$

の物質時間微分をとると $d\boldsymbol{X}$ が時間に依存しないので

$$d\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot d\boldsymbol{X} \quad (34)$$

- また, $d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L}d\boldsymbol{x}$ は $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}$ なので

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X} \quad (35)$$

と表されるので,

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F} \quad (36)$$

- すなわち

$$\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \quad (37)$$

となる.

- このとき, $J = \det \boldsymbol{F}$ を用いると

$$\frac{\dot{J}}{J} = \text{tr} \boldsymbol{L} \quad \left(= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div} \boldsymbol{v} \right) \quad (38)$$

が成立する.

- また, 速度勾配テンソル L を次のように対称成分と反対称成分に加算分解する.

$$\begin{aligned}
 L &= D + W \\
 D &= \frac{1}{2} (L + L^T) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
 W &= \frac{1}{2} (L - L^T) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j
 \end{aligned} \tag{39}$$

- 対称成分 D は変形速度テンソル (deformation rate tensor) あるいはストレッチングテンソル (stretching tensor), 反対称成分 W はスピンテンソル (spin tensor) あるいは回転速度テンソル (rotation rate tensor) と呼ぶ.

変形速度テンソル 3

- 関係式

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} + U^{-1}\dot{U})R^T \\W &= \dot{R}R^T + \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U})R^T \\ \dot{E} &= F^T D F \\ D &= \dot{A} + L^T A + A L\end{aligned}\tag{40}$$

面積要素と体積要素の変化 1

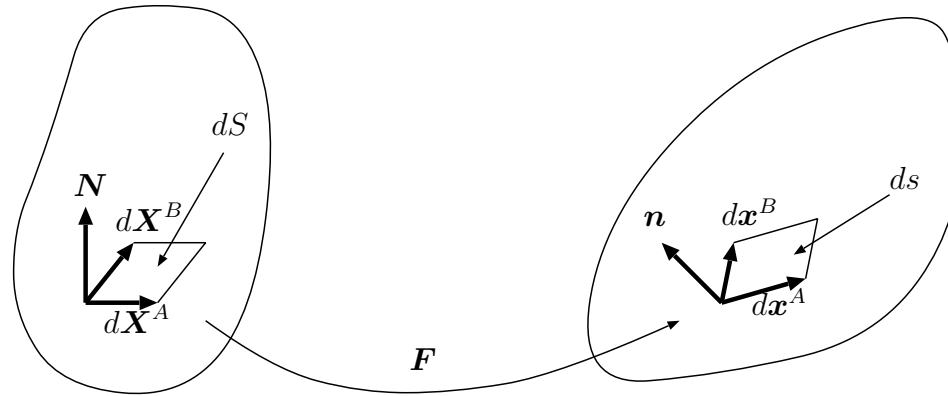


図 2: 面積要素の変化

- 物体の変形とともに、物体内の任意の面積要素は形、大きさ、方向を変える。
- いま図に示すように、変形前後の微小四辺形の面積、単位法線ベクトルを dS , \mathbf{N} , および ds , \mathbf{n} とすると、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{n} ds = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dS \quad (41)$$

- あるいは

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} ds = (\det \mathbf{F}) \mathbf{N} dS \quad (42)$$

- これらは Nanson の公式 (Nanson's formula) と呼ばれる。

面積要素と体積要素の変化 2

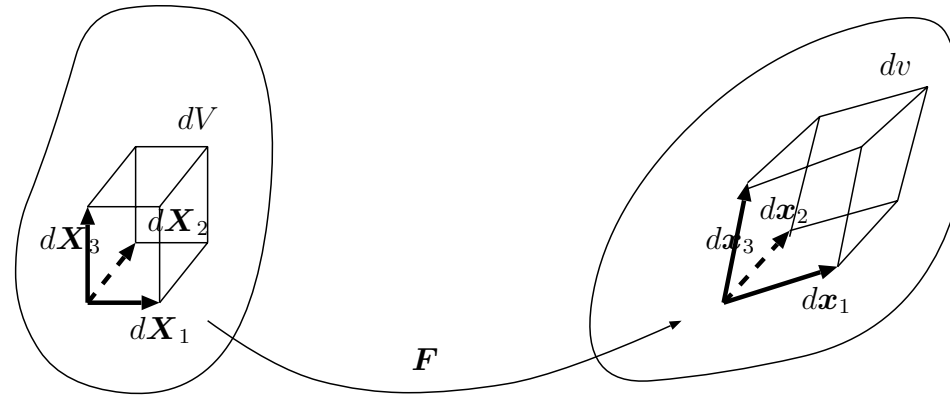


図 3: 体積要素の変化

- 体積要素の場合は, 図に示すような dX_1, dX_2, dX_3 を 3 辺とする体積 dV の微小平行 6 面体 が変形後, dx_1, dx_2, dx_3 , を 3 辺とする体積 dv の微小平行 6 面体になると考えることができる.
- dV と dv の間には次の関係が成り立つ.

$$dv = (\det \mathbf{F})dV \quad (43)$$

- ここで

$$J \equiv \det \mathbf{F} \quad (44)$$

と定義すると J は体積変化率を表す.

質量保存の原理

- 物体の質量 m は質量密度 ρ , 物体の占める領域 v を用いて

$$m = \int_v \rho \, dv \quad (45)$$

- 質量保存の原理 (principle of conservation of mass) は, m が時間によらず一定, すなわち

$$\dot{m} = 0 \quad (46)$$

- ここで, $\dot{}$ は物質時間導関数を表すこととする. $dv = (\det \mathbf{F}) dV$, $J = \det \mathbf{F}$ より,

$$m = \int_V \rho J \, dV \quad (47)$$

- ここで上式の時間微分をとると

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \int_V (\dot{\rho} J + \rho \dot{J}) \, dV \\ &= \int_V (\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr} \mathbf{L}) J \, dV \\ &= \int_v (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv \end{aligned} \quad (48)$$

と変形でき, これは物体の任意の部分についても成り立つので

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (49)$$

運動量保存の原理 1

- 物体に作用する力には物体力 (body force) ベクトル $\rho \mathbf{g}$ と, 表面力 (surface force) ベクトル \mathbf{t} がある. ただし \mathbf{g} は単位質量あたりの物体力であり, $\rho \mathbf{g}$ は単位体積に作用する力である. また, \mathbf{t} は単位面積に作用する力である.
- 物体全体におけるこれらの和は, 運動量 $\int_v \rho \mathbf{v} dv$ の速度と等しいので

$$\left(\int_v \rho \mathbf{v} dv \right)' = \int_v \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{t} ds \quad (50)$$

が成り立つ.

- これは Euler の第1運動法則 (Euler's first law of motion) と呼ばれる.
- ここで $\dot{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{a}$ と定義すると, $(\int_v \rho f dv) = \int_v \rho f' dv$ を用いて次のように表せる.

$$\int_v \rho (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dv = \int_s \mathbf{t} ds \quad (51)$$

運動量保存の原理 2

- 一方, 角運動量 (angular momentum) については次の式が成立する.

$$\left(\int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv \right)' = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (52)$$

- すなわち, 座標の原点に関して物体力および表面力のモーメントと, 運動量モーメント (moment of momentum) の速度が等しい.
- これは Euler の第2運動法則 (Euler's second law of motion) と呼ばれる. 左辺で

$$\left(\int_v \rho f dv \right)' = \int_v \rho f' dv$$

$$\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (53)$$

より

$$\int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds \quad (54)$$

が成り立つ.

Cauchy 応力テンソル 1

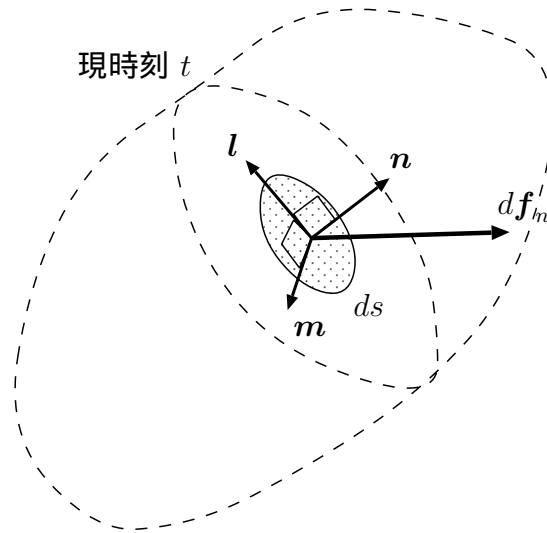


図 4: 物体内に作用する力

- 物体内の任意の仮想表面上にとった微小な面素 ds に作用する力が df_n であるとする (図 6).
ただし, 時刻 t の現時刻での配置をもとにして考える.
- このとき, 応力ベクトル t_n は次のように定義される. (つまり単位面積あたりに作用する力)

$$t_n = \frac{df_n}{ds} \quad (55)$$

Cauchy 応力テンソル 2

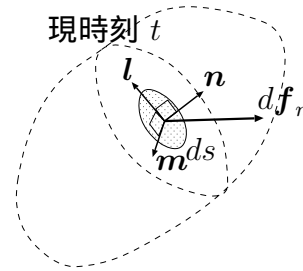


図 5: 物体内に作用する力

- ここで面内において直交する 2 つの単位ベクトル l, m を与えると、応力ベクトル t_n は一般に次のように分解される.

$$t_n = T_{nn}n + T_{nl}l + T_{nm}m \quad (56)$$

右辺の係数 T の第 1 の添字は断面の方向を、第 2 の添字は分解した応力の方向を表すものとする.

- いま、 (n, l, m) を直交デカルト座標系の基底ベクトル $(e_1, e_2, e_3), (e_2, e_3, e_1), (e_3, e_1, e_2)$ に順に一致させ、そのときの応力ベクトルを t_1, t_2, t_3 とすると、次の式が得られる.

$$t_i = T_{ij}e_j \quad (57)$$

- Cauchy 応力テンソル T はこれらの成分 T_{ij} を用いて

$$T = T_{ij}e_i \otimes e_j \quad (58)$$

と定義される.

Cauchy 応力テンソル 3

- 以下の Cauchy の 4 面体を考える

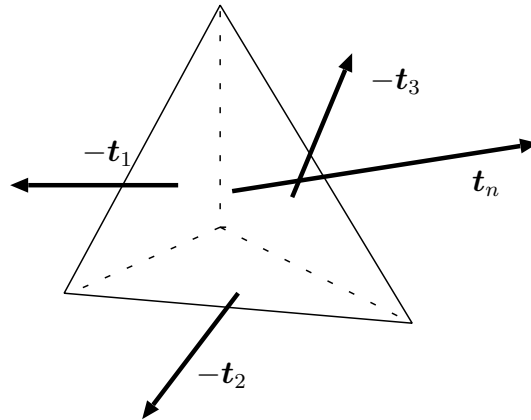


図 6: 物体内に作用する力

各面の面積を $\Delta_{s1}, \Delta_{s2}, \Delta_{s3}, \Delta_s$ とする . Euler の第一運動法則 $(\int_v \rho \mathbf{v} dv)' = \int_v \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{t} ds$ は以下のように表される

$$\rho(\mathbf{a} - \mathbf{g})\Delta_v \approx \mathbf{t}_n \Delta_s - \mathbf{t}_1 \Delta_{s1} - \mathbf{t}_2 \Delta_{s2} - \mathbf{t}_3 \Delta_{s3} \quad (59)$$

この 4 面体の体積が無限小の極限を考えると , 左辺は 0 になり $\Delta_{si}/\Delta_s \rightarrow n_i$. よって .

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_i n_i \quad (60)$$

を得る .

Cauchy 応力テンソル 4

- $t_n = t_i n_i$ に $t_i = T_{ij} e_j$ を代入すると次の Cauchy の公式 (Cauchy's formula) :

$$t_n = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} \quad (61)$$

を得る.

- Cauchy の公式は物体の表面でも成立するので, Euler の第一運動法則から導かれた $\int_v \rho(\mathbf{a} - \mathbf{g}) dv = \int_s t ds$ の t に $t_n = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}$ を代入して発散定理を用いると

$$\int_v \rho(\mathbf{a} - \mathbf{g}) dv = \int_v \operatorname{div} \mathbf{T} dv \quad (62)$$

となる.

- この式は物体の任意の一部についても成立するので

$$\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (63)$$

あるいは

$$\rho a_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (64)$$

が成立する.

- これは Cauchy の第1運動法則 (Cauchy's first law of motion) あるいは平衡方程式 (equilibrium equation) と呼ばれる.

Cauchy 応力テンソル 5

- また, 角運動量保存則に関する Euler の第二運動則から導かれた, $\int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} dv = \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv + \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds$ の \mathbf{t} に $\mathbf{t}_n = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}$ を代入して変形すると次式を得る.

$$\int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{a} dv = \int_v \{ \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \mathbf{T}) + e_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k \} dv \quad (65)$$

- この式に $\rho \mathbf{a} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$ を用いて

$$\begin{aligned} \int_v e_{ijk} T_{ij} \mathbf{e}_k dv &= 0 \\ e_{ijk} T_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

を得る.

- これが成立するための条件は

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (67)$$

- すなわち

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad (68)$$

であり, これを Cauchy の第2運動法則 (Cauchy's second law of motion) と呼ぶ. Cauchy 応力は対称であり, 独立な6個の成分からなる.

各種応力テンソル

- Cauchy 応力は時刻 t の現配置において定義される応力である.
- しかし有限変形問題においては, 未知な配置で定義される応力より, 既知の配置に基づく何らかの応力テンソルを用いて変分原理を記述すると都合が良いことがある.
- Kirchhoff 応力テンソル \hat{T} とは時刻 t_0 の基準配置から時刻 t の現配置に至る体積変化率 J を用いて

$$\hat{T} \equiv JT \tag{69}$$

と定義される.

第1 Piola–Kirchhoff 応力テンソル

- 次に, 第1 Piola–Kirchhoff 応力テンソル (first Piola–Kirchhoff stress tensor) は, 現配置での面素に作用する力 $d\mathbf{f}_n$ を基準配置での面素に平行移動させたときの応力ベクトル:

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \frac{d\mathbf{f}_n}{dS} \quad (70)$$

を用いて

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{N} \quad (71)$$

と定義される. ただしここで, \mathbf{n} , ds は現配置での面素の外向き単位法線ベクトル, 面積であり, \mathbf{N} , dS は基準配置でのそれである

- また, $\mathbf{\Pi}$ は公称応力 (nominal stress) とも呼ばれる.

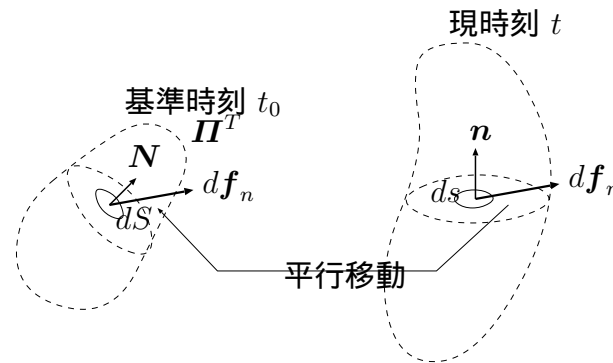


図 7: 第1 Piola–Kirchhoff 応力テンソル

- Nanson の公式より

$$d\mathbf{f}_n = \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{N} dS = \frac{1}{J} \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} ds \quad (72)$$

であるので, Cauchy の公式 $\mathbf{t}_n (= d\mathbf{f}_n/ds) = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}$ と比較して次の \mathbf{T} と $\mathbf{\Pi}$ の関係式を得る.

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \quad (73)$$

第2 Piola–Kirchhoff 応力テンソル

- 第2 Piola–Kirchhoff 応力テンソル (second Piola–Kirchhoff stress tensor) S は, $d\mathbf{f}_n$ を $\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}_n$ と変換して基準配置での面素に作用させたときの応力ベクトル:

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}_n}{dS} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \quad (74)$$

を用いて

$$\tilde{\mathbf{t}} \equiv \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N} \quad (75)$$

と定義される.

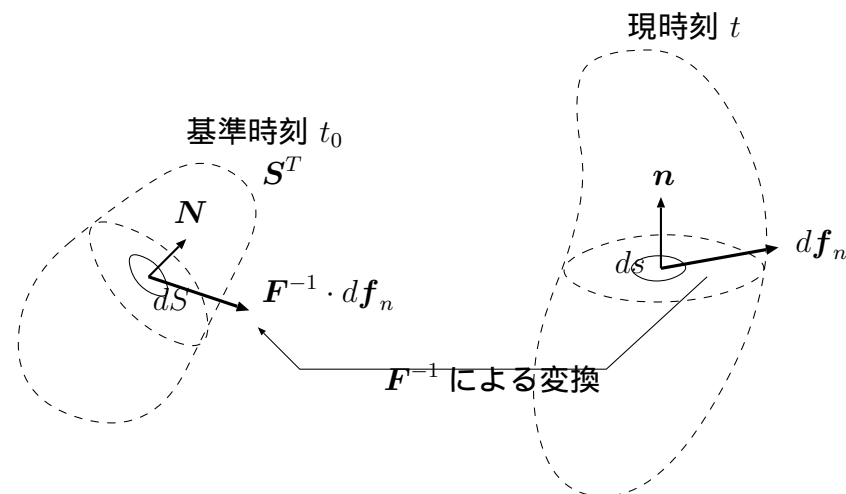


図 8: 第2 Piola–Kirchhoff 応力テンソル

- Nanson の公式より

$$d\mathbf{f}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N} dS = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} ds \quad (76)$$

であるので, Cauchy の公式 $t_n (= d\mathbf{f}_n/ds) = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}$ と比較して次の \mathbf{T} と \mathbf{S} の関係を得る.

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (77)$$

構成式 1

- ここまでの理論は、出発点の「連続体仮説」と力学の原理以外に特別な仮説を導入することなく数学的に展開されてきた。
- これに対し、物質の力学的応答を記述する式、すなわち構成式 (constitutive equation) についての理論は実験結果に基づく物理的考察から何らかの仮説を導入せざるを得ない現象論的な側面を持つ。
- しかしながら、実験式といっても数学的に正しくなくてならない。
- 何らかの仮定をおいて組み立てた、数学的に正しいモデルが実験結果をよくあわしているものが、一般に使われている構成式

構成式 2

- 変形した物体のある物質点における変形勾配が F , Cauchy 応力が T であったとする.
- この物質点がさらに Q だけ剛体回転した場合, テンソルの変換則により応力は $Q \cdot T \cdot Q^T$ と与えられる. また, このときの合計の変形勾配は $Q \cdot F$ である.
- 簡単のため, T が F の関数として

$$T = f(F) \quad (78)$$

で与えられると仮定する.

- ここで f はテンソルを変数とし, 関数値自身もテンソルとなるテンソル値テンソル関数 (tensor-valued tensor function) である.

$$Q \cdot T \cdot Q^T = f(Q \cdot F) \quad (79)$$

あるいは

$$Q \cdot f(F) \cdot Q^T = f(Q \cdot F) \quad (80)$$

が成立しなければならない. このことから f の形は大きく限定される.

構成式 3

- 一般に、構成式は次の3つの原理に従わなければならない。
 1. 応力決定の原理 (principle of determinism for the stress) : 物体中の応力は物体の運動履歴によって決定される.
 2. 局所作用の原理 (principle of local action) : 物質点 X の応力の決定においては、 X の近傍の運動だけが関与し、その外の物質点の運動は無視できる.
 3. 物質客観性の原理 (principle of material frame indifference or principle of material objectivity) : 構成式は基準枠 (reference frame)¹ の変化の下で不変でなければならない. すなわち、2つの基準枠 O^* と O が

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t) \cdot \boldsymbol{x} \quad (81)$$

の関係にあるとき

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}(t)^T \quad (82)$$

の関係があり、また構成式は両枠に対して同一の形をとらねばならない.

¹事象 (event) と呼ばれる空間内の位置 \boldsymbol{x} と時間 t の組 $\{\boldsymbol{x}, t\}$ を観測する観測者 (observer) のこと. 基準枠が異なると事象は $\{\boldsymbol{x}, t\}$, $\{\boldsymbol{x}^*, t^*\}$ とベクトル自体が異なって観測される.

構成式 4

- 2つの基準枠 O^* と O が

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t) \cdot \boldsymbol{x} \quad (83)$$

- 2点を結ぶベクトルは $\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{x}_2^* - \boldsymbol{x}_1^*$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ とすると,

$$\boldsymbol{x}_2^* - \boldsymbol{x}_1^* = \boldsymbol{Q}(t)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \quad (84)$$

$$\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \boldsymbol{b} \quad (85)$$

このように両基準枠から観測されるベクトルが, 限時刻での $\boldsymbol{Q}(t)$ のみを介した形で関係づけられるとき, そのベクトルには客観性があるという.

- テンソルはベクトルの線形変換なので, 以下の関係を満たすとき客観性があるという

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{Q}(t) \cdot \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{Q}(t)^T \quad (86)$$

- 客観性のあるテンソルの例

$$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{T} \quad (87)$$

- 客観性のないテンソルの例

$$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{W} \quad (88)$$

- 観測不変テンソルの例

$$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S} \quad (89)$$

構成式 4

- 不合理な例：線形弾性体

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (90)$$

$$T_{ij} = \kappa(\operatorname{div} \mathbf{u})\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(\mathbf{u}) \quad (91)$$

- $x_1 - x_2$ 平面内で 90° 回転，応力は 0 のはず

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (93)$$

- 微小変形の場合は，対角項は $\cos \theta \approx 1$ 非対角項は $\sin \theta \approx \theta$ なので，問題ないが，有限変形を考えると，不合理を生じる．

構成式 4

- 以下のような構成式を考えたとする .

$$T = aE \quad (94)$$

- 観測者が変わると $T^* = a^*E^*$ となるが ,

- $T^* = QTQ^T$ (客観性がある)

- $a^* = a$ (スカラー)

- $E^* = E$ (観測不変量)

- 従って

$$T^* = a^*E^* \rightarrow QTQ^T = aE = T \quad (95)$$

となり, 矛盾する .

- たとえば, 以下のものは矛盾しない .

$$T = aA \quad (96)$$

$$S = aE \quad (97)$$

境界値問題

下図に示すような、物体 A についての境界値問題 $[B]$ を考える。

$[B]$ 物体 A が占める領域を Ω , Ω の境界を $\partial\Omega$ とし, $\partial\Omega$ の部分集合 $\partial\Omega_D$ 上では変位境界条件が与えられているものとする. このような系に表面力 t , 体積力 ρg が作用するとき, つり合い条件を満たす変位 $u \in \mathcal{V}$ を求めよ. ただし, ρ は密度, g は重力加速度, \mathcal{V} は変位の許容関数すなわち変位境界条件を満たす解の候補全体の集合とする.

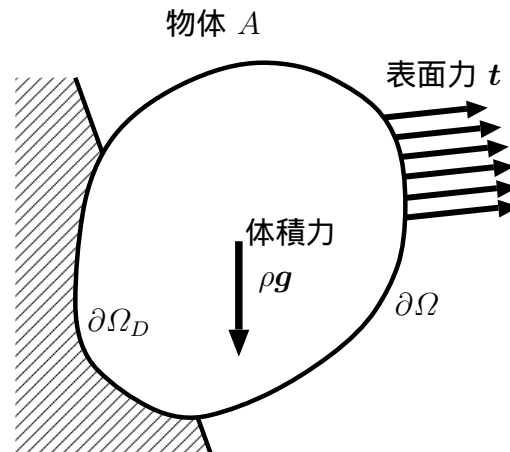


図 9: 境界値問題概念図

境界値問題の定式化

この問題は以下のように定式化できる.

[B] 与えられた t, g に対し, 以下を満たすような $u \in \mathcal{V}$ を求めよ.

[1] 平衡方程式 (Cauchy の第 1 運動法則)

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (98)$$

$$\nabla_X \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_0 \mathbf{g} = 0 \quad (99)$$

[2] 境界条件式

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_D \quad (100)$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on} \quad \partial\Omega - \partial\Omega_D \quad (101)$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{N} = \tilde{\mathbf{t}} \quad (102)$$

[3] 変位・ひずみ関係式

[4] 応力・ひずみ関係式 (構成式)

- このうち [1], [2] はいかなる問題でも共通 (ただし, 必要に応じて等価なものに書き換えることがある.), [4] は対象とする物質モデルで決まる. [3] は [4] に対応するものが選ばれる.

境界問題の弱形式定式化 1

- 平衡方程式と, 力学的境界条件式を満足する一価連続な応力 \mathbf{T} 全体の集合を \mathcal{T} , 変位境界条件を満足する一価連続な \mathbf{u} 全体の集合を \mathcal{U} とする.
- $\check{\mathbf{T}} \in \mathcal{T}, \check{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}$ とすると, 下式が成立する.

$$\int_v (\nabla_x \cdot \check{\mathbf{T}} + \rho \mathbf{g}) \cdot \check{\mathbf{u}} \, dv = 0 \quad (103)$$

- 上式に発散定理を用いると, 以下のようなになる. ただし, s_t, s_u は $\underline{\mathbf{t}}, \underline{\mathbf{u}}$ が指定されている s の領域を示し, $s = s_t + s_u$ である.

$$\int_v \check{\mathbf{T}} : (\check{\mathbf{u}} \otimes \nabla_x) \, dv = \int_{s_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \check{\mathbf{u}} \, ds + \int_{s_u} \mathbf{n} \cdot \check{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \check{\mathbf{u}} \, dv \quad (104)$$

- ここで, 一価連続で s_u 上で $w = 0$ となる w 全体の集合を \mathcal{W} とする.
- このとき $\check{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}, \forall w \in \mathcal{W}$ に対して $\check{\mathbf{u}} + w \in \mathcal{U}$ である.
- 平衡状態にある Cauchy 応力を \mathbf{T} として, 下式が成立する.

$$\int_v \mathbf{T} : (\check{\mathbf{u}} \otimes \nabla_x) \, dv = \int_{s_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \check{\mathbf{u}} \, ds + \int_{s_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \check{\mathbf{u}} \, dv \quad (105)$$

$$\int_v \mathbf{T} : \{(\check{\mathbf{u}} + w) \otimes \nabla_x\} \, dv = \int_{s_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot (\check{\mathbf{u}} + w) \, ds + \int_{s_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{u}} \, ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot (\check{\mathbf{u}} + w) \, dv \quad (106)$$

境界問題の弱形式定式化 2

- 平衡状態にある Cauchy 応力を \mathbf{T} として, 下式が成立する.

$$\int_v \mathbf{T} : (\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_x) dv = \int_{s_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} ds + \int_{s_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{u}} ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \dot{\mathbf{u}} dv \quad (107)$$

$$\int_v \mathbf{T} : \{(\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{w}) \otimes \nabla_x\} dv = \int_{s_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{w}) ds + \int_{s_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{u}} ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{w}) dv \quad (108)$$

- 両式を両辺それぞれ引くことにより下式が得られる.

$$\int_v \mathbf{T} : (\mathbf{w} \otimes \nabla_x) dv = \int_{s_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dv \quad (109)$$

- これは以下のように表すことができる.

$$\int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_{(L)} dv = \int_{\delta v} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} ds + \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dv \quad (110)$$

ただし $\delta \mathbf{A}_{(L)}$ は, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ から導かれる Almange ひずみの線形成分である.

$$\delta \mathbf{A}_{(L)ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \quad (111)$$

- また, この式の参照配置を変更することにより, 下式が得られる.

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dv = \int_{\delta V} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dS + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dV \quad (112)$$

境界問題の弱形式定式化 3

$$\int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_L dv = \int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV \quad (113)$$

$$\int_V dV = \int_v \frac{1}{J} dv \quad (114)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \rightarrow S_{ij} = J F_{im}^{-1} T_{mn} F_{jn}^{-1} \quad (115)$$

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{A}_L \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{A}_L \mathbf{F})_{ij} &= F_{ki} \delta A_{Lkl} F_{lj} \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_k} \right) \right\} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} + \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_l}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial x_l}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_l}{\partial X_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\delta_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_l}{\partial X_j} \left(\delta_{li} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right) \\ &= \delta E_{ij} \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV &= \int_v (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{A}_L \mathbf{F}) : (J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \frac{1}{J} dv \\
&= \int_v J (F_{ki} \delta A_{Lkl} F_{lj}) (F_{im}^{-1} T_{mn} F_{jn}^{-1}) \frac{1}{J} dv \\
&= \int_v \delta_{km} \delta_{ln} A_{Lkl} T_{mn} dv \\
&= \int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_L dv
\end{aligned} \tag{117}$$

非線形問題

- 線形弾性体の場合

$$\int T_{ij} \delta E_{ij} dV \quad (118)$$

を離散化して剛性方程式が得られた .

$$\begin{aligned} T_{ij} \delta E_{ij} &= \{\delta E\} \{T\} \\ &= \{\delta u\}^T [B] [D] [B] \{u\} \end{aligned} \quad (119)$$

ただし ,

$$\{\delta E\} = [B] \{\delta u\} \quad (120)$$

$$\{T\} = [D] \{E\} = [D] [B] \{u\} \quad (121)$$

- 一般的な場合 (つまり非線形の場合) はどうなるのか

$$\int S_{ij} \delta E_{ij} dV \quad (122)$$

$$\begin{aligned} S_{ij} \delta E_{ij} &= \{\delta E\} \{S\} \\ &= \{\delta u\}^T [B] \{S\} \end{aligned} \quad (123)$$

$\{\delta E\}$ は $\{\delta u\}$ に対して線形（ただし， u の関数）なので，マトリックス表示できるが， $\{S\}$ は $\{E\}$ に対して線形であるとは限らないし，そもそも $\{E\}$ は変位 u に対して線形ではない．

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (124)$$

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right) \quad (125)$$

Newton-Raphson 法 1

- 一般に境界値問題の弱形式を有限要素離散化すると、以下のように表すことができる。

find $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ such that

$$\delta \mathbf{u}_h^T \cdot (\mathbf{Q}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{F}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h \quad (126)$$

ただし、 \mathbf{V}_h は許容関数全体の空間 \mathbf{V} を有限要素離散化したもので、 $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ である。 \mathbf{Q} , \mathbf{F} はそれぞれ内力ベクトル, 外力ベクトルと呼ばれる。

- 上式が成立するための必要十分条件は,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (127)$$

であり、この式は平衡方程式と呼ばれている。

- 外力ベクトル \mathbf{F} に対して $\{\mathbf{F}^k\}$ を

$$0 = \mathbf{F}^1 < \mathbf{F}^2 < \dots < \mathbf{F}^n = \mathbf{F} \quad (128)$$

のように定める。

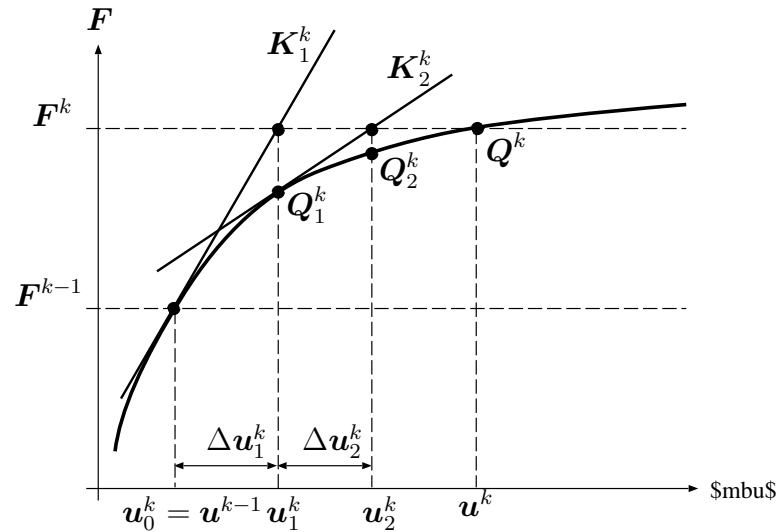
- 増分型の Newton-Raphson 法は,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}^k) = \mathbf{F}^k \quad (129)$$

なる \mathbf{u}^k を \mathbf{u}^{k-1} をもとに順次求めていく方法である。

Newton-Raphson法 2

- u^{k-1} が定まっている時, 次のような手順で u^k を求める



- まず

$$u_0^k = u^{k-1} \tag{130}$$

$$Q_0^k = Q(u_0^k) \tag{131}$$

$$K_1^k = \left. \frac{\partial Q}{\partial u} \right|_{u=u_0^k} \tag{132}$$

とする. K は接線剛性マトリクスと呼ばれている.

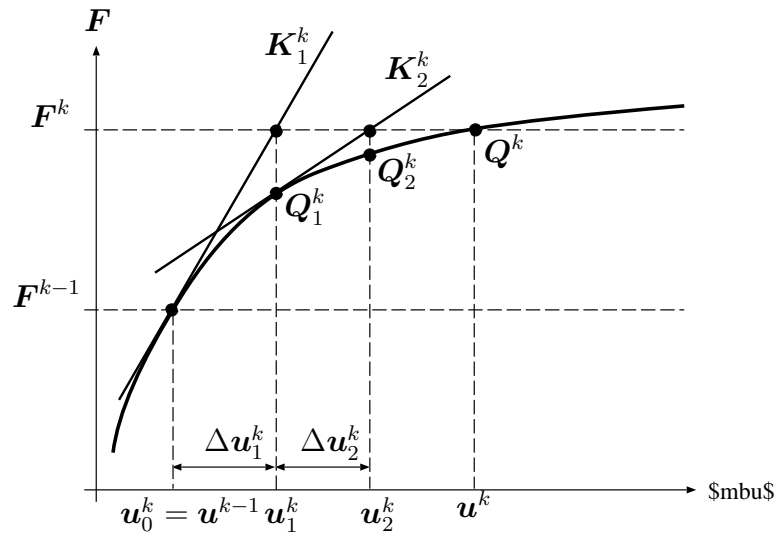
- ここで,

$$\mathbf{K}_1^k \Delta \mathbf{u}_1^k = \mathbf{F}^k - \mathbf{Q}_0^k \quad (133)$$

$$\mathbf{u}_1^k = \mathbf{u}_0^k + \Delta \mathbf{u}_1^k \quad (134)$$

の様に \mathbf{u}_1^k を定めると, \mathbf{u}_0^k よりも \mathbf{u}_1^k の方が \mathbf{u}^k に対するよい近似となる.

Newton-Raphson法 3



- 以下, u_{i-1}^k が得られた時

$$Q_{i-1}^k = Q(u_{i-1}^k) \quad (135)$$

$$K_i^k = \left. \frac{\partial Q}{\partial u} \right|_{u=u_{i-1}^k} \quad (136)$$

$$K_i^k \Delta u_i^k = F^k - Q_{i-1}^k \quad (137)$$

$$u_i^k = u_{i-1}^k + \Delta u_i^k \quad (138)$$

の様に u_i^k を求めることを繰り返す.

- u_{i-1}^k よりも u_i^k の方が u^k に対するよい近似となっており, 条件が整っていれば u_i^k は u^k に, $\|F^k - Q_i^k\|$ は 0 にそれぞれ収束する.
- コンピュータで計算を行なう場合は, 浮動小数点演算の性質上 $\|F^k - Q_i^k\| = 0$ となることはまずないので, 適当な収束判定で計算を打ち切る.

境界値問題の弱形式

- 境界値問題は弱形式にすると

$$\int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_{(L)} dv = \int_{\partial v} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} ds + \int_v \rho g \cdot \mathbf{w} dv \quad (139)$$

ただし $\delta \mathbf{A}_{(L)}$ は, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ から導かれる Almange ひずみの線形成分である.

$$\delta \mathbf{A}_{(L)ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \quad (140)$$

- また, 基準時刻を変形前の t_0 にとって, 書き直すと下式のようになる.

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\partial V} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dS + \int_V \rho g \cdot \mathbf{w} dV \quad (141)$$

- この両者の間には, 本質的な差はなく単に基準配置の違いのみである.
- 幾何学非線形性を考慮した有限要素法ではこのどちらかの式を離散化して解くことになる
- 前者を updated Lagrange 法, 後者を Total Lagrange 法という
- どちらを選択するかは, 構成式の形を考慮して効率の観点から行う
- ここでは, まず Total Lagrange 法について説明する.

弱形式のマトリクス表示

- 領域 Ω を要素に分割する. これを以下のように表す.

$$\Omega = \sum_e \Omega_e \quad (142)$$

- これに伴い, 領域積分, 境界積分はそれぞれ次のようになる.

$$\int_{\Omega} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} d\Omega \quad (143)$$

$$\int_{\partial\Omega} dS = \sum_e \int_{\partial\Omega_e} dS \quad (144)$$

- 各要素での変位 u の補間関数を $N^{(i)}$ とすると, 各要素内の u_i は以下のように離散化される.

$$u_i = N^{(n)} u_i^{(n)} \quad (145)$$

ただし, $u_i^{(i)}$ は節点変位で, (n) はその要素の節点数についての総和を表すものとする.

- また, 座標についても同じ補間関数を用いて離散化する.

$$X_i = N^{(n)} X_i^{(n)} \quad (146)$$

外力1

- 外力の仮想仕事を δR とおく. 即ち

$$\delta R = \int_{\partial\Omega} \delta u_k t_k \, dS + \int_{\Omega} \rho_0 \delta u_k g_k \, d\Omega \quad (147)$$

とする.

- ここで

$$\{\delta u\} = \{\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3\}^T \quad (148)$$

$$\{t\} = \{t_1, t_2, t_3\}^T \quad (149)$$

$$\{g\} = \{g_1, g_2, g_3\}^T \quad (150)$$

を定義すると,

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_{\partial\Omega} \{\delta u\}^T \{t\} \, dS + \int_{\Omega} \rho_0 \{\delta u\}^T \{g\} \, d\Omega \\ &= \sum_e \left[\int_{\partial\Omega_e} \{\delta u\}^T \{t\} \, dS + \int_{\Omega_e} \rho_0 \{\delta u\}^T \{g\} \, d\Omega \right] \end{aligned} \quad (151)$$

と表すことができる.

- 形状関数のマトリックス表示

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(i)} \end{bmatrix} \quad (152)$$

$$[N] = [[N_1] [N_2] \cdots [N_n]] \quad (153)$$

として, 3 行 $3n$ 列のマトリクス $[N]$ を定義する.

外力2

- 節点仮想変位ベクトル $\{\delta u^{(n)}\}$ を

$$\{\delta u^{(n)}\} = \left\{ \delta u_1^{(1)} \delta u_2^{(1)} \delta u_3^{(1)} \cdots \delta u_1^{(n)} \delta u_2^{(n)} \delta u_3^{(n)} \right\}^T \quad (154)$$

とすると,

$$\{\delta u\} = [N] \{\delta u^{(n)}\} \quad (155)$$

なので,

$$\delta R = \sum_e \left[\{\delta u^{(n)}\}^T \left[\int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} dS + \int_{\Omega_e} \rho_0 [N]^T \{g\} d\Omega \right] \right] \quad (156)$$

内力ベクトル 1

- 弱形式の左辺のマトリックス表示を行う

$$\int_{\Omega} \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega = \delta R \quad (157)$$

- δE_{ij} , S_{ij} が i, j に関して対称であることから,

$$\begin{aligned} \delta E_{ij} S_{ij} &= \delta E_{11} S_{11} + \delta E_{22} S_{22} + \delta E_{33} S_{33} \\ &\quad + 2\delta E_{12} S_{12} + 2\delta E_{23} S_{23} + 2\delta E_{31} S_{31} \\ &= (\delta E_{11} \delta E_{22} \delta E_{33} 2\delta E_{12} 2\delta E_{23} 2\delta E_{31}) (S_{11} S_{22} S_{33} S_{12} S_{23} S_{31})^T \end{aligned} \quad (158)$$

- 記述の簡略化のために、歪みの変分と応力をベクトル表示したものを定義しておく。

$$\{\delta E\} = \{\delta E_{11} \delta E_{22} \delta E_{33} 2\delta E_{12} 2\delta E_{23} 2\delta E_{31}\}^T \quad (159)$$

$$\{S\} = \{S_{11} S_{22} S_{33} S_{12} S_{23} S_{31}\}^T \quad (160)$$

- これらに基づいて弱形式の式を要素分割すると,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \{\delta E\}^T \{S\} d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta E\}^T \{S\} d\Omega = \delta R \end{aligned}$$

内力ベクトル 2

- δE_{ij} を成分表示すると

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right) \quad (161)$$

- これより,

$$[Z_1] \equiv \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (162)$$

$$\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} \equiv \left\{ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \right\}^T \quad (163)$$

と定義して,

$$\{\delta E\} = [Z_1] \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} \quad (164)$$

となる.

- このマトリックスに現れる $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ については, 下式に従い求める

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} u_i^{(n)} \quad (165)$$

内力ベクトル 3

- 同様に $\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j}$ については,

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} \delta u_i^{(n)} \quad (166)$$

- これを用いて $\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\}$ を節点変位で表すと

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} & & & & & & & & \\ & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} & & & & & & & \\ & & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & \\ & & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & & & & \\ & & & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & & & \\ & & & & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & & \\ & & & & & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \\ & & & & & & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ & & & & & & & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1^{(1)} \\ \delta u_2^{(1)} \\ \delta u_3^{(1)} \\ \vdots \\ \delta u_1^{(n)} \\ \delta u_2^{(n)} \\ \delta u_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (167)$$

となる.

- 上式中の 9 行 $3n$ 列のマトリクスを $[Z_2]$, つまり

$$\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} = [Z_2] \{ \delta u^{(n)} \} \quad (168)$$

となるように定義する

内力ベクトル 4

- $[B]$ を

$$[B] \equiv [Z_1][Z_2] \quad (169)$$

と定義する

- 最終的に

$$\{\delta E\} = [B]\{\delta u^{(n)}\} \quad (170)$$

と表すことができる.

$$[B^{(n)}] \equiv$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \end{array} \right]$$

$$(171)$$

として 6 行 3 列のマトリクス $[B^{(n)}]$ を定義すると,

$$[B] = \left[[B^{(1)}] \cdots [B^{(n)}] \right] \quad (172)$$

となる.

• 以上より,

$$\sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta E\} \{S\} d\Omega = \sum_e \left[\{\delta u^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T \{S\} d\Omega \right] \quad (173)$$

が得られる.

弱形式のマトリクス表示

- これらをまとめると, total Lagrange 法による弱形式の式は以下のように要素分割しマトリクス表示しできる.

$$\sum_e \left[\{\delta \mathbf{u}^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T \{S\} d\Omega \right] = \sum_e \left[\{\delta \mathbf{u}^{(n)}\}^T \left[\int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} dS + \int_{\Omega_e} \rho_0 [N]^T \{g\} d\Omega \right] \right] \quad (174)$$

- ここで,

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega_e} [B]^T \{S\} d\Omega \quad (175)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} dS + \int_{\Omega_e} \rho_0 [N]^T \{g\} d\Omega \quad (176)$$

$$\mathbf{u} = \left\{ u^{(n)} \right\} \quad (177)$$

とすると,

$$\sum_e \left[\delta \mathbf{u}_h^T (\mathbf{Q}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{F}) \right] = 0 \quad (178)$$

- 即ち, 弱形式化した境界値問題は

find $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ such that

$$\sum_e [\delta \mathbf{u}_h^T (\mathbf{Q}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{F})] = 0 \quad (179)$$

for $\forall \delta \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$

と置き換え, Newton-Raphson 法で解くことができる.

接線剛性マトリクス 1

- Newton-Raphson 法では, 接線剛性マトリクス $K = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}}$ を使用するが,

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (180)$$

の関係より, 弱形式の左辺を速度型にしたもの (すなわち速度型の仮想仕事式) をマトリクス表示することによって, 接線剛性マトリクスを求めることができる.

- 弱形式の左辺を速度型にすると

$$\left(\int_{\Omega} S_{ij} \delta E_{ij} dV \right)' = \int_{\Omega} \dot{S}_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \delta \dot{E}_{ij} d\Omega \quad (181)$$

- 構成式が以下のように与えられるとする

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (182)$$

- C_{ijkl} が一定とすると

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \quad (183)$$

- 例 : Hooke 則

$$S_{ij} = \lambda(\text{tr} E_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad (184)$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{kl} \delta_{ij} + 2\mu \delta_{ki} \delta_{jl} \quad (185)$$

接線剛性マトリクス 2

- これを代入すると

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \dot{S}_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \delta \dot{E}_{ij} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta E_{ij} + S_{ij} \delta \dot{E}_{ij} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta E_{ij} + S_{ij} \frac{1}{2} (\delta F_{ki} \dot{F}_{kj} + \dot{F}_{ki} \delta F_{kj}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \delta E_{ij} + S_{ij} (\delta F_{ki} \dot{F}_{kj}) d\Omega
 \end{aligned} \tag{186}$$

- S_{ij} は, \dot{E}_{kl} が k, l に関して対称であることから

$$\begin{aligned}
 S_{ij} &= C_{ij11} \dot{E}_{11} + C_{ij22} \dot{E}_{22} + C_{ij33} \dot{E}_{33} \\
 &+ \frac{1}{2} (C_{ij12} + C_{ij21}) 2\dot{E}_{12} + \frac{1}{2} (C_{ij23} + C_{ij32}) 2\dot{E}_{23} + \frac{1}{2} (C_{ij31} + C_{ij13}) 2\dot{E}_{31}
 \end{aligned} \tag{187}$$

- ここで

$$\bar{C}_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) \tag{188}$$

を定義すると, \bar{S} は次のようにマトリクス表示ができる.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \bar{C}_{1111} & \bar{C}_{1122} & \bar{C}_{1133} & \bar{C}_{1112} & \bar{C}_{1123} & \bar{C}_{1131} \\ \bar{C}_{2211} & \bar{C}_{2222} & \bar{C}_{2233} & \bar{C}_{2212} & \bar{C}_{2223} & \bar{C}_{2231} \\ \bar{C}_{3311} & \bar{C}_{3322} & \bar{C}_{3333} & \bar{C}_{3312} & \bar{C}_{3323} & \bar{C}_{3331} \\ \bar{C}_{1211} & \bar{C}_{1222} & \bar{C}_{1233} & \bar{C}_{1212} & \bar{C}_{1223} & \bar{C}_{1231} \\ \bar{C}_{2311} & \bar{C}_{2322} & \bar{C}_{2333} & \bar{C}_{2312} & \bar{C}_{2323} & \bar{C}_{2331} \\ \bar{C}_{3111} & \bar{C}_{3122} & \bar{C}_{3133} & \bar{C}_{3112} & \bar{C}_{3123} & \bar{C}_{3131} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ 2\dot{E}_{12} \\ 2\dot{E}_{23} \\ 2\dot{E}_{31} \end{array} \right\} \quad (189)$$

接線剛性マトリクス 3

- この \bar{C}_{ijkl} を並べた 6 行 6 列のマトリクスを $[D]$ とする.
- \bar{C}_{ijkl} は, ij , kl について対称であるから, $[D]$ は対称である.
- また, 記述の簡略化のために,

$$\{S\} = \{S_{11} S_{22} S_{33} S_{12} S_{23} S_{31}\}^T \quad (190)$$

$$\{\dot{E}\} = \{\dot{E}_{11} \dot{E}_{22} \dot{E}_{33} 2\dot{E}_{12} 2\dot{E}_{23} 2\dot{E}_{31}\}^T \quad (191)$$

を定義すると,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \delta E_{ij} C_{ijkl} \dot{E}_{kl} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{\delta E\}^T [D] \{\dot{E}\} d\Omega \end{aligned} \quad (192)$$

- さらに

$$\{\dot{u}^{(n)}\} \equiv \{\dot{u}_1^{(1)} \dot{u}_2^{(1)} \dot{u}_3^{(1)} \cdots \dot{u}_1^{(n)} \dot{u}_2^{(n)} \dot{u}_3^{(n)}\}^T \quad (193)$$

を定義すると,

$$\{\dot{E}\} = [B] \{\dot{u}^{(n)}\} \quad (194)$$

と表せる.

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial X_j} \right) \quad (195)$$

接線剛性マトリクス 4

- 以上より, 弱形式の第 1 項は

$$\int_{\Omega} \delta E_{ij} \dot{S}_{ij} d\Omega = \sum_e \left[\left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \right] \quad (196)$$

となる.

- 剛性マトリックスのこの項を「初期変位項」などと呼ぶ

接線剛性マトリクス 5

- 次に, 弱形式の第 2 項 $\delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj}$ について考える .
- 総和規約を展開して, 強引にまとめると, 以下のようにマトリックスを用いて整理することができる .

$$\begin{aligned}
 \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} = & \quad \{\delta F_{11} \delta F_{12} \delta F_{13}\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{11} \\ \dot{F}_{12} \\ \dot{F}_{13} \end{Bmatrix} \\
 & + \{\delta F_{21} \delta F_{22} \delta F_{23}\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{21} \\ \dot{F}_{22} \\ \dot{F}_{23} \end{Bmatrix} \\
 & + \{\delta F_{31} \delta F_{32} \delta F_{33}\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{31} \\ \dot{F}_{32} \\ \dot{F}_{33} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{197}$$

• ここで,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (198)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [\sigma] & & \\ & [\sigma] & \\ & & [\sigma] \end{bmatrix} \quad (199)$$

$$\{\delta F\} = \{\delta F_{11} \delta F_{12} \delta F_{13} \delta F_{21} \delta F_{22} \delta F_{23} \delta F_{31} \delta F_{32} \delta F_{33}\}^T \quad (200)$$

$$\{\dot{F}\} = \{\dot{F}_{11} \dot{F}_{12} \dot{F}_{13} \dot{F}_{21} \dot{F}_{22} \dot{F}_{23} \dot{F}_{31} \dot{F}_{32} \dot{F}_{33}\}^T \quad (201)$$

を定義すると,

$$\delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} = \{\delta F\}^T [\Sigma] \{\dot{F}\} \quad (202)$$

接線剛性マトリクス 6

- さらに,

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \quad (203)$$

$$\dot{F}_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} \quad (204)$$

より, 先の $[Z_2]$ を用いることにより

$$\{\delta F\} = \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} = [Z_2] \left\{ \delta u^{(n)} \right\} \quad (205)$$

$$\{\dot{F}\} = [Z_2] \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \quad (206)$$

- これらより,

$$\delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} = \left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T [Z_2]^T [\Sigma] [Z_2] \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \quad (207)$$

- $T[Z_2]^T[\Sigma][Z_2]$ について計算すると,

$$[A_{ij}] = \left\{ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial X_1} \quad \frac{\partial N^{(i)}}{\partial X_2} \quad \frac{\partial N^{(i)}}{\partial X_3} \right\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N^{(j)}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N^{(j)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^{(j)}}{\partial X_3} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (208)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & \dots & [A_{1n}] \\ [A_{21}] & \dots & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ [A_{n1}] & \dots & \dots & [A_{nn}] \end{bmatrix} \quad (209)$$

を定義すると,

$$[Z_2]^T[\Sigma][Z_2] = [A] \quad (210)$$

接線剛性マトリクス 7

- 以上より, 速度型弱形式の第 2 項は

$$\int_{\Omega} \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} d\Omega = \sum_e \left[\left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T \int_{\Omega_e} [A] d\Omega \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \right] \quad (211)$$

となる.

- 剛性マトリックスのこの項を「初期応力項」などと呼ぶ.
- 以上をまとめると, 速度型の仮想仕事式は

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta E_{ij} \dot{S}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} d\Omega \\ &= \sum_e \left[\left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T \int_{\Omega_e} ([B]^T [D] [B] + [A]) d\Omega \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (212)$$

のようにマトリクス表示ができる.

- すなわち, 接線剛性マトリックスは以下のように表される

$$\sum_e \int_{\Omega_e} ([B]^T [D] [B] + [A]) d\Omega \quad (213)$$

Updated Lagrange

- 現配置基準の弱形式

$$\int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_{(L)} dv = \int_{\delta v} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} ds + \int_v \rho g \cdot \mathbf{w} dv \quad (214)$$

ただし $\delta \mathbf{A}_{(L)}$ は, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ から導かれる Almange ひずみの線形成分である.

$$\delta \mathbf{A}_{(L)ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \quad (215)$$

- これを基にしたのが Updated Lagrange 法

- 内力ベクトル

$$\int_v \delta A_{ij} T_{ij} dv = \delta R \quad (216)$$

ただし, δR は外力の仮想仕事で, A_{ij} は以下に示すような, Almange ひずみの線形成分である.

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (217)$$

- T_{ij} は構成式から求める .

内力ベクトル 1

- 被積分関数 $\delta A_{ij}T_{ij}$ は通常以下のようにマトリックス表示される.
- まず, $\delta A_{ij}T_{ij}$ の総和をすべて書けば以下のようなになる.

$$\begin{aligned}\delta A_{ij}T_{ij} &= \delta A_{11}T_{11} + \delta A_{12}T_{12} + \delta A_{13}T_{13} \\ &\quad + \delta A_{21}T_{21} + \delta A_{22}T_{22} + \delta A_{23}T_{23} \\ &\quad + \delta A_{31}T_{31} + \delta A_{32}T_{32} + \delta A_{33}T_{33}\end{aligned}\tag{218}$$

$$= \delta A_{11}T_{11} + \delta A_{22}T_{22} + \delta A_{33}T_{33}\tag{219}$$

$$+ 2\delta A_{12}T_{12} + 2\delta A_{23}T_{23} + 2\delta A_{31}T_{31}\tag{220}$$

ただし, $\delta A_{ij}, T_{ij}$ が i, j について対称であることを用いている.

- ここで,

$$\{\delta A\}^T = \{\delta A_{11} \ \delta A_{22} \ \delta A_{33} \ 2\delta A_{12} \ 2\delta A_{23} \ 2\delta A_{31}\}^T\tag{221}$$

$$\{T\} = \{T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{12} \ T_{23} \ T_{31}\}\tag{222}$$

とすると, 以下のように表せる.

$$\int_v \delta A_{ij}T_{ij} \, dv = \int_v \{\delta A\}^T \{T\} \, dv\tag{223}$$

内力ベクトル 2

- 次に, δA_{ij} の離散化を行なう. δA_{ij} の成分は以下のようになっている.

$$\delta A_{11} = \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \quad (224)$$

$$\delta A_{22} = \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \quad (225)$$

$$\delta A_{33} = \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \quad (226)$$

$$2\delta A_{12} = \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \quad (227)$$

$$2\delta A_{23} = \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_2} \quad (228)$$

$$2\delta A_{31} = \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \quad (229)$$

- 通常有限要素法の変位場の補間は,

$$u_i = N^{(k)} u_i^{(k)} \quad (230)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_j} u_i^{(k)} \quad (231)$$

であるが, δu_i についても変位と同様に

$$\delta u_i = N^{(k)} \delta u_i^{(k)} \quad (232)$$

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_j} \delta u_i^{(k)} \quad (233)$$

とする.

• ここで,

$$\{\delta u\} = \left\{ \delta u_1^{(1)} \delta u_2^{(1)} \delta u_3^{(1)} \delta u_1^{(2)} \delta u_2^{(2)} \delta u_3^{(2)} \cdots \delta u_1^{(n)} \delta u_2^{(n)} \delta u_3^{(n)} \right\}^T \quad (234)$$

とすると, 以下のように表すことができる.

$$\{\delta A\} = [B] \{\delta u\} \quad (235)$$

ただし, $[B]$ はサブマトリックス $[B^{(k)}]$ を並べたもので, 以下のように定義される.

$$[B] = \left[[B^{(1)}] [B^{(2)}] \cdots [B^{(n)}] \right] \quad (236)$$

$$[B^{(k)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} & & \\ & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} & \\ & & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} & \\ & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} & & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (237)$$

- 以上より仮想仕事の式は, 以下のようにマトリックス表示できる.

$$\int_v \delta A_{ij} T_{ij} dv = \int_v \{\delta u\}^T [B]^T \{T\} dv \quad (238)$$

内力ベクトル Q は,

$$Q = \int_v [B]^T [T] dv \quad (239)$$

である.

- なお, 幾何学的非線形性を考慮しない場合は積分領域は変形前の体積 V に, δA_{ij} は微小ひずみに置き換えられる

$$\delta A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} \right) \quad (240)$$

剛性マトリックス 1

- 次に剛性マトリックスを導く.
- 先に述べたように, Newton-Raphson 法などの増分解法を用いる場合, 内力ベクトル Q を変位 u で微分することにより剛性マトリックス K が得られる.

$$K = \frac{\partial Q}{\partial u} \quad (241)$$

- しかしながら, 直接 u で微分することは煩雑なので, 通常は

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial u} \dot{u} \quad (242)$$

であることをもとに, 弱形式の式を時間微分した速度型の仮想仕事式を導き, これを有限要素離散化することにより剛性マトリックスを導く.

- しかしながら現配置基準の弱形式をそのまま時間微分することも困難なので, まずこれを変形前配置基準に書きなおす.

$$\int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_{(L)} dv = \int_{\delta v} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} ds + \int_v \rho g \cdot \mathbf{w} dv \quad (243)$$

剛性マトリックス 2

- 変形勾配 F , 及び体積変化率 J は以下のように定義される.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (244)$$

$$J = \det \mathbf{F} \quad (245)$$

- これらを用いて, 第 2 Piola-Kirchhoff 応力 S は以下のように定義される.

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (246)$$

- S と共役なひずみである Green-Lagrange ひずみ E 及びその変分 δE は以下のように定義される.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (247)$$

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right) \quad (248)$$

- このとき δA と δE には以下の関係が成立する.

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad (249)$$

- 以上を用いると,

$$\int_v \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV = \int_v (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}) : (J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \frac{1}{J} \, dv \quad (250)$$

$$= \int_v \delta \mathbf{A} : \mathbf{T} \, dv \quad (251)$$

となる.

剛性マトリックス 3

- $\int_V \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV$ の時間微分は以下ようになる。これが Total-Lagrange 法による速度型の仮想仕事式である。

$$\int_V \delta \mathbf{E} : \dot{\mathbf{S}} + \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \delta \mathbf{F} \right) : \mathbf{S} \, dV \quad (252)$$

- これを現配置基準に書きなおす。
- まず現配置を基準配置とする第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{S}_t(t)$ の速度 $\dot{\mathbf{S}}_t(t)$ と $\dot{\mathbf{S}}$ の間には以下の関係がある。

$$\dot{\mathbf{S}} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{S}}_t(t) \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (253)$$

- これより被積分関数第 1 項は,

$$\delta \mathbf{E} : \dot{\mathbf{S}} = (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}) : (J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S}_t(t) \cdot \mathbf{F}^{-T}) \quad (254)$$

$$= J \delta \mathbf{A} : \dot{\mathbf{S}}_t(t) \quad (255)$$

- したがって,

$$\int_V \delta \mathbf{E} : \dot{\mathbf{S}} \, dV = \int_v \delta \mathbf{A} : \dot{\mathbf{S}}_t(t) \, dv \quad (256)$$

剛性マトリックス 4

- $\dot{\mathbf{F}}$ および $\delta \mathbf{F}$ は、以下のように表すことができる.

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \quad (257)$$

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{F}_t(t) \cdot \mathbf{F} \quad (258)$$

- ただし, \mathbf{L} は変形速度勾配

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (259)$$

- これより, 被積分関数第 2 項は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \delta \mathbf{F} \right) : \mathbf{S} \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}_t(t)^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \delta \mathbf{F}_t(t) \cdot \mathbf{F} \right) : (\mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \\ &= \mathbf{J} \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}_t(t)^T \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \delta \mathbf{F}_t(t) \right) : \mathbf{T} \end{aligned} \quad (260)$$

- したがって

$$\int_V \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \delta \mathbf{F} \right) : \mathbf{S} \, dV = \int_v \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}_t(t)^T \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \delta \mathbf{F}_t(t) \right) : \mathbf{T} \, dv \quad (261)$$

- 以上から updated Lagrange 法による速度型の仮想仕事式は以下のように導かれる.

$$\int_v \delta \mathbf{A} : \dot{\mathbf{S}}_t(t) + \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}_t(t)^T \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \delta \mathbf{F}_t(t) \right) : \mathbf{T} \, dv = \delta \dot{R} \quad (262)$$

剛性マトリックス 5

- マトリックス表示を行うために成分で書くと以下のようなになる.

$$\int_v \delta A_{ij} \dot{S}_t(t)_{ij} dv + \int_v \left\{ \frac{1}{2} (\delta F_t(t)_{ki} L_{kj} + L_{ki} \delta F_t(t)_{kj}) T_{ij} \right\} dv = \delta \dot{R} \quad (263)$$

- まず, 左辺第1項のマトリックス表示を行なう.
- 記述の簡略化のために, 以下では $\dot{S}_t(t)$ を \dot{S} $F_t(t)$ を F と記述する.
- 被積分関数 $\delta A_{ij} T_{ij}$ は仮想仕事式の場合と同様に以下のようにマトリックス表示できる.

$$\delta A_{ij} \dot{S}_{ij} = \{\delta A\}^T \{\dot{S}\} \quad (264)$$

$$\dot{S} = \{\dot{S}_{11} \dot{S}_{22} \dot{S}_{33} \dot{S}_{12} \dot{S}_{23} \dot{S}_{31}\} \quad (265)$$

- ここで, \dot{S}_{ij} と D_{ij} の間に以下のような関係があるとする.

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (266)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (267)$$

- $\dot{S}_t(t)$ は Truesdell 応力速度, 相対 Kirchoff 応力の Oldroyd 速度で, 客観性がある.

剛性マトリックス 5

- $\dot{S}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl}$ を成分で書くと以下のようなになる.

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ij} &= C_{ij11} D_{11} + C_{ij12} D_{12} + C_{ij13} D_{13} \\ &\quad + C_{ij21} D_{21} + C_{ij22} D_{22} + C_{ij23} D_{23} \\ &\quad + C_{ij31} D_{31} + C_{ij32} D_{32} + C_{ij33} D_{33} \end{aligned} \tag{268}$$

$$\begin{aligned} &= C_{ij11} D_{11} + C_{ij22} D_{22} + C_{ij33} D_{33} \\ &\quad + \frac{1}{2} (C_{ij12} + C_{ij21}) (2D_{12}) \end{aligned} \tag{269}$$

$$+ \frac{1}{2} (C_{ij23} + C_{ij32}) (2D_{23}) \tag{270}$$

$$+ \frac{1}{2} (C_{ij31} + C_{ij13}) (2D_{31}) \tag{271}$$

- ここで,

$$\tilde{C}_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) \tag{272}$$

として, $\{\dot{S}\} = [\tilde{C}] \{D\}$ の形式で表す.

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{S}_{11} \\ \dot{S}_{22} \\ \dot{S}_{33} \\ \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{23} \\ \dot{S}_{31} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1133} & \tilde{C}_{1112} & \tilde{C}_{1123} & \tilde{C}_{1131} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2233} & \tilde{C}_{2212} & \tilde{C}_{2223} & \tilde{C}_{2231} \\ \tilde{C}_{2311} & \tilde{C}_{3322} & \tilde{C}_{3333} & \tilde{C}_{2312} & \tilde{C}_{3323} & \tilde{C}_{3331} \\ \tilde{C}_{1211} & \tilde{C}_{1222} & \tilde{C}_{1233} & \tilde{C}_{1212} & \tilde{C}_{1223} & \tilde{C}_{1231} \\ \tilde{C}_{2311} & \tilde{C}_{2322} & \tilde{C}_{2333} & \tilde{C}_{2312} & \tilde{C}_{2323} & \tilde{C}_{2331} \\ \tilde{C}_{3111} & \tilde{C}_{3122} & \tilde{C}_{3133} & \tilde{C}_{3112} & \tilde{C}_{3123} & \tilde{C}_{3131} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{33} \\ 2D_{12} \\ 2D_{23} \\ 2D_{31} \end{array} \right\} \quad (273)$$

剛性マトリックス 6

- δA_{ij} と同様の操作により,

$$\{D\} = [B] \{\dot{u}\} \quad (274)$$

$$\{\dot{u}\} = \left\{ \dot{u}_1^{(1)} \ \dot{u}_2^{(1)} \ \dot{u}_3^{(1)} \ \dot{u}_1^{(2)} \ \dot{u}_2^{(2)} \ \dot{u}_3^{(2)} \ \cdots \ \dot{u}_1^{(n)} \ \dot{u}_2^{(n)} \ \dot{u}_3^{(n)} \right\}^T \quad (275)$$

とすると, 左辺第1項は以下のようにマトリックス表示できる.

$$\int_v \delta A_{ij} \dot{S}_t(t)_{ij} \, dv = \int_v \{\delta u\}^T [B]^T [\tilde{D}] [B] \{\dot{u}\} \, dv \quad (276)$$

- 剛性マトリックスのこの項を「初期応力項」などと呼ぶ

剛性マトリックス 7

- 次に左辺第2項のマトリックス表示を行なう.
- $T_{ij} = T_{ji}$ を用いると, 以下のようになる.

$$\frac{1}{2} (\delta F_{ki} L_{kj} + L_{ki} \delta F_{kj}) T_{ij} = \frac{1}{2} T_{ij} L_{ki} \delta F_{kj} + \frac{1}{2} T_{ij} \delta F_{ki} L_{kj} \quad (277)$$

$$= \delta F_{ki} T_{ij} L_{kj} \quad (278)$$

- これは以下のようにマトリックス表示を行なうことができる.

$$\delta F_{ki} T_{ij} L_{kj} = \{\delta F\}^T [\Sigma] \{L\} \quad (279)$$

ただし,

$$\{\delta F\} = \{\delta F_{11} \delta F_{12} \delta F_{13} \delta F_{21} \delta F_{22} \delta F_{23} \delta F_{31} \delta F_{32} \delta F_{33}\} \quad (280)$$

$$\{L\} = \{L_{11} L_{12} L_{13} L_{21} L_{22} L_{23} L_{31} L_{32} L_{33}\} \quad (281)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (282)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [T] & [0] & [0] \\ [0] & [T] & [0] \\ [0] & [0] & [T] \end{bmatrix} \quad (283)$$

剛性マトリックス 8

- $\delta F_{ij}, L_{ij}$ と節点変位の関連付けを行なう.

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (284)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \quad (285)$$

それぞれ以下のようにマトリックス表示する.

$$\{\delta F\} = \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\} = [Z] \{\delta u\} \quad (286)$$

$$\{L\} = \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right\} = [Z] \{\dot{u}\} \quad (287)$$

ただし,

$$\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right\} = \left\{ \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \right\} \quad (288)$$

$$\left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right\} = \left\{ \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_3} \quad \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_3} \right\} \quad (289)$$

剛性マトリックス 9

- 以上から, $\delta F_{ki} T_{ij} L_{kj}$ は以下のようにマトリックス表示できる.

$$\delta F_{ki} T_{ij} L_{kj} = \{\delta F\}^T [\Sigma] \{L\} \quad (291)$$

$$= \{\delta u\}^T [Z]^T [\Sigma] [Z] \{\dot{u}\} \quad (292)$$

- $[Z]^T [\Sigma] [Z]$ を計算すると以下のようになる.

$$[G_{ij}] = \left(\left\{ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_3} \right\} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (293)$$

として

$$[Z]^T [\Sigma] [Z] = \begin{bmatrix} [G_{11}] & \cdots & [G_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [G_{n1}] & \cdots & [G_{nn}] \end{bmatrix} = [G] \quad (294)$$

- 以上から

$$\int_v \delta F_{ki} T_{ij} L_{kj} dv = \int_v \{\delta u\} [G] \{\dot{u}\} dv \quad (295)$$

剛性マトリックス 10

- 以上より剛性マトリックスは以下のように導かれる.

$$\begin{aligned} & \int_v (\delta A_{ij} S_t(t)_{ij} + \delta F_{ki} T_{ij} L_{kj}) dv \\ & = \{\delta u\}^T \int_v \left([B]^T [\tilde{D}] [B] + [G] \right) dv \{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (296)$$

- なお幾何学的非線形性を考慮しない場合は積分領域は変形前の体積 V に, δA_{ij} は微小ひずみに, $\dot{S}_t(t)_{ij}$ は Cauchy 応力におきかえられる. また第 2 項は消滅する.

剛性マトリックス 11

- 内力ベクトルや，接線剛性マトリックスの領域積分は，以下に示すようにして
- まず，微分の連鎖則を用い以下のように変更する．

$$\int_v dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\det J) dr_1 dr_2 dr_3 \quad (297)$$

ただし，

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (298)$$

ヤコビアン $[J]$ の各成分は以下のように求める．

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_j} x_i^{(k)} = \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_j} \left(X_i^{(k)} + u_i^{(k)} \right) \quad (299)$$

- また， $[B]$ マトリックスを計算する際に用いる， $\frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_j}$ は以下のようにヤコビアン $[J]$ の逆マトリックスを用いて求める．

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & \frac{\partial r_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_3} & \frac{\partial r_2}{\partial x_3} & \frac{\partial r_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial r_3} \end{Bmatrix} \quad (300)$$

ここで

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & \frac{\partial r_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_3} & \frac{\partial r_2}{\partial x_3} & \frac{\partial r_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (301)$$

- なお幾何学非線形性を考慮しないときは, ヤコビアン $[J]$ は

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r_1} & \frac{\partial X_1}{\partial r_2} & \frac{\partial X_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial r_1} & \frac{\partial X_2}{\partial r_2} & \frac{\partial X_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial r_1} & \frac{\partial X_3}{\partial r_2} & \frac{\partial X_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (302)$$

total Lagrange と updated Lagrange 1

- 境界値問題は弱形式にすると

$$\int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_{(L)} dv = \int_{\partial v} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} ds + \int_v \rho g \cdot \mathbf{w} dv \quad (303)$$

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_{\partial V} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} dS + \int_V \rho g \cdot \mathbf{w} dV \quad (304)$$

- 速度型にすると,

$$\int_v \delta \mathbf{A} : \dot{\mathbf{S}}_t(t) + \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{F}_t(t)^T \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \delta \mathbf{F}_t(t) \right) : \mathbf{T} dv = \delta \dot{R} \quad (305)$$

$$\left(\int_{\Omega} S_{ij} \delta E_{ij} dV \right)' = \int_{\Omega} \dot{S}_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \delta \dot{E}_{ij} d\Omega \quad (306)$$

- updated のところで使った構成則

$$\dot{S}_t(t)_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (307)$$

- $\dot{S}_t(t)$ は Truesdell 応力速度, 相対 Kirchoff 応力の Oldroyd 速度で, 客観性がある.

- Total のところで使った構成式

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (308)$$

- C_{ijkl} が一定とすると ($\dot{S}_{ij}, \dot{E}_{kl}$ とともに, 観測不変量)

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \quad (309)$$

total Lagrange と updated Lagrange 2

- 異なる構成式

$$\dot{S}_t(t)_{ij} = \bar{C}_{ijkl} D_{kl} \quad (310)$$

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (311)$$

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl} \dot{E}_{kl} \quad (312)$$

- 両者の関係は、

$$\dot{S}_0(t) = J_0(t) \mathbf{F}_0(t)^{-1} \dot{S}_t(t) \mathbf{F}_0(t)^{-T} \quad (313)$$

$$\dot{E}_0(t) = \mathbf{F}_0(t)^T \mathbf{D} \mathbf{F}_0(t) \quad (314)$$

を用いることにより、

$$\bar{C}_{pqrs} = \frac{1}{J} F_{pi} F_{qj} F_{rk} F_{sl} C_{ijkl} \quad (315)$$

と導かれる。

- このような構成式の変換を行って初めて、2つの定式化は一致する

演習

- 式 (103) から 式 (117) までを確認せよ。
- Newton-Raphson 法を使って $\sqrt{2}$ を計算せよ
- 式 (157) から 式 (173) までを確認せよ。
- 式 (180) から 式 (213) までを確認せよ。
- 式 (214) から 式 (240) までを確認せよ。
- 式 (241) から 式 (302) までを確認せよ。
- 式 (241) から 式 (302) までを確認せよ。
- 式 (303) から 式 (315) までを確認せよ。