非線形有限要素法特論

2004 年 10 月 18 日

非線形有限要素法特論

- 講義内容は，非線形有限要素法の解説
- 夏学期の,「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる.
- 受講していない場合は,「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著，丸善を読んで理解しておくこと.
- 講義資料は`http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2004`からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- `http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003` から昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「有限要素法特論」ですが、基本的に同じ内容です。
- 今年度（２００４）から新設した演習は、翌週の講義時間に提出してください。必須ではありませんし、採点しませんが、実際に手を動かして計算することは有限要素法の理解を深める上で重要です。
- 質問などは，`nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp` まで.

非線形有限要素法特論講義予定

1.	10/ 4	微分方程式の境界値問題の有限要素解析
2.	10/18	線形弾性体の有限要素解析
3.	10/25	アイソパラメトリックソリッド要素 (プログラム)
4.	11/ 1	連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 （演習あり）
5.	11/ 8	線形有限要素法の基本的なプログラム構造 (プログラム)
6.	11/15	幾何学非線形問題の有限要素定式化 (プログラム)
7.	11/22	非線形方程式の静的解析手法、超弾性体、弾塑性体 (プログラム)
8.	11/29	第７回の演習
9.	12/ 6	非線形方程式の動的解析手法、固有値解析
10.	12/13	構造要素
11.	12/20	連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法
12.	1/17	ALE 有限要素流体解析
13.	1/24	ALE 有限要素流体解析

線形弾性体の境界値問題

下図に示すような, 線形弾性体 A についての境界値問題 $[B]$ を考える.

$[B]$　物体 A が占める領域を Ω, Ω の境界を $\partial\Omega$ とし, $\partial\Omega$ の部分集合 $\partial\Omega_D$ 上では変位境界条件が与えられているものとする. このような系に表面力 $\boldsymbol{t}$, 体積力 $\rho\boldsymbol{g}$ が作用するとき, つり合い条件を満たす変位 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ を求めよ. ただし, ρ は密度, $\boldsymbol{g}$ は重力加速度, $\mathcal{V}$ は変位の許容関数すなわち変位境界条件を満たす解の候補全体の集合とする.

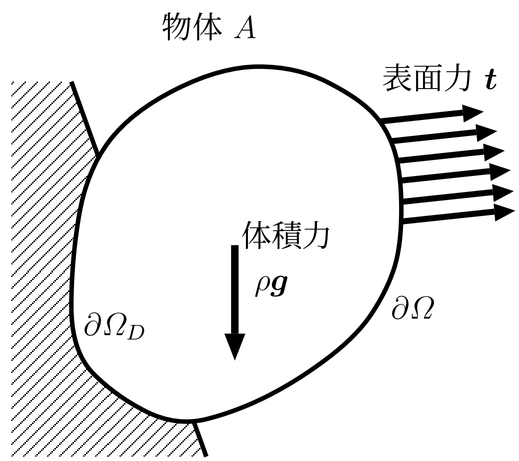

図 1: 境界値問題概念図

- 線形弾性体とは，いわゆる Hooke 則に従う物質のことで，鉄やゴムなど，一般に等方で，応力が変位のみに依存するような物質の微小変形をモデル化できる.
- 物体の表面 $\partial\Omega$ 上のすべての点で，表面力あるいは，変位境界条件が与えられる．これは $\partial\Omega_D$ 以外のすべての点で表面力が与えられることを意味するが，その値が 0 である場合はわざわざ書かないことが多いので注意.

記号の定義

- ある基準時刻 t_0 における物体の配置を基準配置とし, 各物質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{X}$
- 物質点 $\boldsymbol{X}$ の現時刻 t における位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$
- 物質点の時刻 t_0 から t までの変位ベクトル $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \tag{1}$$

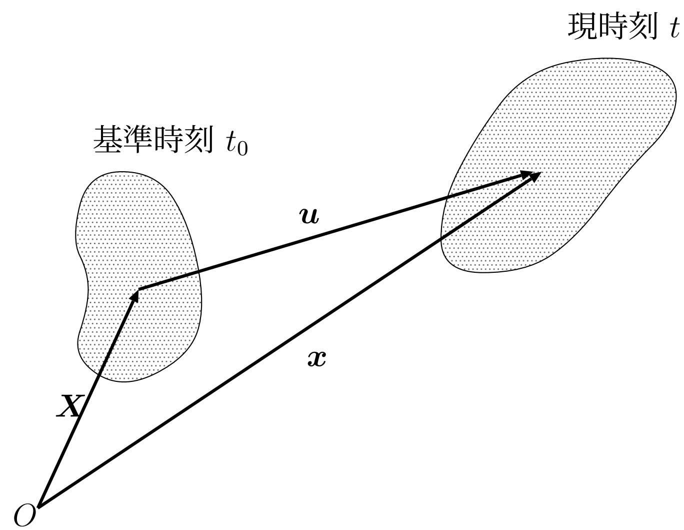

図 2: 物質点の運動

強形式 1

この問題は以下のように定式化できる.

[B]　与えられた $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{g}$ に対し, 以下を満たすような $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ を求めよ.

[1] 平衡方程式 (Cauchy の第 1 運動法則)

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{g} = 0 \tag{2}$$

[2] 境界条件式

$$\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{u}} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_D \tag{3}$$

$$\boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{on} \quad \partial\Omega - \partial\Omega_D \tag{4}$$

[3] 変位・ひずみ関係式

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{5}$$

[4] 応力・ひずみ関係式（構成式）

$$T_{ij} = \kappa(\operatorname{div} \boldsymbol{u})\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u}) \tag{6}$$

- このうち [1], [2] はいかなる問題でも共通（ただし，必要に応じて等価なものに書き換えることがある.），[4] は対象とする物質モデルで決まる．[3] は [4] に対応するものが選ばれる.

記号の定義

この問題は以下のように定式化できる.

$[B]$　与えられた $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{g}$ に対し,以下を満たすような $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ を求めよ.

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{g} = 0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{9}$$

$$T_{ij} = \kappa(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u}) \tag{10}$$

- $\mathcal{V}$ 変位の許容関数全体の集合
- $\boldsymbol{T}$ Cauchy 応力
- κ, G 体積弾性係数, せん断弾性係数　（物性値）
- δ_{ij} Kronecker のデルタ記号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{11}$$

- ε_{ij}, ε^D_{ij} 線形ひずみ, 偏差ひずみ

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{12}$$

$$\varepsilon^D_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) - \frac{1}{3}(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\delta_{ij} \tag{13}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \operatorname{tr}\left(\varepsilon_{ij}\right) \tag{14}$$

弱形式

- 前述のように有限要素法は, 偏微分方程式の弱形式をもとにした近似解法である.
- $[B]$ に対応した弱形式は，以下の $[V]$ である.

  $[V]$　与えられた表面力 $\boldsymbol{t}$ と体積力 $\rho\boldsymbol{g}$ に対し以下の条件を満たす $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ を求めよ.

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S + \int_{\Omega} \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}\end{aligned} \tag{15}$$

- ただし $T_{ij}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は, 総和規約による.

- すなわち,

$$
\begin{aligned}
T_{ij}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) \\
= \quad & T_{11}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{11}(\boldsymbol{v}) + T_{12}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{12}(\boldsymbol{v}) + T_{13}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{13}(\boldsymbol{v}) \\
& + T_{21}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{21}(\boldsymbol{v}) + T_{22}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{22}(\boldsymbol{v}) + T_{23}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{23}(\boldsymbol{v}) \\
& + T_{31}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{31}(\boldsymbol{v}) + T_{32}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{32}(\boldsymbol{v}) + T_{33}(\boldsymbol{v})\,\varepsilon_{33}(\boldsymbol{v}) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

強形式，弱形式，停留ポテンシャルエネルギーの原理

- 前回の講義では強形式 $[B]$ の方程式の両辺に $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ をかけ領域積分を行うことにより，弱形式 $[V]$ を導びき，有限要素を導入して離散化を行った．
- また，$[V]$ に等価な形式として，ポテンシャルエネルギーの最小化問題 $[M]$ を紹介した．
- 線形弾性体の境界値問題を取り扱う際には $[M]$ を基礎にして定式化が行われることが多い．
- この理由としては，以下のようなものが挙げられる．
  - 材料モデルがポテンシャルにより定義される場合がある．
  - ポテンシャルが存在するときは剛性マトリックスは対称になる．（存在しないものとしては，複雑な弾塑性体や，流体などがある）
  - 付帯条件がある場合に Lagrange 未定乗数法やペナルティ法を導入することにより対処可能である．

停留ポテンシャルエネルギーの原理

$[M]$ 与えられた $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{g}$ に対し,以下を満たすような $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ を求めよ.

$$\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{u}) \leq \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \tag{17}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{v}) =& \int_\Omega \frac{1}{2} T_{ij}(\boldsymbol{v})\, \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\, \mathrm{d}S - \int_\Omega \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\Omega \\ =& \frac{\kappa}{2}\int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2\, \mathrm{d}\Omega + G\int_\Omega \varepsilon^D_{ij}(\boldsymbol{v})\, \varepsilon^D_{ij}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\, \mathrm{d}S - \int_\Omega \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{18}$$

$[V]$ 与えられた表面力 $\boldsymbol{t}$ と体積力 $\rho\boldsymbol{g}$ に対し以下の条件を満たす $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ を求

めよ.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \\
&\qquad = \kappa \int_{\Omega} (\operatorname{div}\boldsymbol{u})(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + 2G \int_{\Omega} \varepsilon^{D}_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon^{D}_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \\
&\qquad = \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S + \int_{\Omega} \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$[M]$ から $[V]$ 1

- $[M]$ の式から下式が成立する.

$$\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{v}) - \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{u}) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \tag{20}$$

- このとき，任意の $\boldsymbol{v}$ に対し，$\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}$ なる $\delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ が存在する
- すなわち

$$\mathbf{\Pi}(\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) - \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{u}) \geq 0 \qquad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V} \tag{21}$$

- これをもとに, 書き下せば以下のようになる.

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\kappa}{2} \int_\Omega \mathrm{div}\,(\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u})\,\mathrm{div}\,(\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\cdot(\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \rho\boldsymbol{g}\cdot(\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \right\} \\ &- \left\{ \frac{\kappa}{2} \int_\Omega (\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega - G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Omega \right\} \geq 0 \qquad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V} \end{aligned} \tag{22}$$

- ただし以下を用いている.

$$\mathrm{div}(\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) = \mathrm{div}(\delta\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) \tag{23}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial(u_1 + \delta u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 + \delta u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_3 + \delta u_3)}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x_3} \\ &= \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\delta\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{25}$$

$[M]$ から $[V]$ 2

- これを整理すると以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\kappa \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{u})(\operatorname{div} \delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega + 2G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u}) \, \varepsilon_{ij}^D(\delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega & \\
- \int_{\partial\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \rho \, \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}\Omega & \\
+ \frac{\kappa}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \delta \boldsymbol{u})(\operatorname{div} \delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega & \\
+ G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\delta \boldsymbol{u}) \, \varepsilon_{ij}^D(\delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega \geq 0 \qquad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{V} & \quad (26)
\end{aligned}
$$

- この式は任意の $\delta \boldsymbol{u}$ について成り立たなければならないので, α を任意のスカラーとして $\delta \boldsymbol{u}$ に $\alpha \, \delta \boldsymbol{u}$ を代入しても成り立たなければならない.

$$
\begin{aligned}
& \alpha \left\{ \kappa \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{u})(\operatorname{div} \delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega + 2G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u}) \, \varepsilon_{ij}^D(\delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \rho \, \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}\Omega \right\} \\
& + \alpha^2 \left\{ \frac{\kappa}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \delta \boldsymbol{u})(\operatorname{div} \delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega + G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\delta \boldsymbol{u}) \, \varepsilon_{ij}^D(\delta \boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}\Omega \right\} \geq 0 \qquad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{V} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$[M]$ から $[V]$ 3

- $\delta\boldsymbol{u} \equiv 0$ のとき, 左辺は 0 になるので，成立する．

$$\alpha\left\{\kappa\int_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{u})(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + 2G\int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega}\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega\right\}$$
$$+\alpha^2\left\{\frac{\kappa}{2}\int_\Omega(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + G\int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega\right\} \geq 0 \qquad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathcal{V} \tag{28}$$

- $\delta\boldsymbol{u} \not\equiv 0$ のときは, この式を α についての 2 次式とみる．

- すなわち

$$\begin{aligned}
y &= a\alpha^2 + b\alpha + c \\
a &= \left\{\frac{\kappa}{2}\int_\Omega(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + G\int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega\right\} \\
b &= \left\{\kappa\int_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{u})(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + 2G\int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega\right. \\
&\quad \left. -\int_{\partial\Omega}\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega\right\} \\
c &= 0
\end{aligned} \tag{29}$$

$[M]$ から $[V]$ 4

- $y \geq 0$ であるための必要十分条件は $a > 0$ かつ $b^2 - 4ac \leq 0$ (判別式) であり，今回の場合は $b = 0$ が必要十分条件となる.

- 即ち, $[V]$ が必要十分条件である.

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \\
&\qquad = \kappa \int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{u})(\operatorname{div}\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega + 2G\int_\Omega \varepsilon^D_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon^D_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \\
&\qquad = \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S + \int_\Omega \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$[V]$ から $[M]$

- $[V] \Rightarrow [M]$ については下線部が 0 になることから証明できる.

$$
\begin{aligned}
&\Pi(\delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}) - \Pi(\boldsymbol{u}) \\
&= \underline{\kappa \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{u})(\operatorname{div} \delta\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega + 2G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\boldsymbol{u})\, \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega} \\
&\underline{- \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}S - \int_\Omega \rho\, \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\Omega} \\
&\quad + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \delta\boldsymbol{u})(\operatorname{div} \delta\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega + G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\, \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{\kappa}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} \delta\boldsymbol{u})(\operatorname{div} \delta\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega + G \int_\Omega \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\, \varepsilon_{ij}^D(\delta\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega \\
&\geq 0 \qquad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}
\end{aligned} \tag{31}
$$

$[V]$ から $[B]$ 1

- $T_{ij}(\boldsymbol{u})$ の $i,\ j$ についての対称性を用いると

$$\begin{aligned}\int_\Omega T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega T_{ij}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega T_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{32}$$

ただしここでは，微小変形の場合は $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\approx\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ であることを用いて，$\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial X_i}\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)$ としている．当然ながらこのような置き換えは，微小変形時のみに適用可能であり，有限変形の場合は対応していない．

- 部分積分する．

$$\int_\Omega T_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(T_{ij}\delta u_i)\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\,\mathrm{d}\Omega \tag{33}$$

- 上式左辺第一項に対し, Gauss の発散定理を適用すれば, 最終的に以下のようになる（ただし右辺第 2 項は $T_{ij}=T_{ji}$ を用いている.）

$$\int_\Omega T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} n_j(T_{ij}\delta u_i)\,\mathrm{d}S - \int_\Omega (\nabla_x\cdot\boldsymbol{T})_i\delta u_i\,\mathrm{d}\Omega \tag{34}$$

- Gauss の発散定理 (ただし $\boldsymbol{n}$ は境界上の点における法線ベクトル)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{b}d\Omega &= \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}dS \\ \int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial X_i}d\Omega &= \int_{\partial\Omega} n_i\,b_i dS\end{aligned} \tag{35}$$

$[V]$ から $[B]$ 2

- これは外力項と合わせて, 以下のようになる.

$$\int_{\Omega} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} n_j(T_{ij}\delta u_i)\,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} (\nabla_x\cdot\boldsymbol{T})_i\delta u_i\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S - \int_{\Omega} \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \delta u_i(\nabla_x\cdot\boldsymbol{T}+\rho\boldsymbol{g})_i\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta u_i(\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{t})_i\,\mathrm{d}S = 0 \tag{38}$$

- 上式が成立するための条件は,

$$\nabla_x\cdot\boldsymbol{T}+\rho\boldsymbol{g} = 0 \tag{39}$$

$$\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \tag{40}$$

である. （ただし $T_{ij} = T_{ji}$ を用いている.）

- $[B] \Rightarrow [V]$ は この逆をたどることにより導くことができる.

有限要素定式化

- 線形弾性体の境界値問題は [V] として弱形式定式化できることを示したが, ここではそれを基に有限要素定式化を行う.

  [V]　与えられた外力表面力 $\boldsymbol{t}$ と体積力 $\rho\boldsymbol{g}$ に対し以下の条件を満たす $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ を求めよ.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S + \int_{\Omega} \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

有限要素分割と補間 1

- 有限要素法では解析対象の領域 Ω をいくつかの有限の大きさを持った要素に分割する．これを形式的に以下のように表す．

$$\Omega = \sum_e \Omega_e \tag{42}$$

- これに伴い, 領域積分, 境界積分はそれぞれ次のようになる．

$$\int_\Omega \mathrm{d}\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \mathrm{d}\Omega \tag{43}$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}S = \sum_e \int_{\partial\Omega_e} \mathrm{d}S \tag{44}$$

- これより弱形式の式は以下のように変更される．（以後この式を $[V_e]$ として参照する）

$$\sum_e \left[\int_{\Omega_e} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega \right.$$
$$\left. - \int_{\partial\Omega_e} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S - \int_{\Omega_e} \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega \right] = 0 \qquad \forall\delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V} \tag{45}$$

有限要素分割と補間 2

- 被積分関数に含まれる $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ は各要素内で同じ補間関数を用い, 以下のように表されるものとする.

$$x_i = N^{(j)} x_i^{(j)} \tag{46}$$

$$u_i = N^{(j)} u_i^{(j)} \tag{47}$$

- 補間関数については次回詳しく説明する.

マトリックス表示

- 以下では効率良く計算できるように, マトリックス表示に書き換えを行う.
- ここで示すようなマトリックス表示は, あくまでプログラミングのための手段であり, その意味では本質的ではなく, プログラマーが独自の方法で行ってよいものである.
- ここではなるべく標準的で, わかりやすく, 他のケースにも応用しやすい方法を示す.

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) 1

- $[V_e]$ 左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は, 総和規約を用いずに書けば以下のようになる.

$$\begin{aligned} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \quad & T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{13}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{13}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & + T_{21}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{21}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{23}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{23}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & + T_{31}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{31}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{32}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{32}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{33}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{33}(\delta\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{48}$$

- これをなるべく少ない演算回数で計算できるように, T_{ij}, ε_{ij} の i, j についての対称性を用いて以下のように整理する.

$$\begin{aligned} & T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & = \qquad T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + \ T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) + \ T_{33}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{33}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & + 2T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) + 2T_{23}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{23}(\delta\boldsymbol{u}) + 2T_{31}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{31}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & = \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T\{T(\boldsymbol{u})\} \end{aligned} \tag{49}$$

- ただし, $\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\}$, $\{T(\boldsymbol{v})\}$ は下式により定義される.

$$\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(\boldsymbol{v}) \\ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{v}) \\ \varepsilon_{33}(\boldsymbol{v}) \\ 2\varepsilon_{12}(\boldsymbol{v}) \\ 2\varepsilon_{23}(\boldsymbol{v}) \\ 2\varepsilon_{31}(\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix}, \quad \{T(\boldsymbol{v})\} = \begin{Bmatrix} T_{11}(\boldsymbol{v}) \\ T_{22}(\boldsymbol{v}) \\ T_{33}(\boldsymbol{v}) \\ T_{12}(\boldsymbol{v}) \\ T_{23}(\boldsymbol{v}) \\ T_{31}(\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix} \tag{50}$$

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) 2

- 次に応力 T_{ij} と，ひずみ ε_{ij} の関係式

$$T_{ij} = \kappa(\mathrm{div}\, \boldsymbol{u})\delta_{ij} + 2G\varepsilon^{D}_{ij}(\boldsymbol{u}) \tag{51}$$

を用いて $\{T(\boldsymbol{v})\}$ と $\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\}$ を下式のようにマトリックスとベクトルの積の形式で対応させる.

$$\{T(\boldsymbol{v})\} = [D]\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\} \tag{52}$$

- このマトリックス $[D]$ は応力 - ひずみマトリックス, あるいは構成則マトリックス, あるいは単に $[D]$ マトリックスと呼ばれている.

- $\{T_{ij}(\boldsymbol{v})\}$ に含まれている T_{ij} の成分をそれぞれ書き下せば以下のようになる.

$$T_{11} = \kappa\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) + 2G\varepsilon_{11} - \frac{2G}{3}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) \tag{53}$$

$$T_{22} = \kappa\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) + 2G\varepsilon_{22} - \frac{2G}{3}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) \tag{54}$$

$$T_{33} = \kappa\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) + 2G\varepsilon_{33} - \frac{2G}{3}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) \tag{55}$$

$$T_{12} = 2G\varepsilon_{12} \tag{56}$$

$$T_{23} = 2G\varepsilon_{23} \tag{57}$$

$$T_{31} = 2G\varepsilon_{31} \tag{58}$$

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) 3

- これを強引にマトリックス表示に書き直すと以下のようになる.

$$
\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & 0 & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & & & \\ -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & & 0 & \\ -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & & & \\ & & & G & & \\ & 0 & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \tag{59}
$$

- 以下のように $[D_v]$, $[D_d]$ を定義する.

$$
[D_v] = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & 0 & \\ \kappa & \kappa & \kappa & & & \\ & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad [D_d] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & & & \\ -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & -\frac{2}{3}G & & 0 & \\ -\frac{2}{3}G & -\frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & & & \\ & & & G & & \\ & 0 & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix} \tag{60}
$$

応力-ひずみマトリックス([D] マトリックス) 4

- これらを用い, 下式のように [D] を定義する

$$[D] = [D_v] + [D_d] \tag{61}$$

- 以上を用いると, [V_e] 左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) &= \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\} \\ &= \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T [D] \{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} \end{aligned} \tag{62}$$

節点変位-ひずみマトリックス([B] マトリックス) 1

- 変位と線形ひずみ

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{63}$$

- 変位と節点変位

$$u_i = N^{(j)} u_i^{(j)} \tag{64}$$

- これらを総合し線形ひずみと節点変位を以下のようにマトリックスとベクトルの積の形式で対応させる.
- このマトリックス [B] は, 節点変位-ひずみマトリックス, あるいは単に [B] マトリックスと呼ばれている. ただし n は一要素あたりの節点数である.

$$\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} = [B]\{u_i^{(n)}\} \tag{65}$$

- ただし, $\{u_i^{(n)}\}$ は下式により定義される.

$$\{u_i^{(n)}\} = \left\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, \cdots, u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}\right\}^T \tag{66}$$

節点変位-ひずみマトリックス($[B]$ マトリックス) 2

- ひずみの計算に必要な $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$ は, 節点変位が位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ には依存しない量であることから, 次のようになる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} u_i^{(n)} \tag{67}$$

- また

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \tag{68}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \tag{69}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \tag{70}$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \tag{71}$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \tag{72}$$

$$2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \tag{73}$$

であることを考えると,

節点変位-ひずみマトリックス($[B]$ マトリックス) 3

- 具体的に成分は

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_1^{(n)} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_2^{(n)} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} u_3^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_3} u_3^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} u_3^{(n)} \\
2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_2^{(n)} \\
&\quad + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_1^{(n)} \\
2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_3^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_3^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_3^{(n)} \\
&\quad + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_3} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} u_2^{(n)} \\
2\varepsilon_{31} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_3} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} u_1^{(n)} \\
&\quad + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_3^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_3^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_3^{(n)}
\end{aligned}
\tag{74}
$$

- これを基にすると $[B]$ マトリックスは 6×3 のサブマトリックス $[B^{(k)}]$ を用いて以下のようにあらわされる.

$$[B^{(k)}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_1} & & \\ & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_2} & \\ & & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_1} & \\ & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_3} & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_3} & & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_1} \end{bmatrix} \tag{75}$$

$$[B] = \left[[B^{(1)}], [B^{(2)}], \ldots, [B^{(n)}]\right] \tag{76}$$

要素剛性マトリックス

- この $[B]$ を用いると, $[V_e]$ 第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は以下のように表すことができる.

$$
\begin{aligned}
T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) &= \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T\,\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\} = \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T\,[D]\,\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} \\
&= \{\delta u_i^{(n)}\}^T\,[B]^T\,[D]\,[B]\,\{u_i^{(n)}\} \qquad (77)
\end{aligned}
$$

- $\{\delta u_i^{(n)}\}$, $\{u_i^{(n)}\}$ は節点での値であり, 領域内では定数となり領域積分には関係ないので, 積分記号の外に出すことができる. 即ち,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_e} \{\delta u_i^{(n)}\}^T\,[B]^T\,[D]\,[B]\,\{u_i^{(n)}\}\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \left[\int_{\Omega_e} [B]^T\,[D]\,[B]\,\mathrm{d}\Omega\right] \{u_i^{(n)}\} \qquad (78)
\end{aligned}
$$

- この積分されたマトリックス即ち,

$$
[K^{(e)}] = \int_{\Omega_e} [B]^T\,[D]\,[B]\,\mathrm{d}\Omega \qquad (79)
$$

を要素剛性マトリックスという.

外力ベクトル

- $[V_e]$ 左辺第 2, 3 項についても, 節点変位のベクトルを積分記号の外に出すために以下のようにする.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_e} \delta u_i \cdot t_i \,\mathrm{d}S &= \int_{\partial\Omega_e} \{\delta u_i^{(n)}\}^T [N]^T \{t\} \,\mathrm{d}S \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} \,\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e} \rho\, \delta u_i \cdot g_i \,\mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega_e} \rho \{\delta u_i^{(n)}\}^T [N]^T \{g\} \,\mathrm{d}\Omega \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} \rho [N]^T \{g\} \,\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{81}$$

- ただし

$$[N] = \begin{bmatrix} N^{(1)} & & & N^{(2)} & & & & N^{(n)} & & \\ & N^{(1)} & & & N^{(2)} & & \cdots & & N^{(n)} & \\ & & N^{(1)} & & & N^{(2)} & & & & N^{(n)} \end{bmatrix} \tag{82}$$

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}, \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \tag{83}$$

- これらを用い外力ベクトル $\{F^{(e)}\}$ を以下のように定義する.

$$\{F^{(e)}\} = \int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} \,\mathrm{d}S + \int_{\Omega_e} \rho [N]^T \{g\} \,\mathrm{d}\Omega \tag{84}$$

全体剛性マトリックス 1

- 以上をまとめると,

$$\sum_e \left[\int_{\Omega_e} T_{ij}(\boldsymbol{u})\, \varepsilon_{ij}(\delta \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}S - \int_{\Omega_e} \rho\, \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}\Omega \right] = 0 \qquad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{V} \tag{85}$$

は，以下のように変更される．

$$\sum_e \left[\{\delta u_i^{(n)}\}^T \left([K^{(e)}]\, \{u_i^{(n)}\} - \{F^{(e)}\} \right) \right] = 0 \tag{86}$$

- この左辺を $\sum$ を用いず, また $\{\delta u_i^{(n)}\}$, $\{u_i^{(n)}\}$ は要素毎になっているのを全体の節点番号につけ直されたものに変更すると, 以下のようになる.

$$\{\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_n\} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \{\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_n\} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \tag{87}$$

- 両辺をまとめると

$$\{\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_n\} \left\{ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \right\} = \{0\} \tag{88}$$

全体剛性マトリックス 2

- 任意の $\delta\boldsymbol{u}$ に対して下式が成立するには

$$\{\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_n\}\left\{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}\right\} = \{0\} \tag{89}$$

- 下式が成立しなければならない

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{90}$$

- すなわち最終的には以下のような形式の連立 1 次方程式を解いて得られた解が近似解である．

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \tag{91}$$

- 構造解析の場合, この方程式は剛性方程式と呼ばれることもある．またこのマトリクスを全体剛性マトリクスと呼ぶ

2 次元の有限要素定式化 1

- 構造解析を行う際には, ある条件の下で問題を単純化できる場合がある.
- 平面ひずみ問題とは, 例えば図に示すような十分に長い壁が, 長手方向に垂直で均一な荷重を受けている場合である. このときに, 壁の長手方向中央部分を取り出すと X_2 方向の変位は 0 かつ X_2 方向の微分も 0 である. 従って, ひずみ ε_{ij} の 9 成分のうち $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}$ は 0 になり有限要素でモデル化する際にも, 全節点で X_2 方向の変位は 0 である.

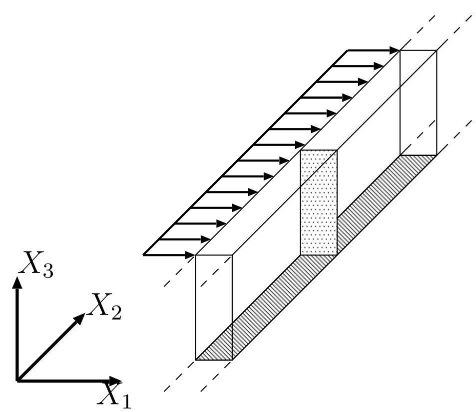

図 3: 平面ひずみ問題の例

2 次元の有限要素定式化 2

- 平面応力問題とは, 平面ひずみ問題と逆に, 十分に板厚が薄い場合である. このとき, 板厚方向の応力は 0 かつ板厚面外の剪断応力が 0 である. 即ち図の例では $T_{22}, T_{12}, T_{21}, T_{23}, T_{32}$ が 0 になる.

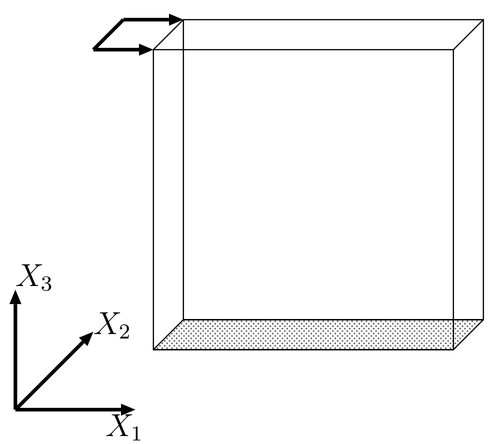

図 4: 平面応力問題の例

- 平面ひずみ問題でも平面応力問題でも, 解くべき方程式は下式で, ひずみあるいは応力 9 成分のうち 5 成分まで 0 であることを用いて効率化されるだけである.

$$\int_{\Omega} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S + \int_{\Omega} \rho\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathcal{V} \tag{92}$$

応力-ひずみマトリックス ($[D]$ マトリックス) — 平面ひずみ問題 1

- まず平面ひずみ問題の場合, $[V_e]$ 左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})$ は総和規則を用いずに書けば以下のようになる.

$$\begin{aligned} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \quad & T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{13}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{13}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & + T_{21}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{23}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{23}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & + T_{31}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{31}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{32}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{32}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{33}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{33}(\delta\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{93}$$

- ここで X_3 方向の変位 0, かつ X_3 方向の微分が 0 であると仮定すれば $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$ である. これを用いると以下のように簡略化される.

$$T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \quad T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{21}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) \tag{94}$$

- なるべく少ない演算回数で計算できるように, $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ の i, j についての対称性を用いて以下のように整理する.

$$T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) + 2T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) = \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T\{T(\boldsymbol{u})\} \tag{95}$$

ただし $\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\}$, $\{T(\boldsymbol{v})\}$ は下式により定義される.

$$\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(\boldsymbol{v}) \\ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{v}) \\ 2\varepsilon_{12}(\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix} \quad \{T(\boldsymbol{v})\} = \begin{Bmatrix} T_{11}(\boldsymbol{v}) \\ T_{22}(\boldsymbol{v}) \\ T_{12}(\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix} \tag{96}$$

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) — 平面ひずみ問題 1

- 応力 T_{ij} とひずみ ε_{ij} の関係を元に $\{T(\boldsymbol{u})\}$ と $\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\}$ を下式のようにマトリックスとベクトルの積の形で対応させる.

$$\{T(\boldsymbol{u})\} = [D]\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} \tag{97}$$

- $\{T(\boldsymbol{u})\}$ に含まれている T_{ij} の成分をそれぞれ書き下せば以下のようになる.

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \kappa(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{11} - \frac{2G}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\
T_{22} &= \kappa(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2G\varepsilon_{22} - \frac{2G}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\
T_{12} &= 2G\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{98}$$

- ここで $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$ を代入すると, 以下のようなる.

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \kappa(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2G\varepsilon_{11} - \frac{2G}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\
T_{22} &= \kappa(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2G\varepsilon_{22} - \frac{2G}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\
T_{12} &= 2G\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{99}$$

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) — 平面ひずみ問題 2

- これを強引にマトリックス表示に書き直すと以下のようになる.

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{4G}{3} & -\dfrac{2G}{3} & 0 \\ -\dfrac{2G}{3} & \dfrac{4G}{3} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{100}$$

後述する混合法への拡張を考えて以下のように $[D_v]$, $[D_d]$ を定義する.

$$[D_v] = \begin{bmatrix} \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [D_d] = \begin{bmatrix} \dfrac{4G}{3} & -\dfrac{2G}{3} & 0 \\ -\dfrac{2G}{3} & \dfrac{4G}{3} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{101}$$

- これらを用い下式のように $[D]$ を定義すれば以下の形式で対応付けを行うことができる.

$$[D] = [D_v] + [D_d] \tag{102}$$

- 以上を用いると, 左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は以下のように表すことができる.

$$T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T[D]\,\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} \tag{103}$$

応力-ひずみマトリックス([D] マトリックス) — 平面応力問題 1

- 平面応力の場合, $[V_e]$ 左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は総和規約を用いずに書けば以下のようになる.

$$\begin{aligned} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \quad & T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{13}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{13}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & + T_{21}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{23}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{23}(\delta\boldsymbol{u}) \\ & + T_{31}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{31}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{32}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{32}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{33}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{33}(\delta\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{104}$$

- ここで X_3 方向に平面応力状態にあると仮定すれば, $T_{33} = T_{31} = T_{13} = T_{23} = T_{32} = 0$ である. これを用いると以下のように簡略化される.

$$T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \quad T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{21}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) \tag{105}$$

- なるべく少ない演算回数で計算できるように $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ の i, j についての対称性を用いて以下のように整理する.

$$\begin{aligned} T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) =& T_{11}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{11}(\delta\boldsymbol{u}) + T_{22}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{22}(\delta\boldsymbol{u}) + 2T_{12}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{12}(\delta\boldsymbol{u}) \\ =& \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T \{T(\boldsymbol{u})\} \end{aligned} \tag{106}$$

ただし $\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\}$, $\{T(\boldsymbol{v})\}$ は下式により定義される.

$$\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(\boldsymbol{v}) \\ \varepsilon_{22}(\boldsymbol{v}) \\ 2\varepsilon_{12}(\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix} \quad \{T(\boldsymbol{v})\} = \begin{Bmatrix} T_{11}(\boldsymbol{v}) \\ T_{22}(\boldsymbol{v}) \\ T_{12}(\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix} \tag{107}$$

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) — 平面応力問題 2

- 応力 T_{ij} とひずみ ε_{ij} の関係を元に$\{T(\boldsymbol{u})\}$ と $\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\}$ を下式のようにマトリックスとベクトルの積の形で対応させる.

$$\{T(\boldsymbol{u})\} = [D]\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} \tag{108}$$

- $\{T(\boldsymbol{u})\}$ に含まれている T_{ij} の成分をそれぞれ書き下せば以下のようになる.

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \kappa\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)+2G\varepsilon_{11}-\frac{2G}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)\\
T_{22} &= \kappa\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)+2G\varepsilon_{22}-\frac{2G}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)\\
T_{33} &= \kappa\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)+2G\varepsilon_{33}-\frac{2G}{3}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right)\\
T_{12} &= 2G\varepsilon_{12}\\
T_{23} &= 2G\varepsilon_{23}\\
T_{31} &= 2G\varepsilon_{31}
\end{aligned} \tag{109}$$

- ここで $T_{33} = T_{23} = T_{31} = 0$ を用いると

$$\kappa \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) + 2G\varepsilon_{33} - \frac{2G}{3} \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) = 0 \tag{110}$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \tag{111}$$

$$\varepsilon_{31} = 0 \tag{112}$$

- さらに変形すると以下の関係が得られる.

$$\varepsilon_{33} = \frac{\dfrac{2G}{3} - \kappa}{\dfrac{4G}{3} + \kappa} \left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \tag{113}$$

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) — 平面応力問題 3

- これより以下の関係が得られる.

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{2G\left(\dfrac{2G}{3}+2\kappa\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa}\varepsilon_{11} + \frac{2G\left(\kappa-\dfrac{2G}{3}\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa}\varepsilon_{22} \\
T_{22} &= \frac{2G\left(\kappa-\dfrac{2G}{3}\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa}\varepsilon_{11} + \frac{2G\left(\dfrac{2G}{3}+2\kappa\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa}\varepsilon_{22}
\end{aligned}
\tag{114}
$$

- 強引にマトリックス表示すると以下のようになる.

$$
\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\dfrac{2G\left(\dfrac{2G}{3}+2\kappa\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & \dfrac{2G\left(\kappa-\dfrac{2G}{3}\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & 0 \\
\dfrac{2G\left(\kappa-\dfrac{2G}{3}\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & \dfrac{2G\left(\dfrac{2G}{3}+2\kappa\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & 0 \\
0 & 0 & G
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}
\tag{115}
$$

応力-ひずみマトリックス($[D]$ マトリックス) — 平面応力問題 4

- 以上を用いると左辺第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は以下のように表すことができる.

$$[D] = \begin{bmatrix} \dfrac{2G\left(\dfrac{2G}{3}+2\kappa\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & \dfrac{2G\left(\kappa-\dfrac{2G}{3}\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & 0 \\ \dfrac{2G\left(\kappa-\dfrac{2G}{3}\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & \dfrac{2G\left(\dfrac{2G}{3}+2\kappa\right)}{\dfrac{4G}{3}+\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{116}$$

$$T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) = \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T[D]\,\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} \tag{117}$$

節点変位-ひずみマトリックス($[B]$ マトリックス) 1

- 変位と線形ひずみ

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \tag{118}$$

- 変位と節点変位

$$u_i = N^{(j)} u_i^{(j)} \tag{119}$$

- さらに平面ひずみ, あるいは平面応力を仮定した場合, ひずみのベクトル表示 $\{\varepsilon(\boldsymbol{v})\}$ には ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} 成分しか含まれておらず, X_3 方向の変位は使われていない.

- これらを総合し, 線形ひずみと節点変位を以下のようにマトリックスとベクトルの積の形で対応させる.

$$\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} = [B]\,\{u_i^{(n)}\} \tag{120}$$

ただし $\{u_i^{(n)}\}$ は下式により定義される.

$$\{u_i^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ \vdots \\ u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{121}$$

節点変位-ひずみマトリックス($[B]$ マトリックス) 1

- ひずみの計算に必要な $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}$ は, 節点変位が位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ には依存しない量であることから, 次のようになる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} u_i^{(n)} \tag{122}$$

- また

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \tag{123}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \tag{124}$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \tag{125}$$

であることを考えると,

節点変位-ひずみマトリックス($[B]$ マトリックス) 2

- 具体的に成分は

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_1^{(n)} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_2^{(n)} \\
2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} u_2^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_1} u_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} u_2^{(n)} \\
&\quad + \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} u_1^{(1)} + \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X_2} u_1^{(2)} + \cdots + \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} u_1^{(n)}
\end{aligned}
\tag{126}
$$

- これを基にするとマトリックス $[B]$ は, 3×2 のサブマトリックス $[B^{(k)}]$ を用いて以下 のようにあらわされる.

$$
[B^{(k)}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_1} & \\ & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial N^{(k)}}{\partial X_1} \end{bmatrix} \tag{127}
$$

$$
[B] = \Big[[B^{(1)}], [B^{(2)}], \ldots, [B^{(n)}] \Big] \tag{128}
$$

要素剛性マトリックス

- この $[B]$ を用いると, $[V_e]$ 第 1 項の被積分関数 $T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u})$ は以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
T_{ij}(\boldsymbol{u})\,\varepsilon_{ij}(\delta\boldsymbol{u}) &= \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T\,\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})\} \\
&= \{\varepsilon(\delta\boldsymbol{u})\}^T\,[D]\,\{\varepsilon(\boldsymbol{u})\} \\
&= \{\delta u_i^{(n)}\}^T\,[B]^T\,[D]\,[B]\,\{u_i^{(n)}\}
\end{aligned} \tag{129}$$

- $\{\delta u_i^{(n)}\}$, $\{u_i^{(n)}\}$ は節点での値であり, 領域内では定数となり領域積分には関係ないので, 積分記号の外に出すことができる. 即ち,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\{\delta u_i^{(n)}\}^T\,[B]^T\,[D]\,[B]\,\{u_i^{(n)}\}\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \{\delta u_i^{(n)}\}^T\left[\int_{\Omega_e}[B]^T\,[D]\,[B]\,\mathrm{d}\Omega\right]\{u_i^{(n)}\}
\end{aligned} \tag{130}$$

- この積分されたマトリックス即ち,

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega_e}[B]^T\,[D]\,[B]\,\mathrm{d}\Omega \tag{131}$$

を要素剛性マトリックスという.

外力ベクトル

- $[V_e]$ 左辺第 2, 3 項についても, 節点変位のベクトルを積分記号の外に出すために以下のようにする.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_e} \delta u_i \cdot t_i \, \mathrm{d}S &= \int_{\partial\Omega_e} \{\delta u_i^{(n)}\}^T [N]^T \{t\} \, \mathrm{d}S \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} \, \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e} \rho \, \delta u_i \cdot g_i \, \mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega_e} \rho \, \{\delta u_i^{(n)}\}^T [N]^T \{g\} \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \{\delta u_i^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} \rho \, [N]^T \{g\} \, \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{133}$$

- ただし

$$[N] = \begin{bmatrix} N^{(1)} & & N^{(2)} & & & N^{(n)} & \\ & N^{(1)} & & N^{(2)} & \cdots & & N^{(n)} \end{bmatrix} \tag{134}$$

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \tag{135}$$

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \tag{136}$$

- これらを用い外力ベクトル $\{F^{(e)}\}$ を次のように定義する.

$$\{F^{(e)}\} = \int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} \,\mathrm{d}S + \int_{\Omega_e} \rho\, [N]^T \{g\} \,\mathrm{d}\Omega \tag{137}$$

- 以上により求められた要素剛性マトリックスと外力ベクトルより, 3 次元の場合とまったく同様に剛性方程式を作ることができる.

δu は変位境界が与えられる表面領域で O

「テンソル解析の基礎」久田俊明著 p.181 6.3. 仮想仕事の原理の復習

- 境界値問題

[1] 平衡方程式 (Cauchy の第一運動法則)

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{g} = \boldsymbol{O} \tag{138}$$

[2] 境界条件式

$$\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \underline{\boldsymbol{t}} \tag{139}$$

$$\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{u}} \tag{140}$$

[3] 変位・歪関係式

[4] 応力歪関係式（構成式）

- 平衡方程式と, 応力境界条件 $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \underline{\boldsymbol{t}}$ を満足する一価連続な応力場を力学的に可容 (admissible) であると呼ぶ.
- 一方，変位境界条件 $\boldsymbol{u} = \underline{\boldsymbol{u}}$ を満足する一価連続な変位場を幾何学的に可容であると呼ぶ.

- 可容応力場と，可容変位場は独立に想定しうる．
  たとえば、これを $\check{\boldsymbol{T}}$ と $\check{\check{\boldsymbol{u}}}$ とする．
  $\longrightarrow$ $\check{\boldsymbol{T}}$ から [3][4] などにより $\check{\boldsymbol{T}}$ という応力場を発生する変位場が決まったとして，これを $\check{\boldsymbol{u}}$ とすると，$\check{\boldsymbol{u}}$ は $\check{\check{\boldsymbol{u}}}$ とは別のものになる．(一意に決まる保証はない.)

  平衡方程式を満たすので,

$$\nabla_x \cdot \check{\boldsymbol{T}} + \rho \boldsymbol{g} = \boldsymbol{O} \tag{141}$$

  これより

$$\int_V \left(\nabla_x \cdot \check{\boldsymbol{T}} + \rho \boldsymbol{g}\right) \cdot \check{\check{\boldsymbol{u}}}\, dv = 0 \tag{142}$$

  式変形により

$$\int_V \check{\boldsymbol{T}} : \left(\check{\check{\boldsymbol{u}}} \otimes \nabla_x\right)\, dv = \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot \check{\check{\boldsymbol{u}}}\, ds + \int_{S_u} \boldsymbol{n} \cdot \check{\boldsymbol{T}} \cdot \check{\check{\boldsymbol{u}}}\, ds + \int_V \rho \boldsymbol{g} \cdot \check{\check{\boldsymbol{u}}}\, dv \tag{143}$$

- [1] ∼[4] を満たす $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{u}$ が得られたとする．任意の $\check{\check{\boldsymbol{u}}}$ は以下のように書くことができる．

$$\check{\check{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{u} + \delta \boldsymbol{u} \tag{144}$$

  ただし $\delta \boldsymbol{u}$ は変位境界条件が与えられた表面領域で 0.

これを (143) に代入する．

$$\int_V \boldsymbol{T} : \{(\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}) \otimes \nabla_x\}\, dv = \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})\ ds + \int_{S_u} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot (\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})\ ds + \int_V \rho\boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u})\ dv \tag{145}$$

また，(143) は $\check{\boldsymbol{u}}$ として $\boldsymbol{u}$ を用いても成立する．

$$\int_V \boldsymbol{T} : (\boldsymbol{u} \otimes \nabla_x)\ dv = \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}\, ds + \int_{S_u} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}\, ds + \int_V \rho\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{u}\, dv \tag{146}$$

- (145), (146) の両辺の差をとれば

$$\int_V \boldsymbol{T} : (\delta\boldsymbol{u} \otimes \nabla_x)\ dv = \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, ds + \int_{S_u} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, ds + \int_V \rho\boldsymbol{g} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, dv \tag{147}$$

となり，仮想仕事式が得られる．

2004 非線形有限要素法特論 演習 1

- (10) の応力ひずみ関係式を用いると (18) の第 2 項から第 3 項を導くことができる。実際に導け。
- (20) から (30) を確認せよ。
- (32) から (40) を確認せよ。
- (48) から (79) を確認せよ。
- 平面ひずみ、平面応力とは実際にはどのような問題に適応できるか例を示せ。
- 平面ひずみ、平面応力で仮定されることを説明し、それぞれの構成則マトリックスを導け
- (141) から (147) を確認せよ。
- 可容応力場、可容変位場について説明し、「可容応力場と可容変位場は独立に想定しうる」とはどういうことか説明せよ。