

非線形有限要素法特論

2004 年 10 月 25 日

非線形有限要素法特論

- 講義内容は、非線形有限要素法の解説
- 夏学期の「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる。
- 受講していない場合は、「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著、丸善を読んで理解しておくこと。
- 講義資料は<http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2004> からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003> から昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「有限要素法特論」ですが、基本的に同じ内容です。
- 今年度（2004）から新設した演習は、翌週の講義時間に提出してください。必須ではありませんし、採点しませんが、実際に手を動かして計算することは有限要素法の理解を深める上で重要です。
- 質問などは、nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp まで。

非線形有限要素法特論講義予定

1.	10/ 4	微分方程式の境界値問題の有限要素解析
2.	10/18	線形弾性体の有限要素解析
3.	10/25	アイソパラメトリックソリッド要素 (プログラム)
4.	11/ 1	連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 (演習あり)
5.	11/ 8	線形有限要素法の基本的なプログラム構造 (プログラム)
6.	11/15	幾何学非線形問題の有限要素定式化 (プログラム)
7.	11/22	非線形方程式の静的解析手法、超弾性体、弾塑性体 (プログラム)
8.	11/29	第 7 回の演習
9.	12/ 6	非線形方程式の動的解析手法、固有値解析
10.	12/13	構造要素
11.	12/20	連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法
12.	1/17	ALE 有限要素流体解析
13.	1/24	ALE 有限要素流体解析

アイソパラメトリック要素の準備

- 高次補間
- 数値積分

微分方程式の境界値問題

- 以下に示すような微分方程式の境界値問題を考える.

[B] 以下の条件を満たす u を求めよ.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad (0 < x < a) \quad (1)$$

$$u(0) = \alpha, \quad \frac{du}{dx}(a) = \beta \quad (2)$$

- [B] は以下の [V] と等価である.

[V] 以下の条件を満たす u を求めよ. ただし v は、 $v(0) = 0, v(a) = 0$ を満たす任意の関数

$$\int_0^a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^a f(x) v dx \quad \forall v \quad (3)$$

$$u(0) = \alpha, \quad \frac{du}{dx}(a) = \beta \quad (4)$$

弱形式の近似解法 — 積分区間の分割

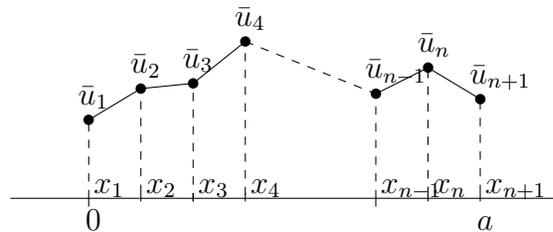
- 弱形式の近似解を有限要素法により求める。
- まず u の定義域 $[0, a]$ を n 個の重ならない区間 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1 \sim n$) に分割する。
- この x_i ($i = 1 \sim n + 1$) を節点と呼ぶ。
- このとき

$$\int_0^a \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^a f(x) v dx \quad (5)$$

の積分は以下のように変更できる。

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \cdot v dx \quad (6)$$

- 近似解は節点 x_i ($i = 1 \sim n + 1$) では \bar{u}_i ($i = 1 \sim n + 1$) の値をとり, 節点 x_i と節点 x_{i+1} の間では線形的に変化すると仮定する。また, v について同様の関数を用いることにする。



有限要素補間

- それぞれの積分区間の始点 x_i , 終点 x_{i+1} を便宜的に $x_{(i,1)}, x_{(i,2)}$ と表し, $x_{(i,1)}$ が -1 , $x_{(i,2)}$ が 1 に対応するようにそれぞれの区間で変数変換を行なう.

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} f \cdot v dx \quad (7)$$

- このとき, パラメータ r ($-1 \leq r \leq 1$) を用いると $[x_{(i,1)}, x_{(i,2)}]$ に含まれる x は, 以下の形式で表される.

$$x = N^{(1)}x_{(i,1)} + N^{(2)}x_{(i,2)} \quad (8)$$

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}(1-r), \quad N^{(2)} = \frac{1}{2}(1+r) \quad (9)$$

- $N^{(i)}$ を有限要素法補間関数, あるいは単に補間関数と呼ぶ.
- \bar{u}, \bar{v} についても $\bar{u}_{(i,1)} = \bar{u}_i, \bar{u}_{(i,2)} = \bar{u}_{i+1}, \bar{v}_{(i,1)} = \bar{v}_i, \bar{v}_{(i,2)} = \bar{v}_{i+1}$ として同様にパラメータ r ($-1 \leq r \leq 1$) を用いて以下の形式で表す.

$$\bar{u} = N^{(1)}u_{(i,1)} + N^{(2)}u_{(i,2)}, \quad \bar{v} = N^{(1)}v_{(i,1)} + N^{(2)}v_{(i,2)} \quad (10)$$

微分の離散値による表現

- 弱形式を近似解で置き換えたもの

$$\sum_{i=1}^n \int_{x(i,1)}^{x(i,2)} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{d\bar{v}}{dx} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x(i,1)}^{x(i,2)} f \cdot \bar{v} dx \quad (11)$$

左辺の被積分関数に含まれている \bar{u} , \bar{v} の x に関する微分は、微分の連鎖則を用いることにより以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(N^{(1)} \bar{u}_{(i,1)} + N^{(2)} \bar{u}_{(i,2)} \right) \\ &= \frac{dN^{(1)}}{dx} \bar{u}_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dx} \bar{u}_{(i,2)} \\ &= \frac{dN^{(1)}}{dr} \frac{dr}{dx} \bar{u}_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr} \frac{dr}{dx} \bar{u}_{(i,2)} \end{aligned} \quad (12)$$

- 上式に現れる $\frac{dr}{dx}$ については以下のように逆数が求められる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(N^{(1)} x_{(i,1)} + N^{(2)} x_{(i,2)} \right) \\ &= \frac{dN^{(1)}}{dr} x_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr} x_{(i,2)} \end{aligned} \quad (13)$$

要素マトリックス 1

- これらを用いると弱形式の近似

$$\sum_{i=1}^n \int_{x(i,1)}^{x(i,2)} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{d\bar{v}}{dx} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x(i,1)}^{x(i,2)} f \cdot \bar{v} dx \quad (14)$$

の左辺被積分関数は以下のようにマトリックス表示できる

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{d\bar{v}}{dx} &= \left(\frac{dN^{(1)}}{dx} \bar{u}_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dx} \bar{u}_{(i,2)} \right) \left(\frac{dN^{(1)}}{dx} \bar{v}_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dx} \bar{v}_{(i,2)} \right) \\ &= \{ \bar{v}_{(i,1)} \ \bar{v}_{(i,2)} \} \begin{bmatrix} \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{(i,1)} \\ \bar{u}_{(i,2)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

- 各積分区間 $[x_{(i,1)}, x_{(i,2)}]$ で、 $J_{(i)} = \frac{dx}{dr}$ とすれば、下式のようになる。

$$\sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \{ \bar{v}_{(i,1)} \ \bar{v}_{(i,2)} \} \begin{bmatrix} \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{(i,1)} \\ \bar{u}_{(i,2)} \end{Bmatrix} J_{(i)} dr = \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \{ \bar{v}_{(i,1)} \ \bar{v}_{(i,2)} \} \begin{Bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \end{Bmatrix} f J_{(i)} dr \quad (16)$$

要素マトリックス2

- $\bar{v}_{(i,1)}$, $\bar{v}_{(i,2)}$, $\bar{u}_{(i,1)}$, $\bar{u}_{(i,2)}$ は節点での値であり, 積分変数 r については定数であるから, 積分の外に出すことができる.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \{\bar{v}_{(i,1)} \bar{v}_{(i,2)}\} \begin{bmatrix} \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{(i,1)} \\ \bar{u}_{(i,2)} \end{Bmatrix} J_{(i)} dr \\
 &= \sum_{i=1}^n \{\bar{v}_{(i,1)} \bar{v}_{(i,2)}\} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \end{bmatrix} J_{(i)} dr \begin{Bmatrix} \bar{u}_{(i,1)} \\ \bar{u}_{(i,2)} \end{Bmatrix} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \{\bar{v}_{(i,1)} \bar{v}_{(i,2)}\} \begin{Bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \end{Bmatrix} f J_{(i)} dr = \sum_{i=1}^n \{\bar{v}_{(i,1)} \bar{v}_{(i,2)}\} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \end{Bmatrix} f J_{(i)} dr \quad (18)$$

- 下式によって $[K^{(i)}]$, $\{F^{(i)}\}$ を定義する $[K^{(i)}]$ を要素マトリックス等と呼ぶ.

$$[K^{(i)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \end{bmatrix} J_{(i)} dr \quad \{F^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{(i)} \\ F_2^{(i)} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \end{Bmatrix} f J_{(i)} dr \quad (19)$$

- この要素マトリックスはどのように積分するのか？

高次補間

- 関数 u を 2 次関数で近似する .
- u の定義域 $[0, a]$ を n 個の重なりのない区間 $I_i (i = 1 \sim n)$ に分割する. 2 次関数を一意に定めるためには 3 点必要なので, 図のように $2n + 1$ 個の節点をとる.

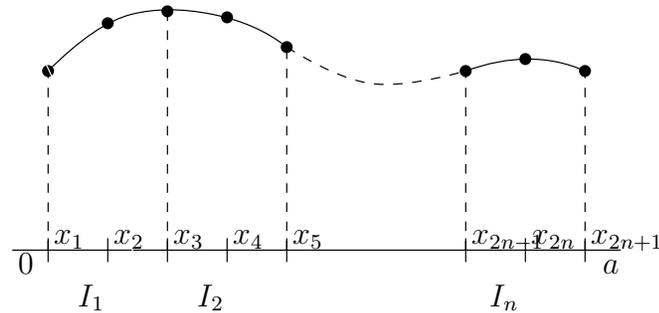


図 1: 2 次関数による補間

- 区間 I_i に含まれる節点は $x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2i+1}$ であるが, これをそれぞれ $x_{(i,1)}, x_{(i,3)}, x_{(i,2)}$ と表す. この時, 区間 $I_i = [x_{(i,1)}, x_{(i,2)}]$ と表すことができ, 先に示した区分線形の場合と同じ表記を用いることができる.

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} f \cdot v dx \quad (20)$$

高次有限要素補間 1

- それぞれの積分区間で, $x_{(i,1)}$ が -1 , $x_{(i,2)}$ が 1 に対応するように座標変換を行なう. このときパラメータ r ($-1 \leq r \leq 1$) を用いると, $x \in [x_{(i,1)}, x_{(i,2)}]$ は以下の形式で表される.

$$x = N^{(1)} x_{(i,1)} + N^{(2)} x_{(i,2)} + N^{(3)} x_{(i,3)} \quad (21)$$

ただし

$$N^{(1)} = -\frac{1}{2} r (1 - r), \quad N^{(2)} = \frac{1}{2} r (1 + r), \quad N^{(3)} = 1 - r^2 \quad (22)$$

- u についても同様にパラメータ r ($-1 \leq r \leq 1$) を用いて以下の形式で表す. ただし, $u_{(i,1)} = u_{2i-1}$, $u_{(i,2)} = u_{2i+1}$, $u_{(i,3)} = u_{2i}$ である.

$$u = N^{(1)} u_{(i,1)} + N^{(2)} u_{(i,2)} + N^{(3)} u_{(i,3)} \quad (23)$$

- $\frac{du}{dx}$ は, 微分の連鎖則を用いることにより以下のように求められる.

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN^{(1)}}{dx} u_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dx} u_{(i,2)} + \frac{dN^{(3)}}{dx} u_{(i,3)} = \frac{dN^{(1)}}{dr} \frac{dr}{dx} u_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr} \frac{dr}{dx} u_{(i,2)} + \frac{dN^{(3)}}{dr} \frac{dr}{dx} u_{(i,3)} \quad (24)$$

- $\frac{dr}{dx}$ については以下のようにインバースとして求められる.

$$\frac{dx}{dr} = \frac{dN^{(1)}}{dr} x_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr} x_{(i,2)} + \frac{dN^{(3)}}{dr} x_{(i,3)} \quad (25)$$

高次有限要素補間 2

- ところで，今回のように均等に節点を取ると， $x_{(i,3)} = (x_{(i,1)} + x_{(i,2)})/2$ であることを用いて以下のようなになる

$$\begin{aligned}x &= N^{(1)} x_{(i,1)} + N^{(2)} x_{(i,2)} + N^{(3)} x_{(i,3)} \\&= \left\{ -\frac{1}{2} r (1 - r) \right\} x_{(i,1)} + \left\{ \frac{1}{2} r (1 + r) \right\} x_{(i,2)} + (1 - r^2) \frac{1}{2} (x_{(i,1)} + x_{(i,2)}) \\&= \left\{ \frac{1}{2} (1 - r) \right\} x_{(i,1)} + \left\{ \frac{1}{2} (1 + r) \right\} x_{(i,2)}\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dr} &= \frac{dN^{(1)}}{dr} x_{(i,1)} + \frac{dN^{(2)}}{dr} x_{(i,2)} + \frac{dN^{(3)}}{dr} x_{(i,3)} \\&= \left\{ -\frac{1}{2} (1 - 2r) \right\} x_{(i,1)} + \left\{ \frac{1}{2} (1 + 2r) \right\} x_{(i,2)} + (-2r) \frac{1}{2} (x_{(i,1)} + x_{(i,2)}) \\&= -\frac{1}{2} x_{(i,1)} + \frac{1}{2} x_{(i,2)}\end{aligned}\tag{27}$$

- これは，区間内で x が線形的に変化する時の補間式であり，実質的に，座標は2点で補間しても同じ結果になることを意味する．
- 変位よりも座標の補間関数の次数が低いものをサブパラメトリック要素，その反対に変位よりも座標の補間関数の次数が高いものをスーパーパラメトリック要素と呼ぶ．
- しかしながら，実際に用いられるのは，アイソパラメトリック要素がほとんどである．

要素マトリックス

- 各積分区間 $[x_{(i,1)}, x_{(i,2)}]$ に対応して $J_{(i)} = \left| \frac{dx}{dr} \right|$ とすれば,

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{(i,1)}}^{x_{(i,2)}} f \cdot v dx \quad (28)$$

⇔

$$\sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \{v_{(i,1)} v_{(i,2)} v_{(i,3)}\} \begin{bmatrix} \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} \\ \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN^{(3)}}{dx} & \frac{dN^{(3)}}{dx} & \frac{dN^{(3)}}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(i,1)} \\ u_{(i,2)} \\ u_{(i,3)} \end{Bmatrix} J_{(i)} dr = \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \{v_{(i,1)} v_{(i,2)} v_{(i,3)}\} \begin{Bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \\ N^{(3)} \end{Bmatrix} f J_{(i)} dr \quad (29)$$

- $v_{(i,1)}, v_{(i,2)}, v_{(i,3)}, u_{(i,1)}, u_{(i,2)}, u_{(i,3)}$ は節点での値であり r については定数であるから積分の外に出すことができる。下式によって $[K^{(i)}], \{F^{(i)}\}$ を定義する。

$$[K^{(i)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} & K_{13}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} & K_{23}^{(i)} \\ K_{31}^{(i)} & K_{32}^{(i)} & K_{33}^{(i)} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} & \frac{dN^{(1)}}{dx} \\ \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} & \frac{dN^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN^{(3)}}{dx} & \frac{dN^{(3)}}{dx} & \frac{dN^{(3)}}{dx} \end{bmatrix} J_{(i)} dr \quad (30)$$

$$\{F^{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1^{(i)} \\ F_2^{(i)} \\ F_3^{(i)} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N^{(1)} \\ N^{(2)} \\ N^{(3)} \end{Bmatrix} f J_{(i)} dr \quad (31)$$

数値積分

- 以上で求めたような，マトリックスの作成に際しては，体積あるいは面積積分を行う必要がある．
- しかしながら，要素がよほど単純な形状でない限り，被積分関数の形が複雑になり，解析的に積分することはほぼ不可能である．
- そこで，この積分を数値的に行うことになるが，有限要素法の場合，よく用いられるのは，Newton-Coate 積分，Gauss 積分などである．
- どちらも，被積分関数を Lagrange 多項式で近似し，Lagrange 多項式の性質を元に数値的に積分を求める方法である．

Lagrange 多項式 1

- 関数 $f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ を多項式で近似する .
- Lagrange 多項式とは, 関数の定義域の両端を含むサンプリング点 $\{x_n\}$, $(a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$ をとり, 下式により近似するものである .

$$f(x) \approx Q_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x) \quad (32)$$

$$H_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (33)$$

- この H_k は $n - 1$ 次式であり, 対応するサンプリング点で 1, それ以外のサンプリング点では 0 という性質を持つ .

$$H_k(x_i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \quad (34)$$

- これよりサンプリング点 x_k においては

$$f(x_k) = Q_n(x_k) \quad (35)$$

- 従って $Q_n(x)$ は $f(x)$ と n 個のサンプリング点 $x_i (i = 1, \dots, n)$ で一致する $n - 1$ 次式である .

- たとえば, $n = 2$ の場合 $x_1 = a, x_2 = b$

$$H_1(x) = \frac{x - b}{a - b}, \quad H_2(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad (36)$$

$$f(x) \approx Q_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x) = f(a)\frac{x - b}{a - b} + f(b)\frac{x - a}{b - a} \quad (37)$$

これは端点をむすんだ直線である .

- 特に, $x_1 = -1, x_2 = 1$ とおくと

$$H_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x), \quad H_2(x) = \frac{1}{2}(1 + x) \quad (38)$$

となり, 先に示した 1 次の場合の補間関数と一致する .

Lagrange 多項式 2

- 基本事項：2つの高々 n 次の多項式 $f(x), g(x)$ が異なる $n+1$ 点 $x_i (i=1, \dots, n+1)$ で一致するとき f, g は一致する。

証明： $h(x) = f(x) - g(x)$ とすると $h(x)$ は高々 n 次の多項式であるが、今、 $x_i (i=1, \dots, n+1)$ で $f(x)$ と $g(x)$ が一致するとすれば、

$$\begin{aligned} f(x_i) &= g(x_i) \quad (i=1, \dots, n+1) \\ h(x_i) &= f(x_i) - g(x_i) = 0 \quad (i=1, \dots, n+1) \\ &= a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1}) = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

ただし a は適当な係数。これより $h(x)$ は $n+1$ 次式となり矛盾する。

- $f(x)$ を高々 n 次の多項式とし、これを Lagrange 多項式で近似する場合、Lagrange 多項式はサンプリング点が $n+1$ 個のとき各 $H_k(x)$ は n 次式なので、 $Q_{n+1}(x)$ は n 次式であり、上記の理由により $f(x)$ と $Q_{n+1}(x)$ は一致する。また、これはサンプリング点の取り方によらない。
- 従って、 $f(x)$ が n 次の多項式の場合、サンプリング点が $n+1$ 個であれば、 $f(x)$ と $Q_{n+1}(x)$ は一致し、さらにサンプリング点を $n+2$ 個以上で近似しても、結果は変わらない。つまり、 $Q_{n+1}(x) = Q_{n+2}(x) = \dots$

Lagrange 多項式で低次の関数を近似する 1

- $f(x)$ が 1 次式の場合は 2 点で十分 .

$$f(x) = Q_2(x) = f(x_1)H_1^{(2)}(x) + f(x_2)H_2^{(2)}(x) \quad (40)$$

- 1 次式を 3 点で近似するとどうなるか

$$f(x) \approx Q_3(x) = f(x_1)H_1^{(3)}(x) + f(x_2)H_2^{(3)}(x) + f(x_3)H_3^{(3)}(x) \quad (41)$$

1 次式なので 2 点で十分 . 端点 x_1, x_3 を用いて

$$f(x) = Q_2(x) = f(x_1)H_1^{(2)}(x) + f(x_3)H_3^{(2)}(x) \quad (42)$$

ただし , 通常の Lagrange 多項式とはサンプリング点が異なることに注意

$$H_1^{(2)}(x) = \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}, \quad H_3^{(2)}(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \quad (43)$$

x_2 では ,

$$f(x_2) = Q_2(x_2) = f(x_1)H_1^{(2)}(x_2) + f(x_3)H_3^{(2)}(x_2) \quad (44)$$

これを , $f(x) \approx Q_3$ に代入すると ,

$$\begin{aligned} f(x) \approx Q_3(x) &= f(x_1)H_1^{(3)}(x) + Q_2(x_2)H_2^{(3)}(x) + f(x_3)H_3^{(3)}(x) \\ &= f(x_1)H_1^{(3)}(x) + \{f(x_1)H_1^{(2)}(x_2) + f(x_3)H_3^{(2)}(x_2)\}H_2^{(3)}(x) + f(x_3)H_3^{(3)}(x) \\ &= f(x_1)\{H_1^{(3)}(x) + H_1^{(2)}(x_2)H_2^{(3)}(x)\} \\ &\quad + f(x_3)\{H_3^{(3)}(x) + H_3^{(2)}(x_2)H_2^{(3)}(x)\} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} H_1^{(3)}(x) + H_1^{(2)}(x_2)H_2^{(3)}(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ &= \frac{x - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \{(x - x_2) - (x - x_1)\} = \frac{(x - x_3)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} H_3^{(3)}(x) + H_3^{(2)}(x_2)H_2^{(3)}(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ &= \frac{x - x_1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \{(x - x_2) - (x - x_3)\} = \frac{(x - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \end{aligned} \quad (47)$$

以上から

$$\begin{aligned} f(x) \approx Q_3(x) &= f(x_1) \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} + f(x_3) \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \\ &= f(x_1) H_1^{(2)}(x) + f(x_3) H_3^{(2)}(x) \end{aligned} \tag{48}$$

すなわち, $f(x)$ を $Q_3(x)$ で近似した場合, $Q_3(x)$ は 1 次式となり $Q_2(x)$ で近似したものと一致する.

Lagrange 多項式で低次の関数を近似する 2

- $f(x)$ が 2 次式の場合は 3 点で十分

$$f(x) = Q_3(x) = f(x_1)H_1^{(3)}(x) + f(x_2)H_2^{(3)}(x) + f(x_3)H_3^{(3)}(x) \quad (49)$$

- 4 点で近似すると

$$f(x) \approx Q_4(x) = f(x_1)H_1^{(4)}(x) + f(x_2)H_2^{(4)}(x) + f(x_3)H_3^{(4)}(x) + f(x_4)H_4^{(4)}(x) \quad (50)$$

x_2 以外の 3 点を用いて (x_3 でも以下の議論は同様)

$$f(x) = Q_3(x) = f(x_1)H_1^{(3)}(x) + f(x_3)H_3^{(3)}(x) + f(x_4)H_4^{(3)}(x) \quad (51)$$

x_2 では,

$$f(x_2) = Q_3(x_2) = f(x_1)H_1^{(3)}(x_2) + f(x_3)H_3^{(3)}(x_2) + f(x_4)H_4^{(3)}(x_2) \quad (52)$$

これを $f(x) \approx Q_4(x)$ に代入すると,

$$\begin{aligned} f(x) \approx Q_4(x) &= f(x_1)H_1^{(4)}(x) + Q_3(x_2)H_2^{(4)}(x) + f(x_3)H_3^{(4)}(x) + f(x_4)H_4^{(4)}(x) \\ &= f(x_1)H_1^{(4)}(x) \\ &\quad + \{f(x_1)H_1^{(3)}(x_2) + f(x_3)H_3^{(3)}(x_2) + f(x_4)H_4^{(3)}(x_2)\} \\ &\quad + H_2^{(4)}(x) + f(x_3)H_3^{(4)}(x) + f(x_4)H_4^{(4)}(x) \\ &= f(x_1)\{H_1^{(4)}(x) + H_1^{(3)}(x_2)H_2^{(4)}(x)\} \\ &\quad + f(x_3)\{H_3^{(4)}(x) + H_3^{(3)}(x_2)H_2^{(4)}(x)\} \\ &\quad + f(x_4)\{H_4^{(4)}(x) + H_4^{(3)}(x_2)H_2^{(4)}(x)\} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} &H_1^{(4)}(x) + H_1^{(3)}(x_2)H_2^{(4)}(x) \\ &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \frac{(x_2-x_3)(x_2-x_4)}{(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ &= \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \{(x-x_2) - (x-x_1)\} = \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} &H_3^{(4)}(x) + H_3^{(3)}(x_2)H_2^{(4)}(x) \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \frac{(x_2-x_1)(x_2-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_4)} \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ &= \frac{(x-x_1)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_4)} \{(x-x_2) - (x-x_3)\} = \frac{(x-x_1)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_4)} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
& H_4^{(4)}(x) + H_4^{(3)}(x_2)H_2^{(4)}(x) \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} + \frac{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_3)} \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \{(x-x_2) - (x-x_4)\} = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_3)}
\end{aligned} \tag{56}$$

以上から ,

$$\begin{aligned}
f(x) \approx Q_4(x) &= f(x_1) \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\
&+ f(x_3) \frac{(x-x_1)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_4)} \\
&+ f(x_4) \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_3)} \\
&= f(x_1)H_1^{(3)}(x) + f(x_3)H_3^{(3)}(x) + f(x_4)H_4^{(3)}(x)
\end{aligned} \tag{57}$$

すなわち , $Q_4(x)$ で近似した場合 , 2 次式となり , $Q_3(x)$ で近似したものと等しくなる .

数値積分の基礎

- これから説明する Newton-Coate 積分, Gauss 積分ともに, この Lagrange 多項式による近似を元に数値的に積分を求める方法である.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b Q_n(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b H_k(x)dx\end{aligned}\tag{58}$$

- また, 以下の積分の値は, $f(x)$ の値とは全く無関係にサンプリング点の情報からのみ求めることができ, サンプリング点 x_k に対応した「重み」と呼ぶ

$$w_k = \int_a^b H_k(x)dx\tag{59}$$

- すなわち, $f(x)$ の積分を, サンプリング点での値 $f(x_k)$ とサンプリング点 x_k に対応した重み w_k をかけたものの和をとったもので近似できる

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b Q_n(x)dx = \sum_{k=1}^n f(x_k)w_k\tag{60}$$

- 被積分関数を Lagrange 多項式で近似しているので, 数値積分の精度は基本的にサンプリング点が多ければ多いほど高い.
- ただし, 被積分関数が n 次多項式の場合, サンプリング点を $n+1$ 個とれば, 解析的に積分したものに一致する. また, $n+2$ 個以上のサンプリング点をとっても変わらない.
- $x = \frac{a}{2}(1-r) + \frac{b}{2}(1+r)$ とおくと,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x(r))\frac{dx}{dr}dr = \int_{-1}^1 f(x(r))\frac{b-a}{2}dr = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(r))dr\tag{61}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x(r))dr \approx \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 Q_n(r)dr \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^n f(x_k(r))H_k(r)dr = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n f(x_k(r)) \int_{-1}^1 H_k(r)dx\end{aligned}\tag{62}$$

以下では, 積分区間を -1 から 1 までとして議論する.

Newton-Coate 積分 1

- Newton-Coate 積分では，積分区間の両端を含んで等間隔に n 個のサンプリング点を取る．
- $n = 2$ の場合は一般に台形則 (trapezoidal rule) $n = 3$ の場合は Simpson 積分と呼ばれている．
- 台形則の場合，

$$H_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x), \quad H_2(x) = \frac{1}{2}(1 + x) \quad (63)$$

なので，以下のようになる．

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^1 H_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x) dx = 1 \\ w_2 &= \int_{-1}^1 H_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + x) dx = 1 \end{aligned} \quad (64)$$

Newton-Coate 積分 2

- Simpson の場合 ,

$$\begin{aligned}H_1(x) &= \frac{1}{2}x(x-1) \\H_2(x) &= 1-x^2 \\H_3(x) &= \frac{1}{2}x(x+1)\end{aligned}\tag{65}$$

なので , 以下のようになる .

$$\begin{aligned}w_1 &= \int_{-1}^1 H_1(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x(x-1)dx = \frac{1}{3} \\w_2 &= \int_{-1}^1 H_2(x)dx = \int_{-1}^1 1-x^2dx = \frac{4}{3} \\w_3 &= \int_{-1}^1 H_3(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x(x+1)dx = \frac{1}{3}\end{aligned}\tag{66}$$

- 以下同様に求めることができる .
- 当然ながら , 被積分関数が $n-1$ 次の多項式であれば , n 個以上のサンプリング点を取れば , 完全な積分値を求めることができる .
- また , 奇関数の積分が 0 になることを考慮すると , $(2n-1)$ 次の多項式は $(2n-1)$ 個のサンプリング点を取れば正確に求められる .
- そのため , Newton-Coate 積分を行うときには , 奇数のサンプリング点をとることが多い .

Gauss 積分 1

- Gauss 積分では被積分関数を下式のような $(2n - 1)$ 次式で近似する .

$$f(x) \approx R_n(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n f(x_k) H_k(x)}_{Q_n(x)} + q(x) \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \quad (67)$$

ただし a_k は適当な係数で , $q(x)$ は以下のような n 次多項式である .

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad (68)$$

- サンプルング点 x_k においては $Q_n(x_k) = f(x_k)$, $q(x_k) = 0$ であるから ,

$$f(x_k) = R_n(x_k) \quad (69)$$

- ここでサンプルング点 $x_k (k = 1, \dots, n)$ の位置を

$$\int_{-1}^1 q(x) x^{k-1} dx = 0 \quad (70)$$

を満たすようにもとめると，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &\approx \int_{-1}^1 R_n(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x)dx + \int_{-1}^1 q(x) \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^n f(x_k)H_k(x)dx + \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\int_{-1}^1 q(x)x^{k-1} dx}_0 \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_{-1}^1 H_k(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)\end{aligned}\tag{71}$$

- これは，被積分関数 $f(x)$ の積分を n 個のサンプリング点で $2n - 1$ 次関数の積分として近似したことを意味する．

Gauss 積分 2

- 具体的にサンプリング点の位置を求める
- $n = 1$ の時

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x - x_1)x^{1-1}dx &= \int_{-1}^1 -x_1 dx \\ &= 2x_1 = 0\end{aligned}\tag{72}$$

これより $x_1 = 0$ 対応する重みを求めると,

$$\begin{aligned}h_1(x) &= 1 \\ \int_{-1}^1 h_1(x)dx &= \int_{-1}^1 1dx = 2\end{aligned}\tag{73}$$

- $n = 2$ の時

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)x^{1-1}dx &= \frac{2}{3} + 2x_1x_2 = 0 \\ \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)x^{2-1}dx &= -\frac{2}{3}(x_1 + x_2) = 0\end{aligned}\tag{74}$$

これより $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ 対応する重みを求めると,

$$h_1(x) = \frac{x - \sqrt{\frac{1}{3}}}{-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \sqrt{\frac{1}{3}} \right), \quad \int_{-1}^1 h_1(x) dx = 1$$

$$h_2(x) = \frac{x + \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \sqrt{\frac{1}{3}} \right), \quad \int_{-1}^1 h_2(x) dx = 1 \quad (75)$$

Gauss 積分 3

- $n = 3$ の時

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)x^{1-1}dx \\ &= -\frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3) - 2(x_1x_2x_3) = 0 \\ & \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)x^{2-1}dx \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{3}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0 \\ & \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)x^{3-1}dx \\ &= -\frac{2}{5}(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{2}{3}(x_1x_2x_3) = 0 \end{aligned} \tag{76}$$

これより , $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ 対応する重みを求めると ,

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= \frac{x \left(x - \sqrt{\frac{3}{5}} \right)}{-\sqrt{\frac{3}{5}} 2\sqrt{\frac{3}{5}}}, & \int_{-1}^1 h_1(x) dx &= \frac{5}{9} \\
h_2(x) &= \frac{\left(x - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)}{-\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{3}{5}}}, & \int_{-1}^1 h_2(x) dx &= \frac{8}{9} \\
h_3(x) &= \frac{x \left(x + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)}{\sqrt{\frac{3}{5}} 2\sqrt{\frac{3}{5}}}, & \int_{-1}^1 h_3(x) dx &= \frac{5}{9}
\end{aligned} \tag{77}$$

実際の数値積分のサンプリング点数

- 当然ながら，サンプリング点数が多ければ多いほど精度が高い
- しかしながら，サンプリング点数が多いと計算時間がかかる．
- 目安は，1次要素なら Gauss 積分で2点，Newton-Coate で3点，2次要素なら Gauss 積分で3点，Newton-Coate で5点

サンプリング点数	x_i	w_i
1	0	2
2	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626$	1
3	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483$ 0	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	$\pm 0.86113\ 63115\ 94053$ $\pm 0.33998\ 10435\ 84856$	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	$\pm 0.90617\ 98459\ 38664$ $\pm 0.53846\ 93101\ 05683$ 0	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
6	$\pm 0.93246\ 95142\ 03152$ $\pm 0.66120\ 93864\ 66265$ $\pm 0.23861\ 91860\ 83197$	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691

表 1: Gauss 積分のサンプリング点と重みの値

Newton-Coate と Gauss 積分の使い分け

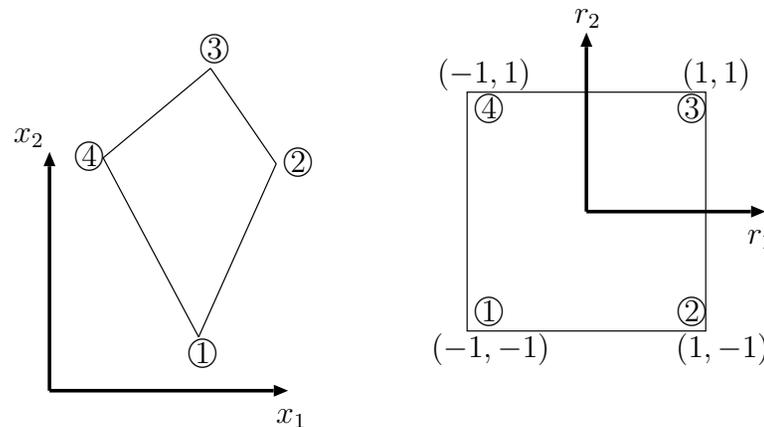
- 同じ積分点数の場合一般論としては Gauss 積分の方が精度が高いため Gauss 積分をつかう
- しかし、Gauss 積分が適応できるのは、四角形とか単純な形状の場合のみ
- 複雑な断面形状（複雑ではないが、円筒なども含まれる）の場合は Gauss 積分が使えないので Newton-Coate 積分を使う。
- また、有限要素法の場合、要素内部の情報は積分点でしか評価しない。たとえば弾塑性の場合一般に材料の降伏は表面から発生するが Gauss 積分の場合は表面に積分点がないため、正しく評価できない。その場合は表面にも積分点がある Newton-Coate 積分の方が適している。

4 節点四角形ソリッド要素

- 1次元の場合，積分領域を n 個の区間に分割し，それぞれの区間で，1次の場合線分内の座標 x を以下の補間関数を用いて $r(-1 \leq r \leq 1)$ に「座標変換」した.

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (78)$$

- では，2次元の場合は？
- まず，積分領域を四角形で分割する．4つの頂点を $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ に対応させ，領域内を2つのパラメータ r_1, r_2 ($-1 \leq r_1 \leq 1, -1 \leq r_2 \leq 1$) をもちいて「座標変換」する．
- 即ち物理座標系で左図のような配置になっている節点を右図のように対応させる．これは物理座標系内の4面体を r_1 - r_2 座標系の正方形に写像することを意味している．この r_1 - r_2 座標系のことを，自然座標系と呼ぶ．



(a) 物理座標系

(b) 自然座標系

補間関数

- 補間関数の具体的な形は以下ようになる.

$$N^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 - r_2) \quad (79)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 - r_2) \quad (80)$$

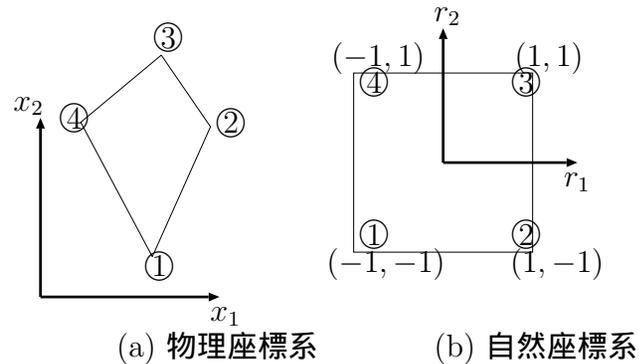
$$N^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 + r_2) \quad (81)$$

$$N^{(4)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 + r_2) \quad (82)$$

- これは, 1次元の補間関数を掛け合わせたもの

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (83)$$

- 対応する節点で 1, その他の節点では 0 の値をとる.



微分の離散値による表現 1

- ひずみを計算する際に必要な u_i の x_j に関する微分は、微分の連鎖則を用いることにより以下のように求められる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_j} u_i^{(n)} = \left(\frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x_j} + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x_j} \right) u_i^{(n)} \quad (84)$$

- $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_j}$ はやはり微分の連鎖則を用いて、以下のように求められる。
- 以下のようにヤコビマトリックス $[J]$ を求める。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$= [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (86)$$

微分の離散値による表現 2

- このヤコビマトリックスの各成分 $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は以下ようになる.

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j} x_i^{(n)} \quad (87)$$

- このヤコビマトリックスを用いれば $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_i}$ は以下のように求められる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (88)$$

- このヤコビマトリックスを用いると、領域積分は以下のように表される.

$$\int_{\Omega_e} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det[J] dr_1 dr_2 \quad (89)$$

- この積分は通常、Gauss 積分などの数値積分法により実行される. ここでは、1次元の Gauss 積分を二重にしたものを用いることにする. 即ち、

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_i \sum_j w_i w_j f(x_i, y_j) \quad (90)$$

8 節点六面体ソリッド要素

- 1次元の場合，積分領域を n 個の区間に分割し，それぞれの区間で，1次の場合線分内の座標 x を以下の補間関数を用いて $r(-1 \leq r \leq 1)$ に「座標変換」した.

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - r), \quad N^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + r) \quad (91)$$

- では，3次元の場合は？
- まず，積分領域を六面体で分割する．8つの頂点を表のようにに対応させ，領域内を3つのパラメータ r_1, r_2, r_3 ($-1 \leq r_1 \leq 1, -1 \leq r_2 \leq 1, -1 \leq r_3 \leq 1$) をもちいて「座標変換」する．

節点	r_1	r_2	r_3
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

表 2: 節点の対応

物理座標系と自然座標系

- 即ち物理座標系で左図のような配置になっている節点を右図のように対応させる．これは物理座標系内の6面体を r_1 - r_2 - r_3 座標系の立方体に写像することを意味している．この r_1 - r_2 - r_3 座標系のことを、自然座標系と呼ぶ．

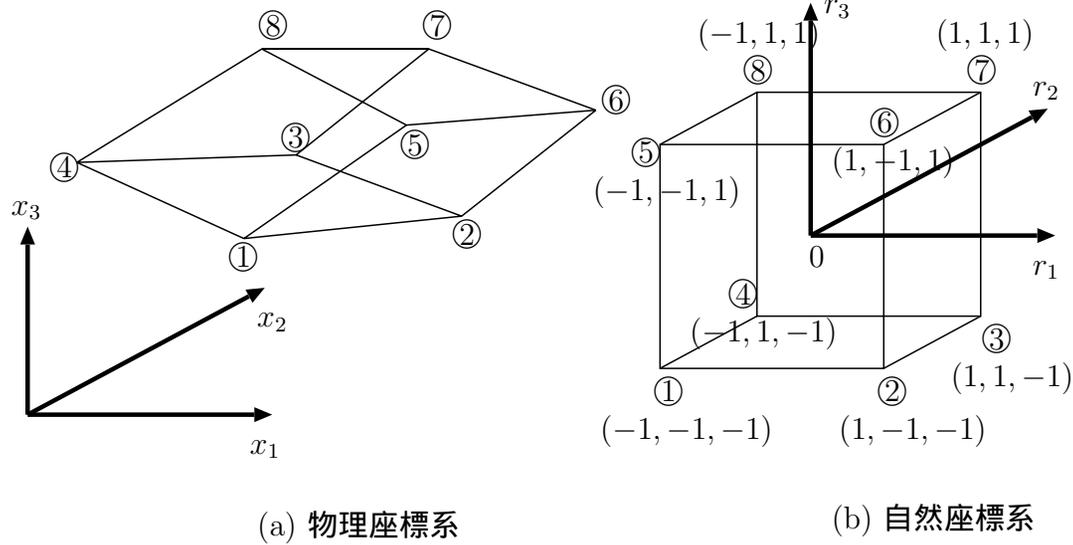


図 2: 物理座標系と自然座標系の対応

- このときの形状関数は以下のようになる .

$$N^{(1)} = \frac{1}{8}(1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \quad (92)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{8}(1 + r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \quad (93)$$

$$N^{(3)} = \frac{1}{8}(1 + r_1)(1 + r_2)(1 - r_3) \quad (94)$$

$$N^{(4)} = \frac{1}{8}(1 - r_1)(1 + r_2)(1 - r_3) \quad (95)$$

$$N^{(5)} = \frac{1}{8}(1 - r_1)(1 - r_2)(1 + r_3) \quad (96)$$

$$N^{(6)} = \frac{1}{8}(1 + r_1)(1 - r_2)(1 + r_3) \quad (97)$$

$$N^{(7)} = \frac{1}{8}(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3) \quad (98)$$

$$N^{(8)} = \frac{1}{8}(1 - r_1)(1 + r_2)(1 + r_3) \quad (99)$$

微分の離散値による表現 1

- ひずみを計算する際に必要な変位 u_i の x_j に関する微分は微分の連鎖則を用いることにより下式のように求められる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_j} u_i^{(n)} = \left(\frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x_j} + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x_j} + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_3} \frac{\partial r_3}{\partial x_j} \right) u_i^{(n)} \quad (100)$$

- ここで, $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_j}$ はやはり微分の連鎖則を用いて, 以下のように求められる。
- 下式のようなヤコビ (Jacob) マトリックス $[J]$ を求める。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (101)$$

微分の離散値による表現 2

- このヤコビマトリックスの各成分 $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は以下ようになる.

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j} x_i^{(n)} \quad (102)$$

- このヤコビマトリックスを用いれば, $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_i}$ は下式のように求められる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (103)$$

- このヤコビマトリックスを用いると, 領域積分は以下のように表される.

$$\int_{\Omega_e} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det[J] dr_1 dr_2 dr_3 \quad (104)$$

- この積分は通常, Gauss 積分などの数値積分法により実行される. ここでは最も単純に総和を 3 重にしたものを用いることにする. 即ち,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz \approx \sum_i \sum_j \sum_k w_i w_j w_k f(x_i, y_j, z_k) \quad (105)$$

Lagrange 族

- 1次元の問題で、近似の精度を上げるため、線分内に3つの節点を取り以下の補間関数を導入した。

$$N^{(1)} = -\frac{1}{2}r(1-r) \quad (106)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{2}r(1+r) \quad (107)$$

$$N^{(3)} = 1-r^2 \quad (108)$$

- これを $r(-1 \leq r \leq 1)$ の代わりに $r_1, r_2(-1 \leq r_1 \leq 1, -1 \leq r_2 \leq 1)$ と2変数使用し、それにもなって補間関数を掛け合わすと、9節点の四角形要素を構成できる。

節点	r_1	r_2
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1
5	0	-1
6	1	0
7	0	1
8	-1	0
9	0	0

表 3: 節点の対応

物理座標系と自然座標系の対応

● 物理座標系と自然座標系の対応

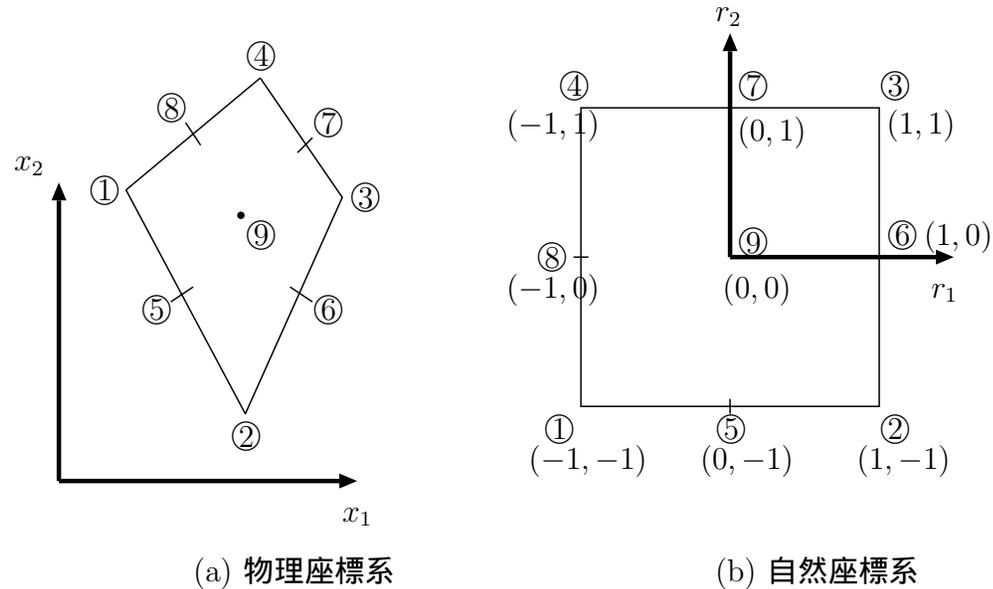


図 3: 物理座標系と自然座標系の対応

補間関数

- 補間関数及び補間関数の微分の具体的な形は、1次元の補間関数を以下のように表せば系統的に表すことができる。

$$N_{i-} = -\frac{1}{2}r_i(1 - r_i) \quad (109)$$

$$N_{i0} = 1 - r_i^2 \quad (110)$$

$$N_{i+} = \frac{1}{2}r_i(1 + r_i) \quad (111)$$

$$N^{(1)} = N_{1-}N_{2-} = \frac{1}{4}r_1r_2(1 - r_1)(1 - r_2) \quad (112)$$

$$N^{(2)} = N_{1+}N_{2-} = -\frac{1}{4}r_1r_2(1 + r_1)(1 - r_2) \quad (113)$$

$$N^{(3)} = N_{1+}N_{2+} = \frac{1}{4}r_1r_2(1 + r_1)(1 + r_2) \quad (114)$$

$$N^{(4)} = N_{1-}N_{2+} = -\frac{1}{4}r_1r_2(1 - r_1)(1 + r_2) \quad (115)$$

$$N^{(5)} = N_{10}N_{2-} = -\frac{1}{2}r_2(1 - r_1^2)(1 - r_2) \quad (116)$$

$$N^{(6)} = N_{1+}N_{20} = \frac{1}{2}r_1(1 + r_1)(1 - r_2^2) \quad (117)$$

$$N^{(7)} = N_{10}N_{2+} = \frac{1}{2}r_2(1 - r_1^2)(1 + r_2) \quad (118)$$

$$N^{(8)} = N_{1-}N_{20} = -\frac{1}{2}r_1(1 - r_1)(1 - r_2^2) \quad (119)$$

$$N^{(9)} = N_{10}N_{20} = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2) \quad (120)$$

Lagrange 族の由来

- 以上の議論は、ベースにする1次元の補間関数としてより高次のものを用いても全く同じで、更に3次元に拡張することも容易である。このような要素を一般にLagrange 族と呼ぶ。
- Lagrange 族の名称の由来は補間関数にLagrange の多項式が用いられていることにある。

$$H_i(x) = \frac{(x - x_{(1)})(x - x_{(2)}) \dots (x - x_{(i-1)})(x - x_{(i+1)}) \dots (x - x_{(n)})}{(x_{(i)} - x_{(1)})(x_{(i)} - x_{(2)}) \dots (x_{(i)} - x_{(i-1)})(x_{(i)} - x_{(i+1)}) \dots (x_{(i)} - x_{(n)})} \quad (121)$$

- 実際にLagrange の多項式から1次元の補間関数を求めると、以下のようなになる。

$n = 2$ ($x_{(1)} = -1, x_{(2)} = 1$) の場合

$$H_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x), \quad H_2(x) = \frac{1}{2}(1 + x) \quad (122)$$

$n = 3$ ($x_{(1)} = -1, x_{(2)} = 1, x_{(3)} = 0$) の場合

$$H_1 = \frac{1}{2}x(x - 1), \quad H_2 = \frac{1}{2}x(x + 1), \quad H_3 = 1 - x^2 \quad (123)$$

$n = 4$ ($x_{(1)} = -1, x_{(2)} = 1, x_{(3)} = -\frac{1}{3}, x_{(4)} = \frac{1}{3}$) の場合

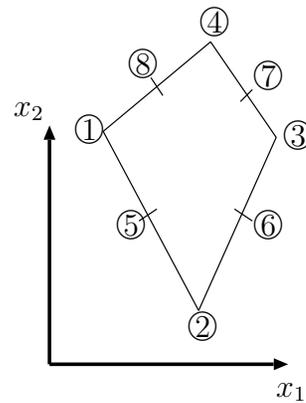
$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{16}(x - 1)(9x^2 - 1), & H_2 &= \frac{1}{16}(x + 1)(9x^2 - 1) \\ H_3 &= \frac{9}{16}(x^2 - 1)(3x - 1), & H_4 &= -\frac{9}{16}(x^2 - 1)(3x + 1) \end{aligned} \quad (124)$$

- ただし、一般には $n = 3$ 以上の2次元、3次元の補間関数は計算コストが大きすぎるためあまり用いられない。

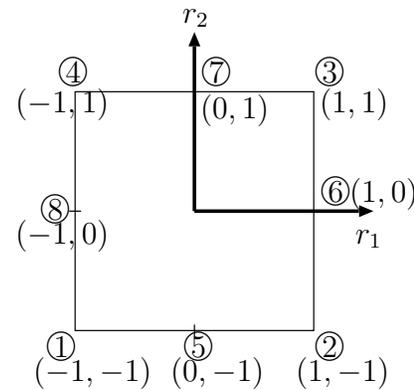
serendipity 族

- Lagrange 族の補間関数は構成が明解でコーディングも系統的に行うことができるが、特に3次元の場合には自由度が多い分だけ計算負荷がかかる。そこで四角形の辺上にしか節点がない要素を構成する。
- このような要素は serendipity 族と呼ばれている。四角形の場合は8節点で、補間関数の具体的な形は以下のようになる。

節点	r_1	r_2	節点	r_1	r_2
1	-1	-1	5	0	-1
2	1	-1	6	1	0
3	1	1	7	0	1
4	-1	1	8	-1	0



(a) 物理座標系



(b) 自然座標系

serendipity 族の補間関数 1

- 補間関数の具体的な形は以下のようなになる .

$$N^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 - r_2)(-1 - r_1 - r_2) \quad (125)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 - r_2)(-1 + r_1 - r_2) \quad (126)$$

$$N^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 + r_2)(-1 + r_1 + r_2) \quad (127)$$

$$N^{(4)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 + r_2)(-1 - r_1 + r_2) \quad (128)$$

$$N^{(5)} = \frac{1}{2}(1 - r_2)(1 - r_1^2) \quad (129)$$

$$N^{(6)} = \frac{1}{2}(1 + r_1)(1 - r_2^2) \quad (130)$$

$$N^{(7)} = \frac{1}{2}(1 + r_2)(1 - r_1^2) \quad (131)$$

$$N^{(8)} = \frac{1}{2}(1 - r_1)(1 - r_2^2) \quad (132)$$

- この補間関数は当初偶然発見され, それ故 serendipity 族と呼ばれているが, その後の研究によってここに示すような補間関数を系統的に構成する方法が確立している.

serendipity 族の補間関数 2

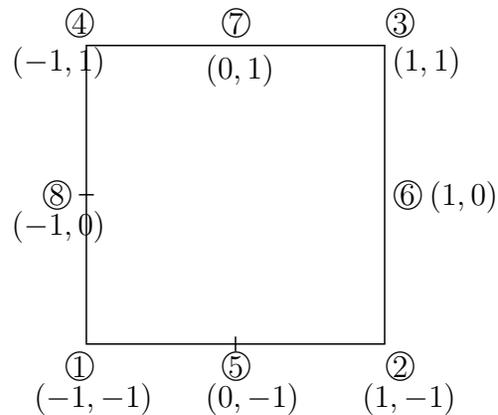
- まず 4 節点の補間関数をもとに, 8 節点の補間関数をつくることを考える. 4 節点の補間関数は以下のようにになっている.

$$N^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 - r_2) \quad (133)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 - r_2) \quad (134)$$

$$N^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 + r_2) \quad (135)$$

$$N^{(4)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 + r_2) \quad (136)$$



これら是对応する節点で 1, その他の節点では 0 の値をとるといふ特徴がある.

serendipity 族の補間関数 3

- 今5番目の節点として, 自然座標系で $(0, -1)$ の点を考える. このとき,

$$N^{(5)} = \frac{1}{2}(1 - r_2)(1 - r_1^2) \quad (137)$$

という関数を考えれば, これは, ⑤で1, ①~④では0になる. ただし $N^{(1)} \sim N^{(4)}$ は⑤では0にならないので, 以下のように新たな補間関数を作る.

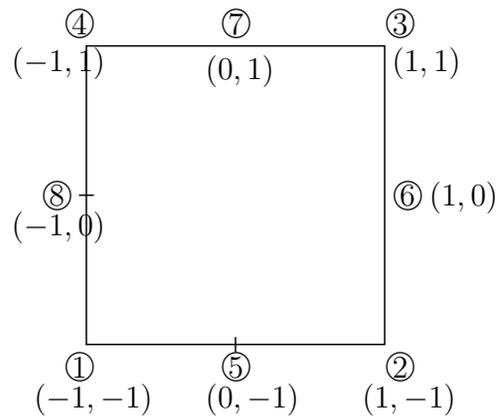
$$\tilde{N}^{(1)} = N^{(1)} - \frac{1}{2}N^{(5)} \quad (138)$$

$$\tilde{N}^{(2)} = N^{(2)} - \frac{1}{2}N^{(5)} \quad (139)$$

$$\tilde{N}^{(3)} = N^{(3)} \quad (140)$$

$$\tilde{N}^{(4)} = N^{(4)} \quad (141)$$

- このとき, $\tilde{N}^{(1)} \sim \tilde{N}^{(4)}$ は対応する節点で1, 他の節点は⑤を含めて0になっている.



serendipity 族の補間関数 4

- 同様に 6, 7, 8 番目の節点としてそれぞれ $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ を考える. 対応する補間関数は以下ようになる.

$$N^{(6)} = \frac{1}{2}(1 + r_1)(1 - r_2^2) \quad (142)$$

$$N^{(7)} = \frac{1}{2}(1 + r_2)(1 - r_1^2) \quad (143)$$

$$N^{(8)} = \frac{1}{2}(1 - r_1)(1 - r_2^2) \quad (144)$$

- このとき,

$$\tilde{N}^{(1)} = N^{(1)} - \frac{1}{2}N^{(5)} - \frac{1}{2}N^{(8)} \quad (145)$$

$$\tilde{N}^{(2)} = N^{(2)} - \frac{1}{2}N^{(5)} - \frac{1}{2}N^{(6)} \quad (146)$$

$$\tilde{N}^{(3)} = N^{(3)} - \frac{1}{2}N^{(6)} - \frac{1}{2}N^{(7)} \quad (147)$$

$$\tilde{N}^{(4)} = N^{(4)} - \frac{1}{2}N^{(7)} - \frac{1}{2}N^{(8)} \quad (148)$$

とすれば, 対応する節点で 1, 他の節点では 0 になる. 実際にこれを計算すると,

$$N^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 - r_2)(-1 - r_1 - r_2) \quad (149)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 - r_2)(-1 + r_1 - r_2) \quad (150)$$

$$N^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 + r_2)(-1 + r_1 + r_2) \quad (151)$$

$$N^{(4)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 + r_2)(-1 - r_1 + r_2) \quad (152)$$

となり, 前述の 8 節点要素の形状関数と一致する.

serendipity 族の補間関数 5

- さらに8節点の要素から9節点の要素をつくることもできる. 9番目の節点を (0,0) にとると,

$$N^{(9)} = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2) \quad (153)$$

とすれば対応する節点で1, 他の節点では0になる. これをもとに $N^{(1)} \sim N^{(8)}$ を以下のようにすれば, Lagrange 族の9節点の補間関数が得られる.

$$N^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 - r_2)(-1 - r_1 - r_2) + \frac{1}{4}N^{(9)} \quad (154)$$

$$N^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 - r_2)(-1 + r_1 - r_2) + \frac{1}{4}N^{(9)} \quad (155)$$

$$N^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + r_1)(1 + r_2)(-1 + r_1 + r_2) + \frac{1}{4}N^{(9)} \quad (156)$$

$$N^{(4)} = \frac{1}{4}(1 - r_1)(1 + r_2)(-1 - r_1 + r_2) + \frac{1}{4}N^{(9)} \quad (157)$$

$$N^{(5)} = \frac{1}{2}(1 - r_2)(1 - r_1^2) - \frac{1}{2}N^{(9)} \quad (158)$$

$$N^{(6)} = \frac{1}{2}(1 + r_1)(1 - r_2^2) - \frac{1}{2}N^{(9)} \quad (159)$$

$$N^{(7)} = \frac{1}{2}(1 + r_2)(1 - r_1^2) - \frac{1}{2}N^{(9)} \quad (160)$$

$$N^{(8)} = \frac{1}{2}(1 - r_1)(1 - r_2^2) - \frac{1}{2}N^{(9)} \quad (161)$$

三角形要素の補間関数 1

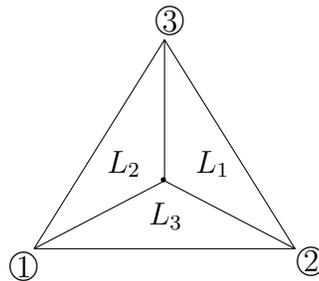
- 三角形要素の補間関数は以下のように定義される面積座標系で表される.
- 面積座標とは, 要素の面積を A として, 要素内の点を与えられたとき, 対応する節点の対辺とその点で作る三角形の面積を A_1, A_2, A_3 として, 下式により定義するものである.

$$L_1 = A_1/A$$

$$L_2 = A_2/A$$

$$L_3 = A_3/A$$

(162)



$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

(163)

三角形要素の補間関数 2

- 1次 3節点の補間関数

$$N^{(1)} = L_1 \quad (164)$$

$$N^{(2)} = L_2 \quad (165)$$

$$N^{(3)} = L_3 \quad (166)$$

- 2次 6節点の補間関数

$$N^{(1)} = L_1(2L_1 - 1) \quad (167)$$

$$N^{(2)} = L_2(2L_2 - 1) \quad (168)$$

$$N^{(3)} = L_3(2L_3 - 1) \quad (169)$$

$$N^{(4)} = 4L_2L_3 \quad (170)$$

$$N^{(5)} = 4L_3L_1 \quad (171)$$

$$N^{(6)} = 4L_1L_2 \quad (172)$$

- 6節点の補間関数は3節点から作ることができる.

三角形要素の補間関数と数値積分 1

- 実際に要素剛性マトリックスを計算するときには数値積分が，必要になる．
- 数値積分は，この面積座標 L_1, L_2, L_3 と自然座標系 r_1, r_2 を以下のように対応させておこなう．

$$r_1 = L_1 \quad (173)$$

$$r_2 = L_2 \quad (174)$$

$$1 - r_1 - r_2 = L_3 \quad (175)$$

- 三角形内部の領域は，図のような自然座標系の領域と対応している．

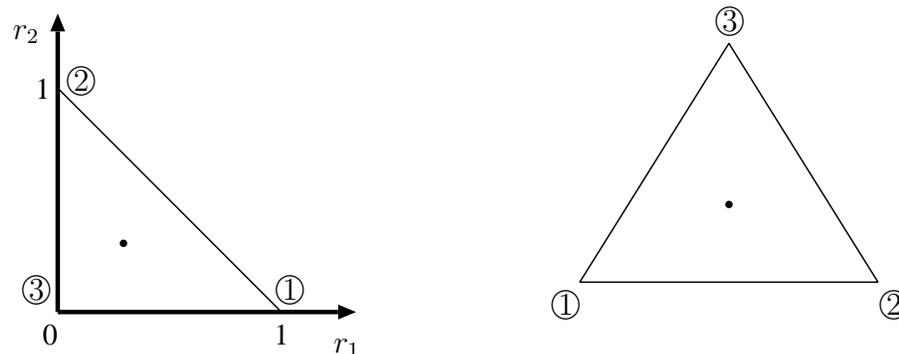


図 4: 三角形要素の自然座標と面積座標

三角形要素の補間関数と数値積分 2

- 物理空間での積分 $\int_V dV$ は 4 角形要素と同様に以下のヤコビマトリックスにより自然座標系に変換する.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix}}_{\downarrow [J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (176)$$

- すなわち

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (177)$$

- ヤコビマトリックスの成分 $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は 4 角形要素と同様に以下のようになる .

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j} x_i^{(n)} \quad (178)$$

三角形要素の補間関数と数値積分 3

- ここで形状関数の自然座標に関する微分 $\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_j}$ が現れるが、

$$r_1 = L_1 \quad (179)$$

$$r_2 = L_2 \quad (180)$$

$$1 - r_1 - r_2 = L_3 \quad (181)$$

この関係を元に、以下のように面積座標系と対応させる。

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_1} \quad (182)$$

$$= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \quad (183)$$

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_2} \quad (184)$$

$$= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \quad (185)$$

三角形要素の補間関数と数値積分 4

- これらをもとに $\int_V dV \Rightarrow \int_0^1 \int_0^{1-r_1} \det J dr_2 dr_1$ を行う. 実際には $\iint F dr_1 dr_2 = \frac{1}{2} \sum w_i F(x_i, y_i)$ の形式で計算する.

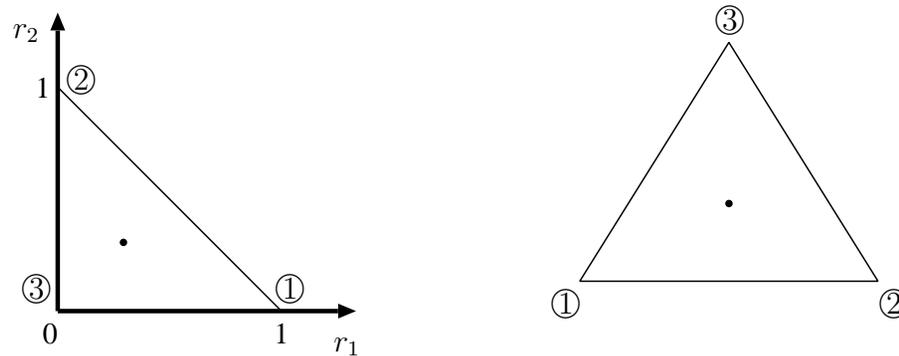


図 5: 三角形要素の自然座標と面積座標

三角形要素の補間関数と数値積分 5

Integration order	Degree of precision	r -coordinates	s -coordinates	Weights
3-point	2	$r_1 = 0.16666\ 66666\ 667$ $r_2 = 0.66666\ 66666\ 667$ $r_3 = r_1$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$	$w_1 = 0.33333\ 33333\ 333$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$
7-point	5	$r_1 = 0.10128\ 65073\ 235$ $r_2 = 0.79742\ 69853\ 531$ $r_3 = r_1$ $r_4 = 0.47014\ 20641\ 051$ $r_5 = r_4$ $r_6 = 0.05971\ 58717\ 898$ $r_7 = 0.33333\ 33333\ 333$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$ $s_4 = r_6$ $s_5 = r_4$ $s_6 = r_4$ $s_7 = r_7$	$w_1 = 0.12593\ 91805\ 448$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0.13239\ 41527\ 885$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = 0.225$
13-point	7	$r_1 = 0.06513\ 01029\ 002$ $r_2 = 0.86973\ 97941\ 956$ $r_3 = r_1$ $r_4 = 0.31286\ 54960\ 049$ $r_5 = 0.63844\ 41885\ 698$ $r_6 = 0.04869\ 03154\ 253$ $r_7 = r_5$ $r_8 = r_4$ $r_9 = r_6$ $r_{10} = 0.26034\ 59660\ 790$ $r_{11} = 0.47930\ 80678\ 419$ $r_{12} = r_{10}$ $r_{13} = 0.33333\ 33333\ 333$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$ $s_4 = r_6$ $s_5 = r_4$ $s_6 = r_5$ $s_7 = r_6$ $s_8 = r_5$ $s_9 = r_4$ $s_{10} = r_{10}$ $s_{11} = r_{10}$ $s_{12} = r_{11}$ $s_{13} = r_{13}$	$w_1 = 0.05334\ 72356\ 008$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0.07711\ 37608\ 903$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = w_4$ $w_8 = w_4$ $w_9 = w_4$ $w_{10} = 0.17561\ 52574\ 332$ $w_{11} = w_{10}$ $w_{12} = w_{10}$ $w_{13} = -0.14957\ 00444\ 67$

4面体要素の補間関数 1

- 4面体要素の補間関数は以下のように定義される体積座標系で表される.
- 体積座標とは, 要素の体積を A として, 要素内の点を与えられたとき, 対応する節点の対面とその点で作る三角錐の体積を A_1, A_2, A_3, A_4 として, 下式により定義するものである.

$$L_1 = A_1/A$$

$$L_2 = A_2/A$$

$$L_3 = A_3/A$$

$$L_4 = A_4/A$$

(186)

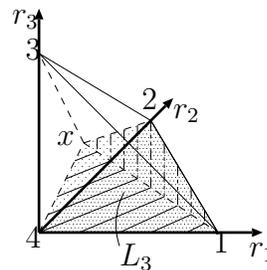


図 6: 体積座標系

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

(187)

4面体要素の補間関数 2

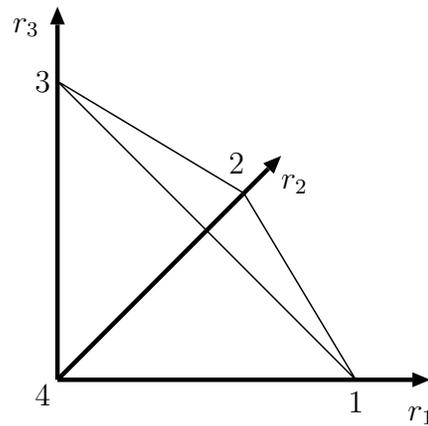
- 1次 4節点の補間関数

$$N^{(1)} = L_1 \quad (188)$$

$$N^{(2)} = L_2 \quad (189)$$

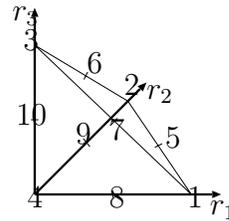
$$N^{(3)} = L_3 \quad (190)$$

$$N^{(4)} = L_4 \quad (191)$$



4 面体要素の補間関数 3

- 2 次 10 節点の補間関数



$$N^{(5)} = 4L_1L_2 \quad (192)$$

$$N^{(6)} = 4L_2L_3 \quad (193)$$

$$N^{(7)} = 4L_1L_3 \quad (194)$$

$$N^{(8)} = 4L_1L_4 \quad (195)$$

$$N^{(9)} = 4L_2L_4 \quad (196)$$

$$N^{(10)} = 4L_3L_4 \quad (197)$$

$$N^{(1)} = N^{(1)} - \frac{1}{2}(N^{(5)} + N^{(7)} + N^{(8)}) = L_1(2L_1 - 1) \quad (198)$$

$$N^{(2)} = N^{(2)} - \frac{1}{2}(N^{(5)} + N^{(6)} + N^{(9)}) = L_2(2L_2 - 1) \quad (199)$$

$$N^{(3)} = N^{(3)} - \frac{1}{2}(N^{(6)} + N^{(7)} + N^{(10)}) = L_3(2L_3 - 1) \quad (200)$$

$$N^{(4)} = N^{(4)} - \frac{1}{2}(N^{(8)} + N^{(9)} + N^{(10)}) = L_4(2L_4 - 1) \quad (201)$$

4面体要素の補間関数と数値積分 1

- 実際に要素剛性マトリックスを計算するときには数値積分が，必要になる．
- 数値積分は，この体積座標 L_1, L_2, L_3, L_4 と自然座標系 r_1, r_2, r_3 を以下のように対応させておこなう．

$$L_1 = r_1 \quad (202)$$

$$L_2 = r_2 \quad (203)$$

$$L_3 = r_3 \quad (204)$$

$$L_4 = 1 - r_1 - r_2 - r_3 \quad (205)$$

- 物理空間での積分 $\int_V dV$ は6面体要素と同様に以下のヤコビマトリックスにより自然座標系に変換する．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r_1} & \frac{\partial y}{\partial r_1} & \frac{\partial z}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x}{\partial r_2} & \frac{\partial y}{\partial r_2} & \frac{\partial z}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x}{\partial r_3} & \frac{\partial y}{\partial r_3} & \frac{\partial z}{\partial r_3} \end{bmatrix}}_{\downarrow [J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (206)$$

- ヤコビマトリックスの成分 $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は6面体要素と同様に以下のようになる．

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j} x_i^{(n)} \quad (207)$$

4面体要素の補間関数と数値積分 2

- ここで形状関数の自然座標に関する微分 $\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_j}$ が現れるが、

$$L_1 = r_1 \tag{208}$$

$$L_2 = r_2 \tag{209}$$

$$L_3 = r_3 \tag{210}$$

$$L_4 = 1 - r_1 - r_2 - r_3 \tag{211}$$

この関係を元に、以下のように面積座標系と対応させる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} &= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial r_1} \\ &= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_4} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} &= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial r_2} \\ &= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_4} \\ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_3} &= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_3} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_3} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_3} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial r_3} \\ &= \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_4} \end{aligned} \tag{212}$$

4面体要素の補間関数と数値積分 3

- これらをもとに

$$\int_V F(x, y, z) dV = \frac{1}{6} \sum w_i F(x_i, y_i, z_i) \quad (213)$$

の形式で数値積分を行う。

- 積分点, 及び重み

N	M	Weight W	α	β	ν	δ
2	4	0.25000 00000 000000 ⁺⁰⁰⁰	0.58541 ⁰¹⁹⁶⁶ 249685 ⁺⁰⁰⁰	0.13819 ⁶⁶⁰¹¹ 25015 ⁺⁰⁰⁰	0.13819 ⁶⁶⁰¹¹ 250105 ⁺⁰⁰⁰	0.13819 ⁶⁶⁰¹¹ 250105 ⁺⁰⁰⁰
3	1	-0.80000 ⁰⁰⁰⁰⁰ 000000 ⁺⁰⁰⁰	0.25000 ⁰⁰⁰⁰⁰ 000000 ⁺⁰⁰⁰			
	4	0.45000 ⁰⁰⁰⁰⁰ 000000 ⁺⁰⁰⁰	0.50000 ⁰⁰⁰⁰⁰ 000000 ⁺⁰⁰⁰	0.16666 ⁶⁶⁶⁶⁶ 666667 ⁺⁰⁰⁰	0.16666 ⁶⁶⁶⁶⁶ 666667 ⁺⁰⁰⁰	0.16666 ⁶⁶⁶⁶⁶ 666667 ⁺⁰⁰⁰
4	4	0.50373 79410 012282 ⁻⁰⁰¹	0.77164 29020 672371 ⁺⁰⁰⁰	0.76119 03264 425430 ⁻⁰⁰¹	0.76119 03264 425430 ⁻⁰⁰¹	0.76119 03264 425430 ⁻⁰⁰¹
	12	0.66542 06863 329239 ⁻⁰⁰¹	0.11970 05277 978019 ⁺⁰⁰⁰	0.71831 64526 766925 ⁻⁰⁰¹	0.40423 39134 672644 ⁺⁰⁰⁰	0.40423 39134 672644 ⁺⁰⁰⁰
5	1	0.18841 85567 365411 ⁺⁰⁰⁰	0.25000 00000 000000 ⁺⁰⁰⁰	0.25000 00000 000000 ⁺⁰⁰⁰	0.25000 00000 000000 ⁺⁰⁰⁰	0.25000 00000 000000 ⁺⁰⁰⁰
	4	0.67038 58372 604275 ⁻⁰⁰¹	0.73163 69079 576180 ⁺⁰⁰⁰	0.89454 36401 412733 ⁻⁰⁰¹	0.89454 36401 412733 ⁻⁰⁰¹	0.89454 36401 412733 ⁻⁰⁰¹
	12	0.45285 59236 327399 ⁻⁰⁰¹	0.13258 10999 384657 ⁺⁰⁰⁰	0.24540 03792 903000 ⁻⁰⁰¹	0.42143 94310 662522 ⁺⁰⁰⁰	0.42143 94310 662522 ⁺⁰⁰⁰
6	1	0.90401 29046 014750 ⁻⁰⁰¹	0.25000 00000 000000 ⁺⁰⁰⁰			
	4	0.19119 83427 899124 ⁻⁰⁰¹	0.82771 92480 479295 ⁺⁰⁰⁰	0.57426 91731 735683 ⁻⁰⁰¹	0.57426 91731 735683 ⁻⁰⁰¹	0.57426 91731 735683 ⁻⁰⁰¹
	12	0.43614 93840 666568 ⁻⁰⁰¹	0.51351 88412 556341 ⁻⁰⁰¹	0.48605 10285 706072 ⁺⁰⁰⁰	0.23129 85436 519147 ⁺⁰⁰⁰	0.23129 85436 519147 ⁺⁰⁰⁰
	12	0.25811 67596 199161 ⁻⁰⁰¹	0.29675 38129 690260 ⁺⁰⁰⁰	0.60810 79894 015281 ⁺⁰⁰⁰	0.47569 09881 472290 ⁻⁰⁰¹	0.47569 09881 472290 ⁻⁰⁰¹

剛性マトリックス作成の手順 – 4 節点四角形 1

- 数値積分を含んだ剛性マトリックスの手順は以下のようなになる .
- たとえば , 2次元の4 節点四角形要素の要素剛性マトリックスを , 2×2 の Gauss 積分によって求める場合
- 要素剛性マトリックスの積分領域を変換する (これはアイソパラメトリック要素による積分領域の変換)

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \quad (214)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (215)$$

- 数値積分を導入する

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\ &= \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 w_a w_b [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (216)$$

剛性マトリックス作成の手順 – 4 節点四角形 2

- 具体的には，各サンプリング点 r_a, r_b において，ヤコビマトリックスの成分は下式に従い求める．

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_i}{\partial r_j}(r_a, r_b) &= \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(n)} \\
 &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(3)} + \frac{\partial N^{(4)}}{\partial r_j}(r_a, r_b) x_i^{(4)}
 \end{aligned} \tag{217}$$

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1 - r_2) \tag{218} \quad \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1 + r_2) \tag{222}$$

$$\frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1 - r_1) \tag{219} \quad \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1 + r_1) \tag{223}$$

$$\frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} = \frac{1}{4}(1 - r_2) \tag{220} \quad \frac{\partial N^{(4)}}{\partial r_1} = -\frac{1}{4}(1 + r_2) \tag{224}$$

$$\frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} = -\frac{1}{4}(1 + r_1) \tag{221} \quad \frac{\partial N^{(4)}}{\partial r_2} = \frac{1}{4}(1 - r_1) \tag{225}$$

- すべての成分をもとめ，ヤコビマトリックスをつくり，また，その行列式を計算する．

剛性マトリックス作成の手順 – 4 節点四角形 3

- $[B]$ マトリックスの成分は $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1}$ が並んだものであり，下式に従い求める．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (226)$$

- $[B]$ マトリックスの対応する部分にそれぞれの値を代入する．

$$[B^{(k)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(k)}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$[B] = [B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}] \quad (228)$$

- 以上で $[B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)]$ が得られたので，

$$[B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \quad (229)$$

を計算し対応する重み $w_a w_b$ をかけて，全体剛性マトリックスの配列に足し込む．

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] dr_1 dr_2 \\ &= \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 w_a w_b [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (230)$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 1

- 三角形要素の場合も，基本的に同じプロセスになる．
- 要素剛性マトリックスの積分領域を変換する（これはアイソパラメトリック要素による積分領域の変換）

$$\begin{aligned}
 [K^{(e)}] &= \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1
 \end{aligned}
 \tag{231}$$

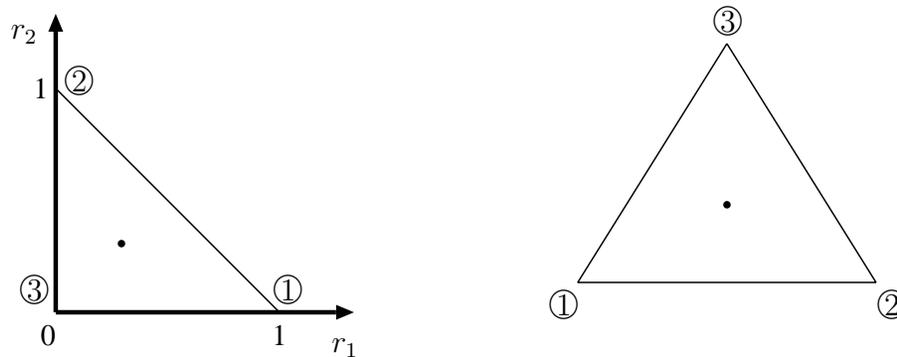


図 7: 三角形要素の自然座標と面積座標

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix}
 \tag{232}$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 2

- 数値積分を導入する

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n w_{ab} [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (233)$$

- 以下各サンプリング点での値を求めて，マトリックスを作り，全体剛性マトリックスに足し込む

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n w_{ab} [B(r_a, r_b)]^T [D] [B(r_a, r_b)] \det[J(r_a, r_b)] \end{aligned} \quad (234)$$

- 以下各サンプリング点での値を求めて，マトリックスを作り，全体剛性マトリックスに足し込む

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 3

- 3 節点三角形要素の場合補間関数は，

$$N^{(1)} = L_1 \tag{235}$$

$$N^{(2)} = L_2 \tag{236}$$

$$N^{(3)} = L_3 \tag{237}$$

- この関係を元に，以下のように面積座標系と対応させる．

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_1} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_1} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_1} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \tag{238}$$

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial r_2} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial r_2} + \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial r_2} = \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_2} - \frac{\partial N^{(i)}}{\partial L_3} \tag{239}$$

- 具体的に計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} &= 1 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} &= 0 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} &= -1 \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} &= 0 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} &= 1 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} &= -1 \end{aligned} \tag{240}$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 4

- ヤコビマトリックスの成分, $\frac{\partial x_i}{\partial r_j}$ は,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_1}{\partial r_1} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} x_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} x_1^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} x_1^{(3)} = x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \\
 \frac{\partial x_2}{\partial r_1} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} x_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} x_2^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} x_2^{(3)} = x_2^{(1)} - x_2^{(3)} \\
 \frac{\partial x_1}{\partial r_2} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} x_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} x_1^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} x_1^{(3)} = x_1^{(2)} - x_1^{(3)} \\
 \frac{\partial x_2}{\partial r_2} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} x_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} x_2^{(2)} + \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} x_2^{(3)} = x_2^{(2)} - x_2^{(3)}
 \end{aligned} \tag{241}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_2^{(1)} - x_2^{(3)} \\ x_1^{(2)} - x_1^{(3)} & x_2^{(2)} - x_2^{(3)} \end{bmatrix} \tag{242}$$

- これより行列式は三角形要素の面積の 2 倍になる .

$$\begin{aligned}
 \det[J] &= \frac{\partial x_1}{\partial r_1} \frac{\partial x_2}{\partial r_2} - \frac{\partial x_2}{\partial r_1} \frac{\partial x_1}{\partial r_2} \\
 &= (x_1^{(1)} - x_1^{(3)})(x_2^{(2)} - x_2^{(3)}) - (x_2^{(1)} - x_2^{(3)})(x_1^{(2)} - x_1^{(3)})
 \end{aligned} \tag{243}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 = \det[J] \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] dr_2 dr_1 \tag{244}$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 5

- [B] マトリックスの成分は $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_i}$ が並んだものであり，下式に従い求める．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & -(x_2^{(1)} - x_2^{(3)}) \\ -(x_1^{(2)} - x_1^{(3)}) & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \quad (245)$$

- $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_i}$ はすべて定数なので， $\frac{\partial N^{(n)}}{\partial x_i}$ も定数になる．具体的には

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & -(x_2^{(1)} - x_2^{(3)}) \\ -(x_1^{(2)} - x_1^{(3)}) & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_1} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial r_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial r_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial r_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & -(x_2^{(1)} - x_2^{(3)}) \\ -(x_1^{(2)} - x_1^{(3)}) & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (246)$$

剛性マトリックス作成の手順 – 三角形 6

- これより $[B]$ マトリックスの具体的な成分は以下ようになる .

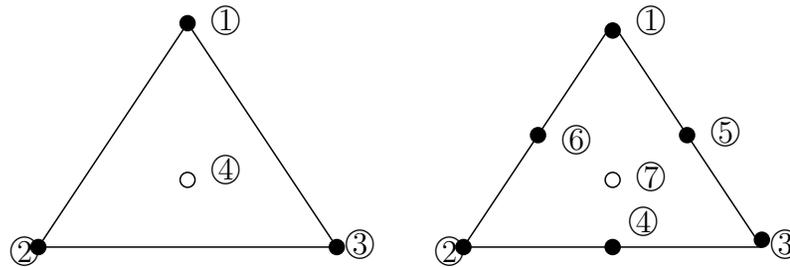
$$\begin{aligned}
 [B] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{(3)}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & 0 & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & 0 & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} & 0 \\ 0 & x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & 0 & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & 0 & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (247)
 \end{aligned}$$

- さらに $[D]$ マトリックスも定数であることを考えると , 被積分関数はすべて定数となり , 数値積分の必要が無いことがわかる .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr_2 dr_1 \\
 &= \det[J] \int_0^1 \int_0^{1-r_1} [B]^T [D] [B] dr_2 dr_1 \\
 &= \det[J] [B]^T [D] [B] \int_0^1 \int_0^{1-r_1} dr_2 dr_1 \\
 &= \frac{1}{2} \det[J] [B]^T [D] [B] \quad (248)
 \end{aligned}$$

bubble nodeを持つ要素

- 流体や非圧縮性の固体など，混合型定式化を用いるときには変化と圧力に別の（必ずしも一致しない）補間関数を使う．どのような組み合わせが良いかは inf-sup 条件と経験から判断．
- 三角形，四面体要素では変位の補間関数として以下のようなものを用いることがある．
重心の接点は bubble node と呼ばれる（要素の辺上で0となるような関数なので）．



具体的に三角形ではこの node に対応した補間関数は

$$N = 27L_1L_2L_3 \quad (249)$$

と表される．

- 3 節点に bubble node を導入する .

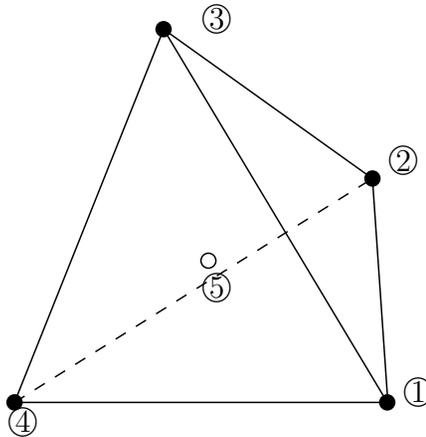
$$\begin{aligned}
N^{(1)} &= L_1 \\
N^{(2)} &= L_2 \\
N^{(3)} &= L_3
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\tilde{N}^{(1)} &= N^{(1)} - \frac{1}{3}N^{(4)} \\
\tilde{N}^{(2)} &= N^{(2)} - \frac{1}{3}N^{(4)} \\
\tilde{N}^{(3)} &= N^{(3)} - \frac{1}{3}N^{(4)}
\end{aligned}
\tag{250}$$

$$N^{(4)} = 27L_1L_2L_3$$

- 6 節点に bubble node を導入する .

$$\begin{aligned}
N^{(1)} &= L_1(2L_1 - 1) \\
N^{(2)} &= L_2(2L_2 - 1) \\
N^{(3)} &= L_3(2L_3 - 1) \\
N^{(4)} &= 4L_2L_3 \\
N^{(5)} &= 4L_3L_1 \\
N^{(6)} &= 4L_1L_2 \\
N^{(7)} &= 27L_1L_2L_3 \quad (\text{bubble.})
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\tilde{N}^{(1)} &= N^{(1)} + \frac{1}{9}N^{(7)} \\
\tilde{N}^{(2)} &= N^{(2)} + \frac{1}{9}N^{(7)} \\
\tilde{N}^{(3)} &= N^{(3)} + \frac{1}{9}N^{(7)} \\
\tilde{N}^{(4)} &= N^{(4)} + \frac{1}{9}N^{(7)} \\
\tilde{N}^{(5)} &= N^{(5)} + \frac{1}{9}N^{(7)} \\
\tilde{N}^{(6)} &= N^{(6)} + \frac{1}{9}N^{(7)}
\end{aligned}
\tag{251}$$

bubble nodeを持つ四面体



- 四面体の場合要素の重心での bubble node の補間関数は

$$N_5 = 256L_1L_2L_3L_4 \quad (252)$$

- 四節点の場合： 重心 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ で0となるように $N_1 \sim N_4$ を変更 .

$$\tilde{N}^{(1)} = N^{(1)} - \frac{1}{4}N^{(5)} \quad (253)$$

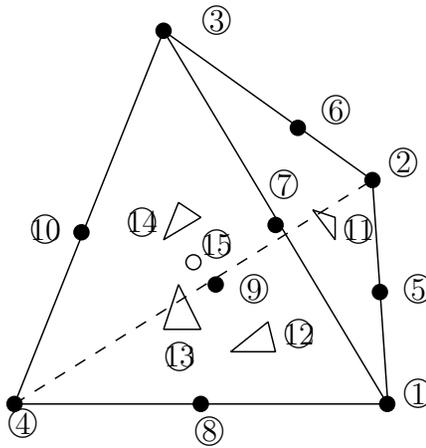
$$\tilde{N}^{(2)} = N^{(2)} - \frac{1}{4}N^{(5)} \quad (254)$$

$$\tilde{N}^{(3)} = N^{(3)} - \frac{1}{4}N^{(5)} \quad (255)$$

$$\tilde{N}^{(4)} = N^{(4)} - \frac{1}{4}N^{(5)} \quad (256)$$

$$(257)$$

- 10 節点の場合、各面の重心と要素の重心併せて 5 点に bubble



- 10 節点の各面の重心に bubble .

$$1 \text{ の対面 } 14 \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (258)$$

$$2 \text{ の対面 } 13 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (259)$$

$$3 \text{ の対面 } 12 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (260)$$

$$4 \text{ の対面 } 11 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad (261)$$

$$(262)$$

$$N_{11} = 27L_1L_2L_3 \tag{263}$$

$$N_{12} = 27L_1L_2L_4 \tag{264}$$

$$N_{13} = 27L_1L_3L_4 \tag{265}$$

$$N_{14} = 27L_2L_3L_4 \tag{266}$$

$$\tag{267}$$

$N^{(1)} \sim N^{(10)}$ をとりあえず変更する .

$$N^{(1)} = N^{(1)} + \frac{1}{9}(N_{11} + N_{12} + N_{13}) \quad (268)$$

$$N^{(2)} = N^{(2)} + \frac{1}{9}(N_{11} + N_{12} + N_{14}) \quad (269)$$

$$N^{(3)} = N^{(3)} + \frac{1}{9}(N_{11} + N_{13} + N_{14}) \quad (270)$$

$$N^{(4)} = N^{(4)} + \frac{1}{9}(N_{12} + N_{13} + N_{14}) \quad (271)$$

$$N^{(5)} = N^{(5)} - \frac{4}{9}(N_{11} + N_{12}) \quad (272)$$

$$N^{(6)} = N^{(6)} - \frac{4}{9}(N_{11} + N_{14}) \quad (273)$$

$$N^{(7)} = N^{(7)} - \frac{4}{9}(N_{11} + N_{13}) \quad (274)$$

$$N^{(8)} = N^{(8)} - \frac{4}{9}(N_{12} + N_{13}) \quad (275)$$

$$N^{(9)} = N^{(9)} - \frac{4}{9}(N_{12} + N_{14}) \quad (276)$$

$$N^{(10)} = N^{(10)} - \frac{4}{9}(N_{13} + N_{14}) \quad (277)$$

• 重心の要素に bubble $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$N^{(15)} = 256L_1L_2L_3L_4 \quad (278)$$

- $N^{(1)} \sim N^{(14)}$ を変更する .

$$N^{(1)} \sim N^{(14)} = N^{(1)} \sim N^{(4)} - \frac{1}{64}N^{(15)} \quad (279)$$

$$N^{(5)} \sim N^{(10)} = N^{(5)} \sim N^{(10)} + \frac{1}{8}N^{(15)} \quad (280)$$

$$N^{(11)} \sim N^{(14)} = N^{(11)} \sim N^{(14)} - \frac{27}{64}N^{(15)} \quad (281)$$

2004 非線形有限要素法特論 演習 3

- x, u をそれぞれ (21), (23) のように補間するとき要素マトリックスが (30) のようになることを確認せよ。
- 1次元で均等に節点を取るとき、(26), (27) のようになることを確認せよ。
- (39) から (57) を確認せよ。
- (58) から (60) を確認せよ。
- Gauss 積分の基礎 (67) から (71) を確認せよ。また $n=3$ のときのサンプリング点の座標と、重みを求めよ。
- 4節点の4角形の形状関数から順に節点を増やし、9節点の形状関数を求めよ。(133) から (161) までを確認せよ。また (154) から (161) は (112) から (119) と一致することを確認せよ。
- 三角形の面積座標と、自然座標との対応は (173) から (175) で表されるが、この関係式が成立していることを確認せよ。
- 別添のプログラミング演習を行え。