

非線形有限要素法特論

2004 年 11 月 8 日

非線形有限要素法特論

- 講義内容は、非線形有限要素法の解説
- 夏学期の「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる。
- 受講していない場合は、「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著、丸善を読んで理解しておくこと。
- 講義資料は<http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2004> からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003> から昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「有限要素法特論」ですが、基本的に同じ内容です。
- 今年度（2004）から新設した演習は、翌週の講義時間に提出してください。必須ではありませんし、採点しませんが、実際に手を動かして計算することは有限要素法の理解を深める上で重要です。
- 質問などは、nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp まで。

非線形有限要素法特論講義予定

1.	10/ 4	微分方程式の境界値問題の有限要素解析
2.	10/18	線形弾性体の有限要素解析
3.	10/25	アイソパラメトリックソリッド要素 (プログラム)
4.	11/ 1	連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 (演習あり)
5.	11/ 8	線形有限要素法の基本的なプログラム構造 (プログラム)
6.	11/15	幾何学非線形問題の有限要素定式化 (プログラム)
7.	11/22	非線形方程式の静的解析手法、超弾性体、弾塑性体 (プログラム)
8.	11/29	第 7 回の演習
9.	12/ 6	非線形方程式の動的解析手法、固有値解析
10.	12/13	構造要素
11.	12/20	連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法
12.	1/17	ALE 有限要素流体解析
13.	1/24	ALE 有限要素流体解析

線形弾性体の境界値問題

下図に示すような、線形弾性体 A についての境界値問題 $[B]$ を考える。

$[B]$ 物体 A が占める領域を Ω , Ω の境界を $\partial\Omega$ とし, $\partial\Omega$ の部分集合 $\partial\Omega_D$ 上では変位境界条件が与えられているものとする. このような系に表面力 t , 体積力 ρg が作用するとき, つり合い条件を満たす変位 $u \in \mathcal{V}$ を求めよ. ただし, ρ は密度, g は重力加速度, \mathcal{V} は変位の許容関数すなわち変位境界条件を満たす解の候補全体の集合とする.

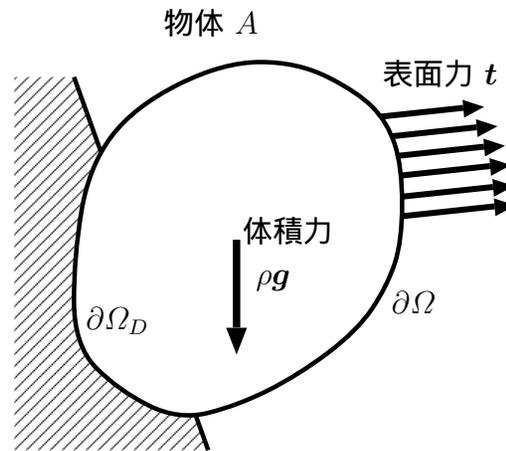


図 1: 境界値問題概念図

- 線形弾性体とは, いわゆる Hooke 則に従う物質のことで, 鉄やゴムなど, 一般に等方で, 応力が変位のみ依存するような物質の微小変形をモデル化できる.
- 物体の表面 $\partial\Omega$ 上のすべての点で, 表面力あるいは, 変位境界条件が与えられる. これは $\partial\Omega_D$ 以外のすべての点で表面力が与えられることを意味するが, その値が 0 である場合はわざわざ書かないことが多いので注意.

記号の定義

- ある基準時刻 t_0 における物体の配置を基準配置とし, 各物質点の位置ベクトルを X
- 物質点 X の現時刻 t における位置ベクトルを x
- 物質点の時刻 t_0 から t までの変位ベクトル u

$$u = x - X \quad (1)$$

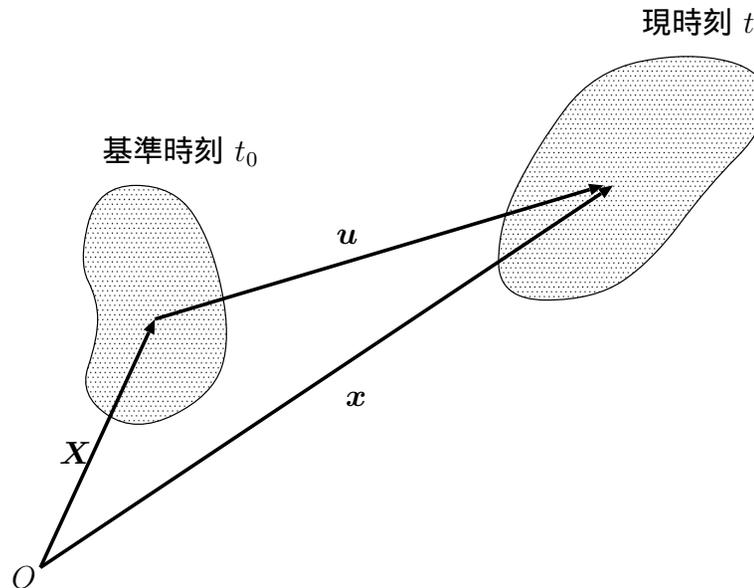


図 2: 物質点の運動

強形式 1

この問題は以下のように定式化できる.

[B] 与えられた t, g に対し, 以下を満たすような $u \in \mathcal{V}$ を求めよ.

[1] 平衡方程式 (Cauchy の第 1 運動法則)

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (2)$$

[2] 境界条件式

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_D \quad (3)$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on} \quad \partial\Omega - \partial\Omega_D \quad (4)$$

[3] 変位・ひずみ関係式

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (5)$$

[4] 応力・ひずみ関係式 (構成式)

$$T_{ij} = \kappa(\operatorname{div} \mathbf{u})\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(\mathbf{u}) \quad (6)$$

- このうち [1], [2] はいかなる問題でも共通 (ただし, 必要に応じて等価なものに書き換えることがある.), [4] は対象とする物質モデルで決まる. [3] は [4] に対応するものが選ばれる.

記号の定義

この問題は以下のように定式化できる.

[B] 与えられた t, g に対し, 以下を満たすような $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ を求めよ.

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (9)$$

$$T_{ij} = \kappa(\operatorname{div} \mathbf{u})\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(\mathbf{u}) \quad (10)$$

- \mathcal{V} 変位の許容関数全体の集合
- \mathbf{T} Cauchy 応力
- κ, G 体積弾性係数, せん断弾性係数 (物性値)
- δ_{ij} Kronecker のデルタ記号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (11)$$

- $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^D$ 線形ひずみ, 偏差ひずみ

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij}^D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \mathbf{u})\delta_{ij}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \operatorname{tr}(\varepsilon_{ij}) \quad (13)$$

弱形式

- 前述のように有限要素法は、偏微分方程式の弱形式をもとにした近似解法である。

- $[B]$ に対応した弱形式は、以下の $[V]$ である。

$[V]$ 与えられた表面力 t と体積力 ρg に対し以下の条件を満たす $u \in \mathcal{V}$ を求めよ。

$$\int_{\Omega} T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (14)$$

- ただし $T_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u})$ は、総和規約による。
- すなわち、

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \\ &= T_{11}(\mathbf{v}) \varepsilon_{11}(\mathbf{v}) + T_{12}(\mathbf{v}) \varepsilon_{12}(\mathbf{v}) + T_{13}(\mathbf{v}) \varepsilon_{13}(\mathbf{v}) \\ &\quad + T_{21}(\mathbf{v}) \varepsilon_{21}(\mathbf{v}) + T_{22}(\mathbf{v}) \varepsilon_{22}(\mathbf{v}) + T_{23}(\mathbf{v}) \varepsilon_{23}(\mathbf{v}) \\ &\quad + T_{31}(\mathbf{v}) \varepsilon_{31}(\mathbf{v}) + T_{32}(\mathbf{v}) \varepsilon_{32}(\mathbf{v}) + T_{33}(\mathbf{v}) \varepsilon_{33}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (15)$$

有限要素分割と補間 1

- 有限要素法では解析対象の領域 Ω をいくつかの有限の大きさを持った要素に分割する. これを形式的に以下のように表す.

$$\Omega = \sum_e \Omega_e \quad (16)$$

- これに伴い, 領域積分, 境界積分はそれぞれ次のようになる.

$$\int_{\Omega} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} d\Omega \quad (17)$$

$$\int_{\partial\Omega} dS = \sum_e \int_{\partial\Omega_e} dS \quad (18)$$

- これより弱形式の式は以下のように変更される. (以後この式を $[V_e]$ として参照する)

$$\sum_e \left[\int_{\Omega_e} T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta\mathbf{u}) d\Omega \right. \\ \left. \left[- \int_{\partial\Omega_e} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS - \int_{\Omega_e} \rho \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} d\Omega \right] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V} \right] \quad (19)$$

- 被積分関数に含まれる x, u は各要素内で同じ補間関数を用い, 以下のように近似する

$$x_i = N^{(j)} x_i^{(j)} \quad (20)$$

$$u_i = N^{(j)} u_i^{(j)} \quad (21)$$

マトリックス表示

- 以下では効率良く計算できるように、マトリックス表示に書き換えを行う。
- ここで示すようなマトリックス表示は、あくまでプログラミングのための手段であり、その意味では本質的ではなく、プログラマーが独自の方法で行ってよいものである。
- ここではなるべく標準的で、わかりやすく、他のケースにも応用しやすい方法を示す。

応力-ひずみマトリックス ($[D]$ マトリックス) 1

- $[V_e]$ 左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u})$ は、総和規約を用いずに書けば以下のようになる.

$$\sum_e \left[\int_{\Omega_e} T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \right. \\ \left. - \int_{\partial\Omega_e} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS - \int_{\Omega_e} \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} d\Omega \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (22)$$

$$T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) = T_{11}(\mathbf{u}) \varepsilon_{11}(\delta \mathbf{u}) + T_{12}(\mathbf{u}) \varepsilon_{12}(\delta \mathbf{u}) + T_{13}(\mathbf{u}) \varepsilon_{13}(\delta \mathbf{u}) \\ + T_{21}(\mathbf{u}) \varepsilon_{21}(\delta \mathbf{u}) + T_{22}(\mathbf{u}) \varepsilon_{22}(\delta \mathbf{u}) + T_{23}(\mathbf{u}) \varepsilon_{23}(\delta \mathbf{u}) \\ + T_{31}(\mathbf{u}) \varepsilon_{31}(\delta \mathbf{u}) + T_{32}(\mathbf{u}) \varepsilon_{32}(\delta \mathbf{u}) + T_{33}(\mathbf{u}) \varepsilon_{33}(\delta \mathbf{u}) \quad (23)$$

- これをなるべく少ない演算回数で計算できるように、 T_{ij} , ε_{ij} の i, j についての対称性を用いて以下のように整理する.

$$T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) \\ = T_{11}(\mathbf{u}) \varepsilon_{11}(\delta \mathbf{u}) + T_{22}(\mathbf{u}) \varepsilon_{22}(\delta \mathbf{u}) + T_{33}(\mathbf{u}) \varepsilon_{33}(\delta \mathbf{u}) \\ + 2T_{12}(\mathbf{u}) \varepsilon_{12}(\delta \mathbf{u}) + 2T_{23}(\mathbf{u}) \varepsilon_{23}(\delta \mathbf{u}) + 2T_{31}(\mathbf{u}) \varepsilon_{31}(\delta \mathbf{u}) \\ = \{\varepsilon(\delta \mathbf{u})\}^T \{T(\mathbf{u})\} \quad (24)$$

- ただし, $\{\varepsilon(\mathbf{v})\}$, $\{T(\mathbf{v})\}$ は下式により定義される.

$$\{\varepsilon(\mathbf{v})\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(\mathbf{v}) \\ \varepsilon_{22}(\mathbf{v}) \\ \varepsilon_{33}(\mathbf{v}) \\ 2\varepsilon_{12}(\mathbf{v}) \\ 2\varepsilon_{23}(\mathbf{v}) \\ 2\varepsilon_{31}(\mathbf{v}) \end{pmatrix}, \quad \{T(\mathbf{v})\} = \begin{pmatrix} T_{11}(\mathbf{v}) \\ T_{22}(\mathbf{v}) \\ T_{33}(\mathbf{v}) \\ T_{12}(\mathbf{v}) \\ T_{23}(\mathbf{v}) \\ T_{31}(\mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (25)$$

応力-ひずみマトリックス ($[D]$ マトリックス) 2

- 次に応力 T_{ij} と, ひずみ ε_{ij} の関係式

$$T_{ij} = \kappa(\operatorname{div} \mathbf{u})\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(\mathbf{u}) \quad (26)$$

を用いて $\{T(\mathbf{v})\}$ と $\{\varepsilon(\mathbf{v})\}$ を下式のようにマトリックスとベクトルの積の形式で対応させる.

$$\{T(\mathbf{v})\} = [D]\{\varepsilon(\mathbf{v})\} \quad (27)$$

- このマトリックス $[D]$ は応力 - ひずみマトリックス, あるいは構成則マトリックス, あるいは単に $[D]$ マトリックスと呼ばれている.
- $\{T_{ij}(\mathbf{v})\}$ に含まれている T_{ij} の成分をそれぞれ書き下せば以下のようなになる.

$$T_{11} = \kappa(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{11} - \frac{2G}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (28)$$

$$T_{22} = \kappa(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{22} - \frac{2G}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (29)$$

$$T_{33} = \kappa(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{33} - \frac{2G}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (30)$$

$$T_{12} = 2G\varepsilon_{12} \quad (31)$$

$$T_{23} = 2G\varepsilon_{23} \quad (32)$$

$$T_{31} = 2G\varepsilon_{31} \quad (33)$$

応力-ひずみマトリックス ($[D]$ マトリックス) 3

- これを強引にマトリックス表示に書き直すと以下ようになる.

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & & & \\ -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & & & \\ -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \\ & & & & & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

- 以下のように $[D_v]$, $[D_d]$ を定義する.

$$[D_v] = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad [D_d] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & & & \\ -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & & & \\ -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \\ & & & & & & G \end{bmatrix} \quad (35)$$

- これらを用い, 下式のように $[D]$ を定義する

$$[D] = [D_v] + [D_d] \quad (36)$$

- 以上を用いると, $[V_e]$ 左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta\mathbf{u})$ は以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta\mathbf{u}) &= \{\varepsilon(\delta\mathbf{u})\}^T \{\mathbf{T}(\mathbf{u})\} \\ &= \{\varepsilon(\delta\mathbf{u})\}^T [D] \{\varepsilon(\mathbf{u})\} \end{aligned} \tag{37}$$

節点変位-ひずみマトリックス ($[B]$ マトリックス) 1

- 変位と線形ひずみ

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (38)$$

- 変位と節点変位

$$u_i = N^{(j)} u_i^{(j)} \quad (39)$$

- これらを総合し線形ひずみと節点変位を以下のようにマトリックスとベクトルの積の形式で対応させる.
- このマトリックス $[B]$ は, 節点変位-ひずみマトリックス, あるいは単に $[B]$ マトリックスと呼ばれている. ただし n は一要素あたりの節点数である.

$$\{\varepsilon(\mathbf{u})\} = [B] \{u_i^{(n)}\} \quad (40)$$

- ただし, $\{u_i^{(n)}\}$ は下式により定義される.

$$\{u_i^{(n)}\} = \left\{ u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, \dots, u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)} \right\}^T \quad (41)$$

節点変位-ひずみマトリックス ($[B]$ マトリックス) 2

- ひずみの計算に必要な $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ は, 節点変位が位置ベクトル x には依存しない量であることから, 次のようになる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} u_i^{(n)} \quad (42)$$

- また

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad (43)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \quad (44)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \quad (45)$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \quad (46)$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \quad (47)$$

$$2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \quad (48)$$

であることを考えると,

節点変位-ひずみマトリックス ($[B]$ マトリックス) 3

- 具体的に成分は

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_1^{(n)} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_2^{(n)} \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} u_3^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_3} u_3^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} u_3^{(n)} \\
 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_2^{(n)} \\
 &\quad + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_1^{(n)} \\
 2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_3^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_3^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_3^{(n)} \\
 &\quad + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_3} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} u_2^{(n)} \\
 2\varepsilon_{31} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_3} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} u_1^{(n)} \\
 &\quad + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_3^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_3^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_3^{(n)}
 \end{aligned} \tag{49}$$

要素剛性マトリックス

- この $[B]$ を用いると, $[V_e]$ 第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u})$ は以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) &= \{\varepsilon(\delta \mathbf{u})\}^T \{\mathbf{T}(\mathbf{u})\} \\ &= \{\varepsilon(\delta \mathbf{u})\}^T [D] \{\varepsilon(\mathbf{u})\} \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T [B]^T [D] [B] \{u_i^{(n)}\} \end{aligned} \quad (52)$$

- $\{\delta u_i^{(n)}\}$, $\{u_i^{(n)}\}$ は節点での値であり, 領域内では定数となり領域積分には関係ないので, 積分記号の外に出すことができる. 即ち,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_e} T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_e} \{\delta u_i^{(n)}\}^T [B]^T [D] [B] \{u_i^{(n)}\} d\Omega \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \left[\int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \right] \{u_i^{(n)}\} \end{aligned} \quad (53)$$

- この積分されたマトリックス即ち,

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (54)$$

を要素剛性マトリックスという.

全体剛性マトリックス 1

- 以上をまとめると,

$$\sum_e \left[\int_{\Omega_e} T_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS - \int_{\Omega_e} \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} d\Omega \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (61)$$

は, 以下のように変更される .

$$\sum_e \left[\{\delta u_i^{(n)}\}^T ([K^{(e)}] \{u_i^{(n)}\} - \{F^{(e)}\}) \right] = 0 \quad (62)$$

- この左辺を \sum を用いず, また $\{\delta u_i^{(n)}\}, \{u_i^{(n)}\}$ は要素毎になっているのを全体の節点番号につけ直されたものに変更すると, 以下のようになる .

$$\begin{aligned} & \{\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n\} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \\ &= \{\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n\} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

- 両辺をまとめると

$$\{\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n\} \left\{ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \right\} = \{0\} \quad (64)$$

全体剛性マトリックス 2

- 任意の δu に対して下式が成立するには

$$\{\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n\} \left\{ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \right\} = \{0\} \quad (65)$$

- 下式が成立しなければならない

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (66)$$

- すなわち最終的には以下のような形式の連立 1 次方程式を解いて得られた解が近似解である .

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (67)$$

- 構造解析の場合, この方程式は剛性方程式と呼ばれることもある. またこのマトリクスを全体剛性マトリクスと呼ぶ

数値積分

- 以上で求めたような，マトリックスの作成に際しては，体積あるいは面積積分を行う必要がある．
- しかしながら，要素がよほど単純な形状でない限り，被積分関数の形が複雑になり，解析的に積分することはほぼ不可能である．
- そこで，この積分を数値的に行うことになるが，有限要素法の場合，よく用いられるのは，Newton-Coate 積分，Gauss 積分などである．
- どちらも，被積分関数を Lagrange 多項式で近似し，Lagrange 多項式の性質を元に数値的に積分を求める方法である．

Lagrange 多項式 1

- 関数 $f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ を多項式で近似する .
- Lagrange 多項式とは, 関数の定義域の両端を含むサンプリング点 $\{x_n\}$, $(a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$ をとり, 下式により近似するものである .

$$f(x) \approx Q_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x) \quad (68)$$

$$H_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (69)$$

- この H_k は $n-1$ 次式であり, 対応するサンプリング点で 1, それ以外のサンプリング点では 0 という性質を持つ .

$$H_k(x_i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \quad (70)$$

- これよりサンプリング点 x_k においては

$$f(x_k) = Q_n(x_k) \quad (71)$$

- 従って $Q_n(x)$ は $f(x)$ と n 個のサンプリング点 $x_i (i = 1, \dots, n)$ で一致する $n-1$ 次式である .

- たとえば, $n = 2$ の場合 $x_1 = a, x_2 = b$

$$H_1(x) = \frac{x-b}{a-b}, \quad H_2(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} f(x) \approx Q_n(x) &= \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x) \\ &= f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \end{aligned} \quad (73)$$

これは端点をむすんだ直線である .

- 特に, $x_1 = -1, x_2 = 1$ とおくと

$$H_1(x) = \frac{1}{2}(1-x), \quad H_2(x) = \frac{1}{2}(1+x) \quad (74)$$

となり, 先に示した 1 次の場合の補間関数と一致する .

Lagrange 多項式 2

- 基本事項：2つの高々 n 次の多項式 $f(x), g(x)$ が異なる $n+1$ 点 $x_i (i = 1, \dots, n+1)$ で一致するとき f, g は一致する。

証明： $h(x) = f(x) - g(x)$ とすると $h(x)$ は高々 n 次の多項式であるが、今、 $x_i (i = 1, \dots, n+1)$ で $f(x)$ と $g(x)$ が一致するとすれば、

$$\begin{aligned} f(x_i) &= g(x_i) \quad (i = 1, \dots, n+1) \\ h(x_i) &= f(x_i) - g(x_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n+1) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1}) = 0 \end{aligned} \tag{75}$$

ただし a は適当な係数。これより $h(x)$ は $n+1$ 次式となり矛盾する。

- $f(x)$ を高々 n 次の多項式とし、これを Lagrange 多項式で近似する場合、Lagrange 多項式はサンプリング点が $n+1$ 個のとき各 $H_k(x)$ は n 次式なので、 $Q_{n+1}(x)$ は n 次式であり、上記の理由により $f(x)$ と $Q_{n+1}(x)$ は一致する。また、これはサンプリング点の取り方によらない。
- 従って、 $f(x)$ が n 次の多項式の場合、サンプリング点が $n+1$ 個であれば、 $f(x)$ と $Q_{n+1}(x)$ は一致し、さらにサンプリング点を $n+2$ 個以上で近似しても、結果は変わらない。つまり、 $Q_{n+1}(x) = Q_{n+2}(x) = \cdots$

数値積分の基礎

- これから説明する Newton-Coate 積分, Gauss 積分ともに, この Lagrange 多項式による近似を元に数値的に積分を求める方法である.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b Q_n(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b H_k(x)dx\end{aligned}\tag{76}$$

- また, 以下の積分の値は, $f(x)$ の値とは全く無関係にサンプリング点の情報からのみ求めることができ, サンプリング点 x_k に対応した「重み」と呼ぶ

$$w_k = \int_a^b H_k(x)dx\tag{77}$$

- すなわち, $f(x)$ の積分を, サンプリング点での値 $f(x_k)$ とサンプリング点 x_k に対応した重み w_k をかけたものの和をとったもので近似できる

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b Q_n(x)dx = \sum_{k=1}^n f(x_k)w_k\tag{78}$$

- 被積分関数を Lagrange 多項式で近似しているので, 数値積分の精度は基本的にサンプリング点が多ければ多いほど高い.
- ただし, 被積分関数が n 次多項式の場合, サンプリング点を $n+1$ 個とれば, 解析的に積分したものに一致する. また, $n+2$ 個以上のサンプリング点をとっても変わらない.
- $x = \frac{a}{2}(1-r) + \frac{b}{2}(1+r)$ とおくと,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x(r))\frac{dx}{dr}dr = \int_{-1}^1 f(x(r))\frac{b-a}{2}dr = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(r))dr\tag{79}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(r))dr \approx \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 Q_n(r)dr \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^n f(x_k(r))H_k(r)dr = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n f(x_k(r)) \int_{-1}^1 H_k(r)dx\end{aligned}\tag{80}$$

以下では, 積分区間を -1 から 1 までとして議論する.

Newton-Coate 積分 1

- Newton-Coate 積分では，積分区間の両端を含んで等間隔に n 個のサンプリング点を取る．
- $n = 2$ の場合は一般に台形則 (trapezoidal rule) $n = 3$ の場合は Simpson 積分と呼ばれている．
- 台形則の場合，

$$H_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x), \quad H_2(x) = \frac{1}{2}(1 + x) \quad (81)$$

なので，以下のようになる．

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^1 H_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x) dx = 1 \\ w_2 &= \int_{-1}^1 H_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + x) dx = 1 \end{aligned} \quad (82)$$

Newton-Coate 積分 2

- Simpson の場合 ,

$$\begin{aligned}H_1(x) &= \frac{1}{2}x(x-1) \\H_2(x) &= 1-x^2 \\H_3(x) &= \frac{1}{2}x(x+1)\end{aligned}\tag{83}$$

なので , 以下のようになる .

$$\begin{aligned}w_1 &= \int_{-1}^1 H_1(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x(x-1)dx = \frac{1}{3} \\w_2 &= \int_{-1}^1 H_2(x)dx = \int_{-1}^1 1-x^2dx = \frac{4}{3} \\w_3 &= \int_{-1}^1 H_3(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x(x+1)dx = \frac{1}{3}\end{aligned}\tag{84}$$

- 以下同様に求めることができる .
- 当然ながら , 被積分関数が $n-1$ 次の多項式であれば , n 個以上のサンプリング点を取れば , 完全な積分値を求めることができる .
- また , 奇関数の積分が 0 になることを考慮すると , $(2n-1)$ 次の多項式は $(2n-1)$ 個のサンプリング点を取れば正確に求められる .
- そのため , Newton-Coate 積分を行うときには , 奇数のサンプリング点をとることが多い .

Gauss 積分 1

- Gauss 積分では被積分関数を下式のような $(2n - 1)$ 次式で近似する .

$$f(x) \approx R_n(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n f(x_k) H_k(x)}_{Q_n(x)} + q(x) \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \quad (85)$$

ただし a_k は適当な係数で , $q(x)$ は以下のような n 次多項式である .

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad (86)$$

- サンプルング点 x_k においては $Q_n(x_k) = f(x_k)$, $q(x_k) = 0$ であるから ,

$$f(x_k) = R_n(x_k) \quad (87)$$

- ここでサンプルング点 $x_k (k = 1, \dots, n)$ の位置を

$$\int_{-1}^1 q(x) x^{k-1} dx = 0 \quad (88)$$

を満たすようにもとめると,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &\approx \int_{-1}^1 R_n(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x)dx + \int_{-1}^1 q(x) \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x)dx + \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\int_{-1}^1 q(x)x^{k-1} dx}_0 \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_{-1}^1 H_k(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)\end{aligned}\tag{89}$$

- これは, 被積分関数 $f(x)$ の積分を n 個のサンプリング点で $2n - 1$ 次関数の積分として近似したことを意味する.

Gauss 積分 2

- 具体的にサンプリング点の位置を求める
- $n = 1$ の時

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x - x_1)x^{1-1} dx &= \int_{-1}^1 -x_1 dx \\ &= 2x_1 = 0\end{aligned}\tag{90}$$

これより $x_1 = 0$ 対応する重みを求めると,

$$\begin{aligned}h_1(x) &= 1 \\ \int_{-1}^1 h_1(x) dx &= \int_{-1}^1 1 dx = 2\end{aligned}\tag{91}$$

- $n = 2$ の時

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)x^{1-1} dx &= \frac{2}{3} + 2x_1x_2 = 0 \\ \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)x^{2-1} dx &= -\frac{2}{3}(x_1 + x_2) = 0\end{aligned}\tag{92}$$

これより $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ 対応する重みを求めると,

$$h_1(x) = \frac{x - \sqrt{\frac{1}{3}}}{-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \sqrt{\frac{1}{3}} \right), \quad \int_{-1}^1 h_1(x) dx = 1$$

$$h_2(x) = \frac{x + \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}} \right), \quad \int_{-1}^1 h_2(x) dx = 1 \quad (93)$$

Gauss 積分 3

- $n = 3$ の時

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)x^{1-1} dx \\ &= -\frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1x_2x_3) = 0 \\ & \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)x^{2-1} dx \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{3}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0 \\ & \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)x^{3-1} dx \\ &= -\frac{2}{5}(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{2}{3}(x_1x_2x_3) = 0 \end{aligned} \tag{94}$$

これより , $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ 対応する重みを求めると ,

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= \frac{x \left(x - \sqrt{\frac{3}{5}} \right)}{-\sqrt{\frac{3}{5}} 2\sqrt{\frac{3}{5}}}, & \int_{-1}^1 h_1(x) dx &= \frac{5}{9} \\
h_2(x) &= \frac{\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)}{-\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{3}{5}}}, & \int_{-1}^1 h_2(x) dx &= \frac{8}{9} \\
h_3(x) &= \frac{x \left(x + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)}{\sqrt{\frac{3}{5}} 2\sqrt{\frac{3}{5}}}, & \int_{-1}^1 h_3(x) dx &= \frac{5}{9}
\end{aligned} \tag{95}$$

実際の数値積分のサンプリング点数

- 当然ながら，サンプリング点数が多ければ多いほど精度が高い
- しかしながら，サンプリング点数が多いと計算時間がかかる．
- 目安は，1次要素なら Gauss 積分で2点，Newton-Coate で3点，2次要素なら Gauss 積分で3点，Newton-Coate で5点

サンプリング点数	x_i	w_i
1	0	2
2	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626$	1
3	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483$ 0	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	$\pm 0.86113\ 63115\ 94053$ $\pm 0.33998\ 10435\ 84856$	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	$\pm 0.90617\ 98459\ 38664$ $\pm 0.53846\ 93101\ 05683$ 0	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
6	$\pm 0.93246\ 95142\ 03152$ $\pm 0.66120\ 93864\ 66265$ $\pm 0.23861\ 91860\ 83197$	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691

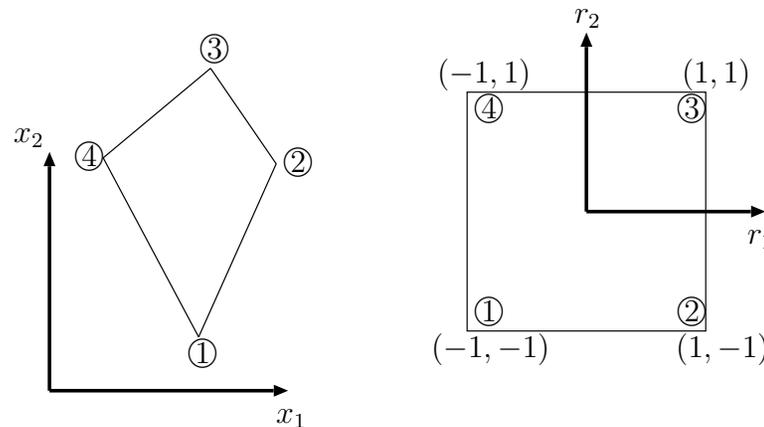
表 1: Gauss 積分のサンプリング点と重みの値

4 節点四角形ソリッド要素

- 1次元の場合，積分領域を n 個の区間に分割し，それぞれの区間で，1次の場合線分内の座標 x を以下の補間関数を用いて $r(-1 \leq r \leq 1)$ に「座標変換」した.

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (96)$$

- では，2次元の場合は？
- まず，積分領域を四角形で分割する．4つの頂点を $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ に対応させ，領域内を2つのパラメータ r_1, r_2 ($-1 \leq r_1 \leq 1, -1 \leq r_2 \leq 1$) をもちいて「座標変換」する．
- 即ち物理座標系で左図のような配置になっている節点を右図のように対応させる．これは物理座標系内の4面体を r_1 - r_2 座標系の正方形に写像することを意味している．この r_1 - r_2 座標系のことを，自然座標系と呼ぶ．



(a) 物理座標系

(b) 自然座標系

補間関数

- 補間関数の具体的な形は以下ようになる。

$$N^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 - r_2) \quad (97)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 - r_2) \quad (98)$$

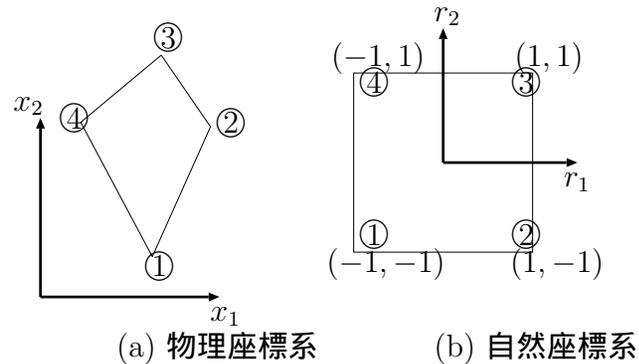
$$N^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 + r_2) \quad (99)$$

$$N^{(4)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 + r_2) \quad (100)$$

- これは、1次元の補間関数を掛け合わせたもの

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (101)$$

- 対応する節点で 1, その他の節点では 0 の値をとる。



微分の離散値による表現 1

- ひずみを計算する際に必要な u_i の x_j に関する微分は、微分の連鎖則を用いることにより以下のように求められる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_j} u_i^{(n)} = \left(\frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x_j} + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x_j} \right) u_i^{(n)} \quad (102)$$

- $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_j}$ はやはり微分の連鎖則を用いて、以下のように求められる。
- 以下のようにヤコビマトリックス $[J]$ を求める。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (103)$$

$$= [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (104)$$

微分の離散値による表現 2

- このヤコビマトリックスの各成分 $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は以下のようになる.

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j} x_i^{(n)} \quad (105)$$

- このヤコビマトリックスを用いれば $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_i}$ は以下のように求められる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (106)$$

- このヤコビマトリックスを用いると, 領域積分は以下のように表される.

$$\int_{\Omega_e} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det[J] dr_1 dr_2 \quad (107)$$

- この積分は通常, Gauss 積分などの数値積分法により実行される. ここでは, 1次元の Gauss 積分を二重にしたものを用いることにする. 即ち,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_i \sum_j w_i w_j f(x_i, y_j) \quad (108)$$

三角形要素の補間関数 1

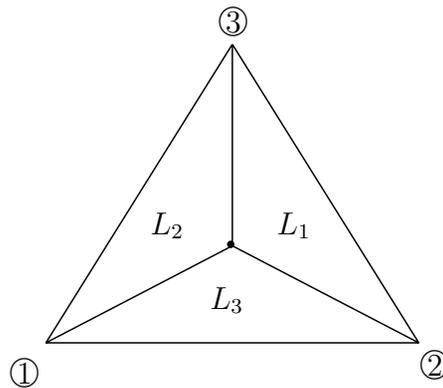
- 三角形要素の補間関数は以下のように定義される面積座標系で表される.
- 面積座標とは, 要素の面積を A として, 要素内の点を与えられたとき, 対応する節点の対辺とその点を作る三角形の面積を A_1, A_2, A_3 として, 下式により定義するものである.

$$L_1 = A_1/A$$

$$L_2 = A_2/A$$

$$L_3 = A_3/A$$

(109)



$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

(110)

三角形要素の補間関数 2

- 1次 3 節点の補間関数

$$N^{(1)} = L_1 \quad (111)$$

$$N^{(2)} = L_2 \quad (112)$$

$$N^{(3)} = L_3 \quad (113)$$

- 2次 6 節点の補間関数

$$N^{(1)} = L_1(2L_1 - 1) \quad (114)$$

$$N^{(2)} = L_2(2L_2 - 1) \quad (115)$$

$$N^{(3)} = L_3(2L_3 - 1) \quad (116)$$

$$N^{(4)} = 4L_2L_3 \quad (117)$$

$$N^{(5)} = 4L_3L_1 \quad (118)$$

$$N^{(6)} = 4L_1L_2 \quad (119)$$

- 6 節点の補間関数は 3 節点から作ることができる.

三角形要素の補間関数と数値積分 1

- 実際に要素剛性マトリックスを計算するときには数値積分が、必要になる。
- 数値積分は、この面積座標 L_1, L_2, L_3 と自然座標系 r_1, r_2 を以下のように対応させておこなう。

$$r_1 = L_1 \quad (120)$$

$$r_2 = L_2 \quad (121)$$

$$1 - r_1 - r_2 = L_3 \quad (122)$$

- 三角形内部の領域は、図のような自然座標系の領域と対応している。

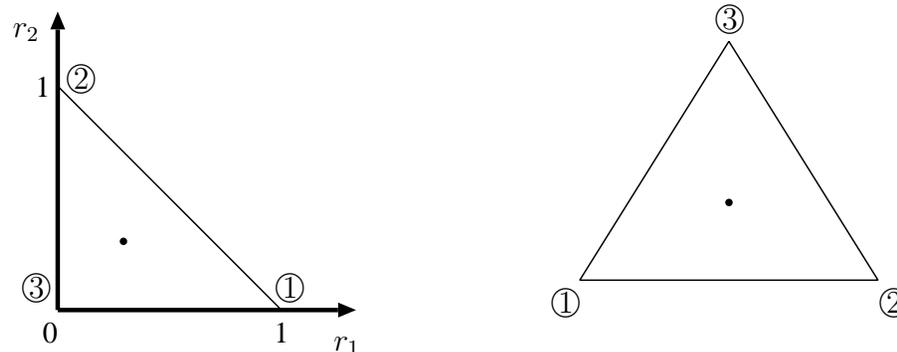


図 3: 三角形要素の自然座標と面積座標

三角形要素の補間関数と数値積分 2

- 物理空間での積分 $\int_V dV$ は 4 角形要素と同様に以下のヤコビマトリックスにより自然座標系に変換する.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix}}_{\downarrow [J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (123)$$

- すなわち

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (124)$$

- ヤコビマトリックスの成分 $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は 4 角形要素と同様に以下のようになる .

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j} x_i^{(n)} \quad (125)$$

三角形要素の補間関数と数値積分 3

- ここで形状関数の自然座標に関する微分 $\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_j}$ が現れるが、

$$r_1 = L_1 \tag{126}$$

$$r_2 = L_2 \tag{127}$$

$$1 - r_1 - r_2 = L_3 \tag{128}$$

この関係を元に、以下のように面積座標系と対応させる。

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_1} \tag{129}$$

$$= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \tag{130}$$

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_2} \tag{131}$$

$$= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \tag{132}$$

三角形要素の補間関数と数値積分 4

- これらをもとに $\int_V dV \Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-r_1} \det J dr_2 dr_1$ を行う. 実際には $\iint F dr_1 dr_2 = \frac{1}{2} \sum w_i F(x_i, y_i)$ の形式で計算する.

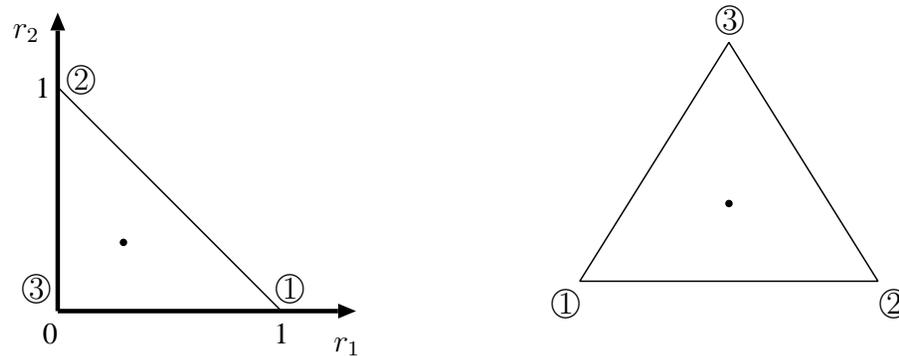


図 4: 三角形要素の自然座標と面積座標

三角形要素の補間関数と数値積分 5

Integration order	Degree of precision	r -coordinates	s -coordinates	Weights
3-point	2	$r_1 = 0.16666\ 66666\ 667$ $r_2 = 0.66666\ 66666\ 667$ $r_3 = r_1$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$	$w_1 = 0.33333\ 33333\ 333$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$
7-point	5	$r_1 = 0.10128\ 65073\ 235$ $r_2 = 0.79742\ 69853\ 531$ $r_3 = r_1$ $r_4 = 0.47014\ 20641\ 051$ $r_5 = r_4$ $r_6 = 0.05971\ 58717\ 898$ $r_7 = 0.33333\ 33333\ 333$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$ $s_4 = r_6$ $s_5 = r_4$ $s_6 = r_4$ $s_7 = r_7$	$w_1 = 0.12593\ 91805\ 448$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0.13239\ 41527\ 885$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = 0.225$
13-point	7	$r_1 = 0.06513\ 01029\ 002$ $r_2 = 0.86973\ 97941\ 956$ $r_3 = r_1$ $r_4 = 0.31286\ 54960\ 049$ $r_5 = 0.63844\ 41885\ 698$ $r_6 = 0.04869\ 03154\ 253$ $r_7 = r_5$ $r_8 = r_4$ $r_9 = r_6$ $r_{10} = 0.26034\ 59660\ 790$ $r_{11} = 0.47930\ 80678\ 419$ $r_{12} = r_{10}$ $r_{13} = 0.33333\ 33333\ 333$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$ $s_4 = r_6$ $s_5 = r_4$ $s_6 = r_5$ $s_7 = r_6$ $s_8 = r_5$ $s_9 = r_4$ $s_{10} = r_{10}$ $s_{11} = r_{10}$ $s_{12} = r_{11}$ $s_{13} = r_{13}$	$w_1 = 0.05334\ 72356\ 008$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0.07711\ 37608\ 903$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = w_4$ $w_8 = w_4$ $w_9 = w_4$ $w_{10} = 0.17561\ 52574\ 332$ $w_{11} = w_{10}$ $w_{12} = w_{10}$ $w_{13} = -0.14957\ 00444\ 67$

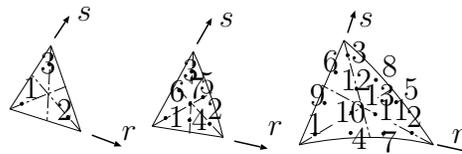
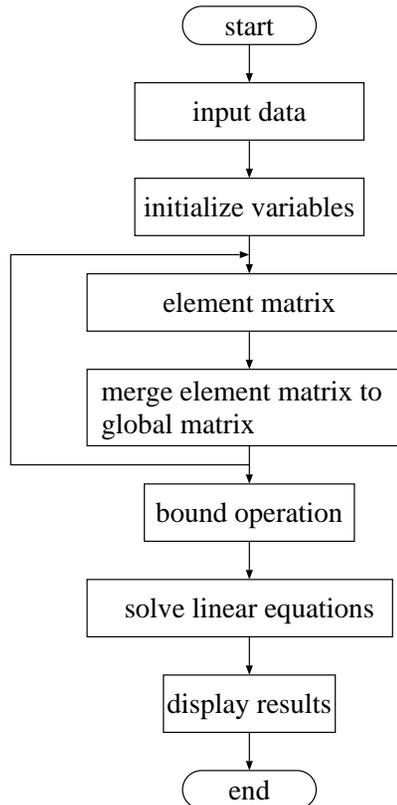


図 5: 積分点

有限要素解析コードの基本型

- 有限要素法のプログラムは, 図のような構造になっている.



- この構造は線形有限要素法解析コードなら基本的にすべて同一であり, 動解析や非線形解析のためのプログラムも, これを元に拡張されたような構造になっている.

インプットデータ

- 節点数の最大値 MXNODE (1000)
- 要素数の最大値 MXELEM (1000)
- 1 節点あたりの自由度数の最大値 MXDOFN (3)
- 1 要素あたりの節点数の最大値 MXNOEL (8)
- 総節点数 nnode
- 節点座標 coords(MXDOFN,MXNODE) ¹
- 総要素数 nelem
- 各要素の節点数 ntnoel(MXELEM)
- コネクティビティ lnods(MXNOEL,MXELEM) ¹
- 1 節点あたりの自由度数 ndofn
- 総自由度数 ntotdf=nnode×ndofn
- 各要素の節点数 ntnoel (MXELEM)

¹coords や lnods のような 2 次元配列の添字が、例えば coords(3,1000) のようになっているのは、同じことを C で書くと coords[1000][3] あるいは *coords[3] となるからである。理屈からいったら coords(1000,3) (C なら coords[3][1000] あるいは *coords[1000]) でも良いのだが、coords に格納されているのが座標値であることを考えれば結びつきの強い (= 同時にアクセスされる) ものが近接したメモリー上に格納されている方がより自然である。また要素剛性を作るときなどは lnods のうち 1 要素分しか必要ない。そのときは main から要素剛性を call するときに lnods(1,i) のアドレスを渡してサブルーチン内では 1 次元配列として取り扱えばコーディングが簡潔化できる。

要素剛性マトリックスの作成

- 要素剛性のプログラミングで発生するバグは分類すれば

1. $[D]$, $[B]$ マトリックス
2. ヤコビマトリックス
3. 数値積分

である. このうち 2. 及び 3. が正しくできているのを検証するのによく用いられている方法は要素の物理空間における体積を求めて実際のものと比較することである.

- 要素の物理空間における体積は以下のように求められる .

$$\int_{\Omega_e} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det[J] dr_1 dr_2 dr_3 = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \sum_{c=1}^2 w_a w_b w_c \det[J(r_a, r_b, r_c)] \quad (133)$$

- 3重の数値積分のループは, 例えば以下のようにコーディングすれば良い. ²

$$\text{vol} = 0 \quad (134)$$

$$\text{for } i1 = 1 \sim \text{nint} \quad (135)$$

$$\text{for } i2 = 1 \sim \text{nint} \quad (136)$$

$$\text{for } i3 = 1 \sim \text{nint} \quad (137)$$

$$r1 = (\text{sampring point } i1) \quad (138)$$

$$r2 = (\text{sampring point } i2) \quad (139)$$

$$r3 = (\text{sampring point } i3) \quad (140)$$

$$(\partial N / \partial r(r_1, r_2, r_3)) \quad (141)$$

$$(J, \det J) \quad (142)$$

² $\frac{\partial N}{\partial r}$ のコーディングは, あまり細工せず, 全成分を直接書き下すとある程度系統的に成分が並ぶので間違いをおかしても探しやすい. これは今後取り扱う要素についても言える.

$$w_1 = (\text{weight } i1) \tag{143}$$

$$w_2 = (\text{weight } i2) \tag{144}$$

$$w_3 = (\text{weight } i3) \tag{145}$$

$$\text{vol} = \text{vol} + \det J \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \tag{146}$$

end for (147)

end for (148)

end for (149)

剛性マトリックス作成の手順 – 4 節点四角形 1

- 数値積分を含んだ剛性マトリックスの手順は以下ようになる。
- たとえば，2次元の4節点四角形要素の要素剛性マトリックスを， 2×2 の Gauss 積分によって求める場合
- 要素剛性マトリックスの積分領域を変換する（これはアイソパラメトリック要素による積分領域の変換）

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \end{aligned} \quad (150)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (151)$$

- 数値積分を導入する

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\ &= \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 w_a w_b [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (152)$$

剛性マトリックス作成の手順 – 4 節点四角形 2

- 具体的には，各サンプリング点 r_a, r_b において，ヤコビマトリックスの成分は下式に従い求める．

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_i}{\partial r_j}(r_a, r_b) &= \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(n)} \\
 &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(1)} \\
 &\quad + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(2)} \\
 &\quad + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(3)} \\
 &\quad + \frac{\partial N^{(4)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(4)}
 \end{aligned} \tag{153}$$

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1 - r_2) \tag{154} \qquad \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1 + r_2) \tag{158}$$

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1 - r_1) \tag{155} \qquad \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1 + r_1) \tag{159}$$

$$\frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1 - r_2) \tag{156} \qquad \frac{\partial N^{(4)}}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1 + r_2) \tag{160}$$

$$\frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1 + r_1) \tag{157} \qquad \frac{\partial N^{(4)}}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1 - r_1) \tag{161}$$

- すべての成分をもとめ，ヤコビマトリックスをつくり，また，その行列式を計算する．

剛性マトリックス作成の手順 – 4 節点四角形 3

- $[B]$ マトリックスの成分は $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1}$ が並んだものであり，下式に従い求める．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (162)$$

- $[B]$ マトリックスの対応する部分にそれぞれの値を代入する．

$$[B^{(k)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (163)$$

$$[B] = [B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}] \quad (164)$$

- 以上で $[B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)]$ が得られたので，

$$[B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \quad (165)$$

を計算し対応する重み $w_a w_b$ をかけて，全体剛性マトリックスの配列に足し込む．

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] dr_1 dr_2 \\ &= \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 w_a w_b [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (166)$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 1

- 三角形要素の場合も，基本的に同じプロセスになる．
- 要素剛性マトリックスの積分領域を変換する（これはアイソパラメトリック要素による積分領域の変換）

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \end{aligned} \quad (167)$$

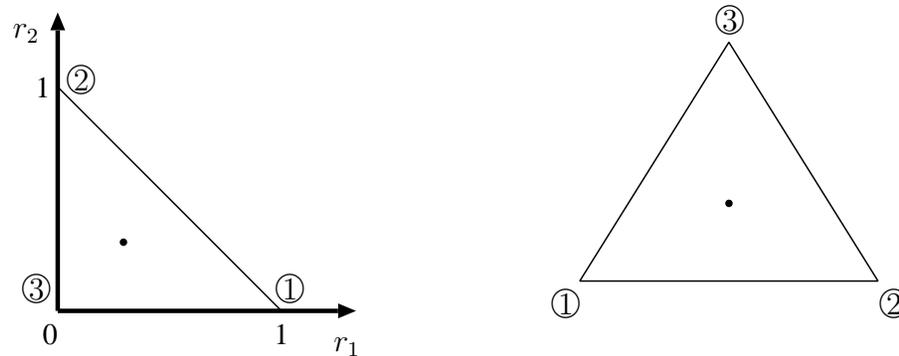


図 6: 三角形要素の自然座標と面積座標

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (168)$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 2

- 数値積分を導入する

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n w_{ab} [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (169)$$

- 以下各サンプリング点での値を求めて，マトリックスを作り，全体剛性マトリックスに足し込む

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n w_{ab} [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (170)$$

- 以下各サンプリング点での値を求めて，マトリックスを作り，全体剛性マトリックスに足し込む

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 3

- 3 節点三角形要素の場合補間関数は ,

$$N^{(1)} = L_1 \quad (171)$$

$$N^{(2)} = L_2 \quad (172)$$

$$N^{(3)} = L_3 \quad (173)$$

- この関係を元に , 以下のように面積座標系と対応させる .

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_1} \quad (174)$$

$$= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \quad (175)$$

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_2} \quad (176)$$

$$= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \quad (177)$$

- 具体的に計算すると ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} &= 1 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} &= 0 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} &= -1 \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} &= 0 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} &= 1 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} &= -1 \end{aligned} \quad (178)$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 4

- ヤコビマトリックスの成分, $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} x_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} x_1^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} x_1^{(3)} = x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \\
 \frac{\partial x_2}{\partial r_1} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} x_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} x_2^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} x_2^{(3)} = x_2^{(1)} - x_2^{(3)} \\
 \frac{\partial x_1}{\partial r_2} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} x_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} x_1^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} x_1^{(3)} = x_1^{(2)} - x_1^{(3)} \\
 \frac{\partial x_2}{\partial r_2} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} x_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} x_2^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - x_2^{(3)}
 \end{aligned} \tag{179}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_2^{(1)} - x_2^{(3)} \\ x_1^{(2)} - x_1^{(3)} & x_2^{(2)} - x_2^{(3)} \end{bmatrix} \tag{180}$$

- これより行列式は三角形要素の面積の 2 倍になる .

$$\begin{aligned}
 \det[J] &= \frac{\partial x_1}{\partial r_1} \frac{\partial x_2}{\partial r_2} - \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \frac{\partial x_1}{\partial r_2} \\
 &= (x_1^{(1)} - x_1^{(3)})(x_2^{(2)} - x_2^{(3)}) - (x_2^{(1)} - x_2^{(3)})(x_1^{(2)} - x_1^{(3)})
 \end{aligned} \tag{181}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\
 &= \det[J] \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] dr_2 dr_1
 \end{aligned} \tag{182}$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 5

- $[B]$ マトリックスの成分は $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_i}$ が並んだものであり，下式に従い求める．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} &= [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & -(x_2^{(1)} - x_2^{(3)}) \\ -(x_1^{(2)} - x_1^{(3)}) & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (183)$$

- $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_i}$ はすべて定数なので, $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_i}$ も定数になる. 具体的には

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & -(x_2^{(1)} - x_2^{(3)}) \\ -(x_1^{(2)} - x_1^{(3)}) & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & -(x_2^{(1)} - x_2^{(3)}) \\ -(x_1^{(2)} - x_1^{(3)}) & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \end{bmatrix} \tag{184}
\end{aligned}$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 6

- これより $[B]$ マトリックスの具体的な成分は以下ようになる .

$$\begin{aligned}
 [B] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & 0 & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & 0 & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} & 0 \\ 0 & x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & 0 & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & 0 & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (185)
 \end{aligned}$$

- さらに $[D]$ マトリックスも定数であることを考えると , 被積分関数はすべて定数となり , 数値積分の必要が無いことがわかる .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\
 &= \det[J] \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] dr_2 dr_1 \\
 &= \det[J] [B]^T [D] [B] \int_0^1 \int_0^{1-r_1} dr_2 dr_1 \\
 &= \frac{1}{2} \det[J] [B]^T [D] [B] \quad (186)
 \end{aligned}$$

外力ベクトル

- 実際に有限要素解析をするにあたっては，外力ベクトルも求める必要がある．

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_e} \delta u_i \cdot t_i \, dS &= \int_{\partial\Omega_e} \{\delta u_i^{(n)}\}^T [N]^T \{t\} \, dS \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} \, dS \end{aligned} \quad (187)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \rho \delta u_i \cdot g_i \, d\Omega &= \int_{\Omega_e} \rho \{\delta u_i^{(n)}\}^T [N]^T \{g\} \, d\Omega \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} \rho [N]^T \{g\} \, d\Omega \end{aligned} \quad (188)$$

- ただし

$$[N] = \begin{bmatrix} N^{(1)} & & & & N^{(n)} \\ & N^{(1)} & & & & N^{(n)} \\ & & N^{(1)} & & & & N^{(n)} \\ & & & N^{(2)} & \dots & & & N^{(n)} \\ & & & & & & & & N^{(n)} \end{bmatrix} \quad (189)$$

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}, \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (190)$$

- これらを用い外力ベクトル $\{F^{(e)}\}$ を以下のように定義する．

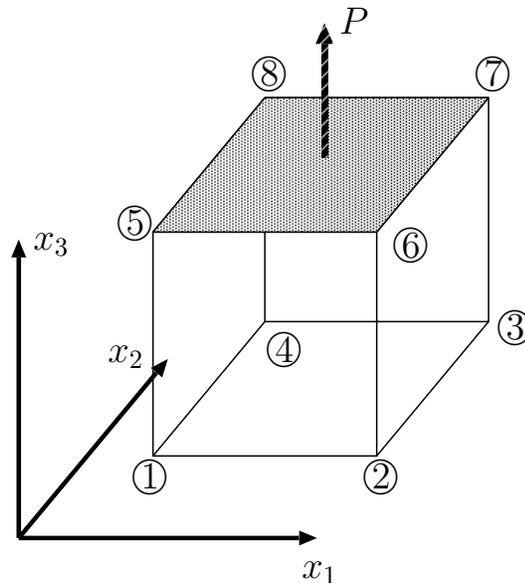
$$\{F^{(e)}\} = \int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} \, dS + \int_{\Omega_e} \rho [N]^T \{g\} \, d\Omega \quad (191)$$

外力の例 1

- 外力の例 - x_3 方向に均等な力で引っ張る

$$\{F^{(e)}\} = \int_{\partial\Omega_e} [N] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} dS \quad (192)$$

- 簡単のため図のように $x_1 - x_2$ 平面に平行な面⑤-⑥-⑦-⑧ 上に荷重が作用していると仮定し各節点の座標を以下のおく.



⑤-⑥ // ⑦-⑧ // x_1 軸, ⑥-⑦ // ⑧-⑤ // x_2 軸,

$$x_1^{(6)} = x_1^{(5)} + a \quad (193)$$

$$x_1^{(7)} = x_1^{(5)} + a \quad (194)$$

$$x_1^{(8)} = x_1^{(5)} \quad (195)$$

$$x_2^{(6)} = x_2^{(5)} \quad (196)$$

$$x_2^{(7)} = x_2^{(5)} + b \quad (197)$$

$$x_2^{(8)} = x_2^{(5)} + b \quad (198)$$

図7: 単純引っ張り

- すなわち, $a \times b$ の長方形であるとする. ⑤-⑥-⑦-⑧面上では $r_3 = 1$ なので $\frac{\partial N}{\partial r}$ は以下のようなになる.

$$\frac{\partial N^{(5)}}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1 - r_2) \quad (199)$$

$$\frac{\partial N^{(5)}}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1 - r_1) \quad (200)$$

$$\frac{\partial N^{(6)}}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1 - r_2) \quad (201)$$

$$\frac{\partial N^{(6)}}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1 + r_1) \quad (202)$$

$$\frac{\partial N^{(7)}}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1 + r_2) \quad (203)$$

$$\frac{\partial N^{(7)}}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1 + r_1) \quad (204)$$

$$\frac{\partial N^{(8)}}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1 + r_2) \quad (205)$$

$$\frac{\partial N^{(8)}}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1 - r_1) \quad (206)$$

外力の例 2

- これを用いると $\frac{\partial x}{\partial r}$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} &= -\frac{1}{4}(1-r_2)x_1^{(5)} + \frac{1}{4}(1-r_2)x_1^{(6)} + \frac{1}{4}(1+r_2)x_1^{(7)} - \frac{1}{4}(1+r_2)x_1^{(8)} \\
 &= -\frac{1}{4}(1-r_2)x_1^{(5)} + \frac{1}{4}(1-r_2)(x_1^{(5)}+a) + \frac{1}{4}(1+r_2)(x_1^{(5)}+a) - \frac{1}{4}(1+r_2)x_1^{(5)} \\
 &= \frac{a}{2}
 \end{aligned} \tag{207}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_2}{\partial r_1} &= -\frac{1}{4}(1-r_2)x_2^{(5)} + \frac{1}{4}(1-r_2)x_2^{(6)} + \frac{1}{4}(1+r_2)x_2^{(7)} - \frac{1}{4}(1+r_2)x_2^{(8)} \\
 &= -\frac{1}{4}(1-r_2)x_2^{(5)} + \frac{1}{4}(1-r_2)x_2^{(5)} + \frac{1}{4}(1+r_2)(x_2^{(5)}+b) - \frac{1}{4}(1+r_2)(x_2^{(5)}+b) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{208}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_1}{\partial r_2} &= -\frac{1}{4}(1-r_1)x_1^{(5)} - \frac{1}{4}(1+r_1)x_1^{(6)} + \frac{1}{4}(1+r_1)x_1^{(7)} + \frac{1}{4}(1-r_1)x_1^{(8)} \\
 &= -\frac{1}{4}(1-r_1)x_1^{(5)} - \frac{1}{4}(1+r_1)(x_1^{(5)}+a) + \frac{1}{4}(1+r_1)(x_1^{(5)}+a) + \frac{1}{4}(1-r_1)x_1^{(5)} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{209}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_2}{\partial r_2} &= -\frac{1}{4}(1-r_1)x_2^{(5)} - \frac{1}{4}(1+r_1)x_2^{(6)} + \frac{1}{4}(1+r_1)x_2^{(7)} + \frac{1}{4}(1-r_1)x_2^{(8)} \\
 &= -\frac{1}{4}(1-r_1)x_2^{(5)} - \frac{1}{4}(1+r_1)x_2^{(5)} + \frac{1}{4}(1+r_1)(x_2^{(5)}+b) + \frac{1}{4}(1-r_1)(x_2^{(5)}+b) \\
 &= \frac{b}{2}
 \end{aligned} \tag{210}$$

外力の例 3

- 以上から, 単位面積あたりの荷重を P とすれば, 各節点の外力は以下ようになる.

$$\{F^{(e)}\} = \int_{\partial\Omega_e} [N] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} dS \quad (211)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N^{(1)} & \dots & N^{(8)} \\ & N^{(1)} & \dots & N^{(8)} \\ & & N^{(1)} & \dots & N^{(8)} \\ & & & & N^{(8)} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 \quad (212)$$

$$F_1^{(i)} = F_2^{(i)} = 0 \quad (i = 1 \sim 8) \quad (213)$$

$$F_3^{(i)} = 0 \quad (i = 1 \sim 4) \quad (\because r_3 = 1) \quad (214)$$

$$F_3^{(5)} = P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^{(5)} \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 \quad (215)$$

$$= P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1 - r_1)(1 - r_2) \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 = \frac{abP}{4} \quad (216)$$

$$F_3^{(6)} = P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^{(6)} \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 \quad (217)$$

$$= P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1 + r_1)(1 - r_2) \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 = \frac{abP}{4} \quad (218)$$

$$F_3^{(7)} = P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^{(7)} \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 \quad (219)$$

$$= P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1 + r_1)(1 + r_2) \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 = \frac{abP}{4} \quad (220)$$

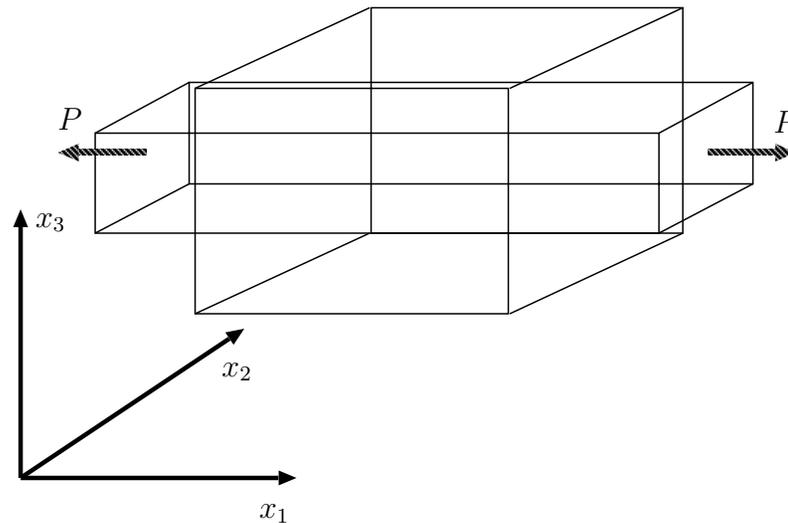
$$F_3^{(8)} = P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^{(8)} \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 \quad (221)$$

$$= P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1 - r_1)(1 + r_2) \frac{ab}{4} dr_1 dr_2 = \frac{abP}{4} \quad (222)$$

- 以上をまとめると、8 節点六面体ソリッド要素のある面に等分布荷重が作用している場合、その面に含まれる 4 つの節点に $\frac{1}{4}$ ずつ荷重を振り分ければ良いことがわかる。

境界条件 1

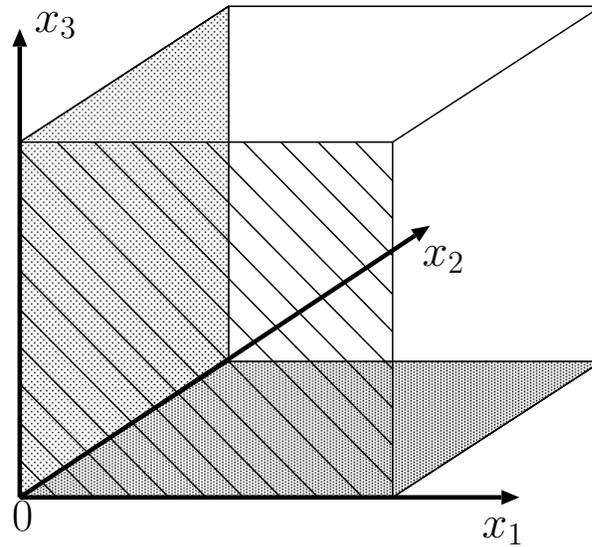
- 有限要素法で静的な構造解析を行う際には解くべき方程式がつりあい方程式であるため、解析を行うものが、適切に不動点を設定する必要がある。
- 例えば単純引っ張りであれば、図のように直方体の相対する2面を引っ張るだけで、中心がどこにあるかは式の上からは何も決まらない。



- このときの変形を考えてみると変形前後で重心が動かないと解析者が仮定すればこの変形には3つの対称面がある。

境界条件 1

- 直方体の重心の座標を $(0,0,0)$ と仮定し, 3つの対称面で分割される $1/8$ 領域の1つとして第1象限を取り出してみると, 以下のような境界条件になっている.



- $x_1 - x_2$ 平面上の点:
 x_3 方向固定
- $x_2 - x_3$ 平面上の点:
 x_1 方向固定
- $x_3 - x_1$ 平面上の点:
 x_2 方向固定

図8: $1/8$ 対象モデル

merge

- できた要素剛性を全体剛性に加える merge の操作で発生するバグはインデックスの間違いといえる.
- merge の debug は, 要素剛性に 1 とか 2 などわかりやすい値のダミーデータを入れて, できあがった全体剛性を確認することで行う.
- 1 節点数あたりの自由度数を可変にするためには merge は以下のようにコーディングすれば良い.

```
for i = 1 ~ nelem (223)
```

```
  call element(i) (224)
```

```
  for j = 1 ~ ntnoel(i) (225)
```

```
    for k = 1 ~ ndofn (226)
```

```
      ip((j - 1) * ndofn + k) = (lnods(j, i) - 1) * ndofn + k (227)
```

```
    end for (228)
```

```
  end for (229)
```

```
  for j = 1 ~ ntnoel(i) * ndofn (230)
```

```
    for k = 1 ~ ntnoel(i) * ndofn (231)
```

```
       $K_{ip(j),ip(k)} = K_{ip(j),ip(k)} + A_{jk}$  (232)
```

```
    end for (233)
```

```
  end for (234)
```

```
end for (235)
```

Gauss の消去法

- Gauss の消去法では与えられた係数マトリックス $[A]$ は最終的に下式のように分解される.

$$[A] = [L][D][U] \quad (236)$$

- また $[A]$ が対称行列ならば $[U] = [L^T]$ である. すなわち $[A]$ は下式のように分解される.³

$$[A] = [L][D][L^T] = [U^T][D][U] \quad (237)$$

- このように $[A] = [L][D][U]$ と分解することにより, 連立 1 次方程式 $[A]\{b\} = \{c\}$ は, 以下のように両辺に順次逆行列を作用させて行くようにして求解できる.

$$\begin{aligned} [L][D][U]\{b\} &= \{c\} \\ [D][U]\{b\} &= [L^{-1}]\{c\} \\ [U]\{b\} &= [D^{-1}][L^{-1}]\{c\} \\ \{b\} &= [U^{-1}][D^{-1}][L^{-1}]\{c\} \end{aligned} \quad (238)$$

³なお慣用的に論文や雑誌などの文章中に出てくるときは $[L][D][L^T]$ と記述されている場合が多いが, そのような論文や書籍に掲載されているプログラム例では上三角行列を記憶し, $[U^T][D][U]$ と分解している場合が多い.

境界条件処理 4

- 以下のような連立一次方程式を考える.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix} \quad (239)$$

- ここで, C_j 以外の右辺と b_j が既知であるとする. マトリック形式を通常の連立一次方程式の形式に書き戻すと以下ようになる.

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12}b_2 + \dots + A_{1j}b_j + \dots + A_{1n}b_n = C_1 \\ A_{21} + A_{22}b_2 + \dots + A_{2j}b_j + \dots + A_{2n}b_n = C_2 \\ \vdots \\ A_{j1} + A_{j2}b_2 + \dots + A_{jj}b_j + \dots + A_{jn}b_n = C_j \\ \vdots \\ A_{n1} + A_{n2}b_2 + \dots + A_{nj}b_j + \dots + A_{nn}b_n = C_n \end{cases} \quad (240)$$

- この中で j 行目の式だけは右辺の C_j が未知量であり, C_j は通常の未知量 $b_i (i = 1 \sim j-1, j+1 \sim n)$ がすべて求められた後に,

$$C_j = A_{j1}b_1 + A_{j2}b_2 + \dots + A_{jj}b_j + \dots + A_{jn}b_n \quad (241)$$

により求められる. そのため他の行の式とは性質が異なるので, $b_i (i = 1 \sim j-1, j+1 \sim n)$ を求めるプロセスからは除外する.

境界条件処理 5

- 即ち j 行目を抜いた $n - 1$ 個の式を考える.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} + A_{12}b_2 + \cdots + A_{1j}b_j + \cdots + A_{1n}b_n = C_1 \\ A_{21} + A_{22}b_2 + \cdots + A_{2j}b_j + \cdots + A_{2n}b_n = C_2 \\ \vdots \\ A_{j-1\ 1} + A_{j-1\ 2}b_2 + \cdots + A_{j-1\ j}b_j + \cdots + A_{j-1\ n}b_n = C_{j-1} \\ A_{j+1\ 1} + A_{j+1\ 2}b_2 + \cdots + A_{j+1\ j}b_j + \cdots + A_{j+1\ n}b_n = C_{j+1} \\ \vdots \\ A_{n1} + A_{n2}b_2 + \cdots + A_{nj}b_j + \cdots + A_{nn}b_n = C_n \end{array} \right. \quad (242)$$

- この式中の $A_{1j}b_j, A_{2j}b_j, \dots, A_{nj}b_j$ は既知量なので右辺に移項する.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} + A_{12}b_2 + \cdots + A_{1\ j-1}b_{j-1} + A_{1\ j+1}b_{j+1} + \cdots + A_{1n}b_n = C_1 - A_{1j}b_j \\ A_{21} + A_{22}b_2 + \cdots + A_{2\ j-1}b_{j-1} + A_{2\ j+1}b_{j+1} + \cdots + A_{2n}b_n = C_2 - A_{2j}b_j \\ \vdots \\ A_{j-1\ 1} + A_{j-1\ 2}b_2 + \cdots + A_{j-1\ j-1}b_{j-1} + A_{j-1\ j+1}b_{j+1} + \cdots + A_{j-1\ n}b_n = C_{j-1} - A_{j-1\ j}b_j \\ A_{j+1\ 1} + A_{j+1\ 2}b_2 + \cdots + A_{j+1\ j-1}b_{j-1} + A_{j+1\ j+1}b_{j+1} + \cdots + A_{j+1\ n}b_n = C_{j+1} - A_{j+1\ j}b_j \\ \vdots \\ A_{n1} + A_{n2}b_2 + \cdots + A_{n\ j-1}b_{j-1} + A_{n\ j+1}b_{j+1} + \cdots + A_{nn}b_n = C_n - A_{nj}b_j \end{array} \right. \quad (243)$$

境界条件処理 6

- これをあらためてマトリックス表示すると、以下のようなになる。
- 即ち係数マトリックスは, j 行と j 列をとり除いたもの
- 未知ベクトルは j 行目をとり除いたもの
- 右辺は, もとの左辺からもとの係数マトリックスの j 列目の b_j 倍をひいたものの j 行目をとり除いたもの

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j-1} & A_{1j+1} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2j-1} & A_{2j+1} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ A_{j-11} & \dots & A_{j-1j-1} & A_{j+1j+1} & \dots & A_{j-1n} \\ A_{j+11} & \dots & A_{j+1j+1} & A_{j+1j+1} & \dots & A_{j+1n} \\ \vdots & & & & & \\ A_{n1} & \dots & A_{nj-1} & A_{nj+1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{j-1} \\ b_{j+1} \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{j-1} \\ C_{j+1} \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix} - b_j \begin{Bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{j-1j} \\ A_{j+1j} \\ \vdots \\ A_{nj} \end{Bmatrix} \quad (244)$$

- b_j が 0 であれば右辺第 2 項は消滅する。
- 以上の操作は, 既知の b_j が複数になっても同様である. $b_{j(1)}, b_{j(2)}, \dots, b_{j(m)}$ が既知であるとする. まず連立一次方程式から $j(1), j(2), \dots, j(m)$ 行目の方程式を除外する. 次に左辺の $b_{j(1)}, b_{j(2)}, \dots, b_{j(m)}$ を含んだ項を右辺に移項する. これをマトリックス表示すればよい.