

有限要素法特論

2005 年 1 月 17 日

非線形有限要素法特論

- 講義内容は、非線形有限要素法の解説
- 夏学期の「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる。
- 受講していない場合は、「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著、丸善を読んで理解しておくこと。
- 講義資料は<http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2004> からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003> から昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「有限要素法特論」ですが、基本的に同じ内容です。
- 今年度（2004）から新設した演習は、翌週の講義時間に提出してください。必須ではありませんし、採点しませんが、実際に手を動かして計算することは有限要素法の理解を深める上で重要です。
- 質問などは、nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp まで。

非線形有限要素法特論講義予定

| | | |
|-----|-------|------------------------------|
| 1. | 10/ 4 | 微分方程式の境界値問題の有限要素解析 |
| 2. | 10/18 | 線形弾性体の有限要素解析 |
| 3. | 10/25 | アイソパラメトリックソリッド要素 (プログラム) |
| 4. | 11/ 1 | 連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 (演習あり) |
| 5. | 11/ 8 | 線形有限要素法の基本的なプログラム構造 (プログラム) |
| 6. | 11/15 | 幾何学非線形問題の有限要素定式化 1 |
| 7. | 11/22 | 幾何学非線形問題の有限要素定式化 2 |
| 8. | 11/29 | 超弾性体、弾塑性体 |
| 9. | 12/ 6 | 休講 |
| 10. | 12/13 | 非線形方程式の動的解析手法、固有値解析、構造要素 |
| 11. | 12/20 | 連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法 |
| 12. | 1/17 | ALE 有限要素流体解析 |
| 13. | 1/24 | ALE 有限要素流体解析 |

目次

| | | |
|-------|----------------------------------|----|
| 第 1 章 | 連続体力学の基礎式 | 1 |
| 1.1 | 緒言 | 1 |
| 1.2 | 物質点の運動と変位 | 1 |
| 1.3 | Euler の運動法則と Cauchy の運動法則 | 3 |
| 1.4 | 基準配置参照への変換操作 | 4 |
| 1.5 | 境界値問題と仮想仕事式 | 5 |
| 第 2 章 | ALE 法による流体解析の基礎式 | 8 |
| 2.1 | 緒言 | 8 |
| 2.2 | ALE 法の基礎式 | 8 |
| 2.3 | ALE 質量保存則の Euler 表示 | 11 |
| 2.4 | ALE Navier–Stokes の方程式の Euler 表示 | 13 |
| 2.5 | 有限要素方程式の導出 | 14 |
| 2.5.1 | 支配方程式の重みつき残差式の導出 | 14 |
| 2.5.2 | 流体要素のマトリクス方程式の生成 | 16 |
| 第 3 章 | ALE 有限要素法による流体・構造連成解析の境界条件の制御方法 | 20 |
| 3.1 | 緒言 | 20 |
| 3.2 | 流体・構造連成境界面の制御方法 | 20 |
| 3.2.1 | 流体・構造境界面の固着条件 | 21 |
| 3.2.2 | 流体・構造境界面の滑り条件 | 21 |
| 3.3 | 固定壁面の境界条件の制御方法 | 21 |
| 3.4 | オープン境界面の制御方法 | 22 |
| 3.4.1 | 自然境界条件を適用するオープン境界面 (応力指定) | 22 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.4.2 | 流量指定のオープン境界面 | 23 |
| 第4章 | ALE 有限要素法におけるメッシュの制御方法 | 24 |
| 4.1 | 緒言 | 24 |
| 4.2 | Total submerged 流体・構造連成問題のメッシュ制御 | 24 |
| 4.2.1 | Total submerged 流体・構造連成問題の境界面でのメッシュ制御 | 25 |
| 4.2.2 | Total submerged 流体・構造連成解析の領域内部のメッシュ制御アルゴリズム | 25 |
| 4.3 | 内部メッシュ制御理論 | 26 |
| 4.3.1 | 拡散理論による内部メッシュ制御 | 26 |
| 4.3.2 | 弾性体理論による内部メッシュ制御 | 28 |
| 第5章 | 流体・構造連成方程式の生成と動的な解析手法 | 32 |
| 5.1 | 緒言 | 32 |
| 5.2 | 流体・構造強連成方程式の生成 | 32 |
| 5.2.1 | 流体の支配マトリクス方程式の増分形式 | 32 |
| 5.2.2 | 流体の支配マトリクス方程式の強連成解析に対応した分割 | 33 |
| 5.2.3 | 構造の支配マトリクス方程式の強連成解析に対応した分割 | 33 |
| 5.2.4 | 流体・構造強連成支配マトリクス方程式の生成 | 34 |
| 5.3 | 動的な時間積分法と数値解析アルゴリズム | 35 |
| 5.3.1 | Newmark- β 法 | 36 |
| 5.3.2 | PMA 法 (予測子・多重修正子法) | 38 |

第1章 連続体力学の基礎式

1.1 緒言

本章では、以後の章で展開される流体解析、構造解析、並びに流体・構造連成解析の根本を成す、連続体力学による物体の運動の記述手法を概説する。

Euler の運動法則に Cauchy 応力テンソルを導入することにより、Cauchy の運動法則が導かれる。これは、現配置を参照した Euler 型の支配方程式であるから、流体運動の定式化に有用となる。次に、Euler の運動法則に第 1Piola–Kirchhoff 応力テンソルを導入することにより、基準配置を参照した Lagrange 型の支配方程式が得られるが、これは固体の運動の定式化に有用となる。

1.2 物質点の運動と変位

連続体仮説 (*Continuum Hypothesis*) から出発する連続体力学では物体は物質点 (*material point*) の連続的な集合として捉える。また、物質点は 3 次元 Euclid 空間における座標と一対一に対応付けられるものとする。このような物質点の空間における集合状態を物体の配置 (*configuration*) と呼ぶ。

物質点の運動を記述するために、ある基準時刻 t_0 における物体の配置を基準配置とし、各物質点の位置ベクトルを X とする。このとき、物質点 X の現時刻 t における位置ベクトル x は、以下のような関数関係で表される。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \quad (1.1)$$

また、変位ベクトル \boldsymbol{u} は以下のように定義される。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \quad (1.2)$$

で定義される。次に物理学的な観点から、不連続性がない限り物質点は初期位置 \boldsymbol{X} と現在位置 \boldsymbol{x} で、常に 1 対 1 の対応関係が成立するはずなので、物質点の運動の式 (1.1) の逆の関係が必ず定まることになる。

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) \quad (1.3)$$

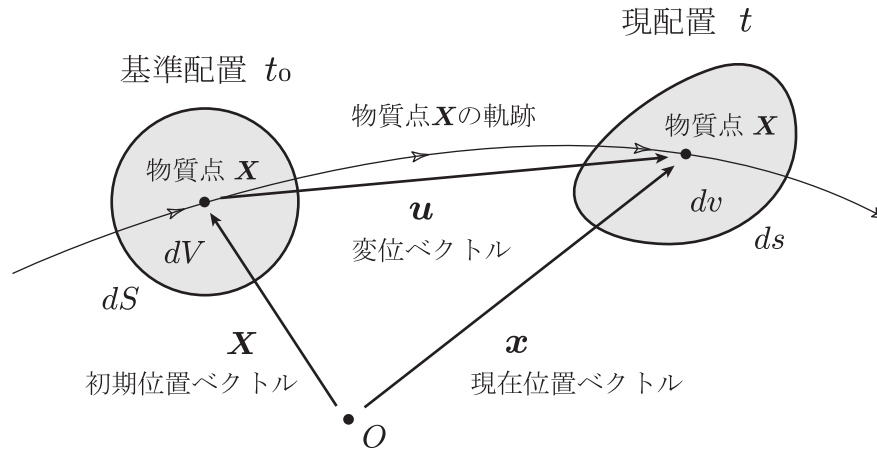


図 1.1: 物質点の運動と変位

これは数学的には、初期集合 (初期配置) の要素 X と現集合 (現配置) の要素 x が、1 対 1 の写像関係にあることを意味する。

一般に、連続体における任意のスカラー、ベクトル、テンソルの場やその時間的変化を (X, t) の関数として表すこともできるし、 (x, t) の関数として表すことも可能である。前者は物質表示 (material description) または *Lagrange* 表示、後者は空間表示 (spatial description) または *Euler* 表示と呼ばれる。固体や構造解析には *Lagrange* 座標系 X が、流体解析には *Euler* 座標系 x が用いられる。前者は一つの物質点を追跡して観測する概念であり、それは物体と共に運動かつ変形する埋め込まれた座標系 (埋込み座標系) による定式化となる。またこれは、物質座標、同時固定座標とも呼ばれる。後者は、ある空間内の一点を通過する物質点を観測する概念であり、これは流れを場として捉える、すなわち空間に固定された座標系 (空間座標) による定式化となる。またこれは、随時座標とも呼ばれる。ここで、*Lagrange* 座標系は物体と共に変形、*Euler* 座標系は空間に固定、と言うような特質的な性質を有しているため、その長所と短所は明確である。すなわち、*Lagrange* 表記法は変形や流動が過度に発達すると、座標系自体がもつれてしまい、流動や変形の追跡、すなわちシミュレートがある点で論理的に不可能となる。一方、*Euler* 表記法の場合、その性質から移動境界を全く表現することができない。また、この 2 つの座標系を発展的に統一し、物体の変形や流動とは無関係に任意の速度を持つ座標系を用いて連続体の運動を定式化することも可能である。このような座標系を参照座標系 χ と呼ぶことにし、これが本研究の流体・構造連成解析の主要な概念、すなわち ALE 法となる。

次に、物質点の相対的な運動を考える。時刻 t_0 の基準配置における物質点 X およびその近傍の物質点 $X + dX$ は、現時刻 t において $x(X, t)$ および $x(X + dX, t)$ の位置を占める。相対変位 dx が微小であれば、

$$dx = x(X + dX, t) - x(X, t) \quad (1.4)$$

は, dX に関して線形変換の関係にあると考えられるから,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.5)$$

を定義することができる. そして, \mathbf{F} を変形勾配テンソルと呼び, 連続体の相対的な変形を表す基本式となる.

1.3 Euler の運動法則と Cauchy の運動法則

連続体理論による質量保存の原理, 運動量保存の原理 (*Euler* の第 1 運動法則) と角運動量保存の原理 (*Euler* の第 2 運動法則) は, 現配置の物質体積 (*material volume*) $\int_v dv$ に対してそれぞれ以下のように定式化される. ただし, ρ は現配置の質量密度である.

1. 質量保存の原理.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \rho dv = 0 \quad (1.6)$$

2. 運動量保存の原理 (*Euler* の第 1 運動法則).

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \rho \mathbf{v} dv}_{\text{慣性力}} = \underbrace{\int_s \mathbf{t} ds}_{\text{表面力}} + \underbrace{\int_v \rho \mathbf{g} dv}_{\text{物体力}} \quad (1.7)$$

3. 角運動量保存の原理 (*Euler* の第 2 運動法則).

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_s \mathbf{x} \times \mathbf{t} ds + \int_v \mathbf{x} \times \rho \mathbf{g} dv \quad (1.8)$$

ここで, 現配置における断面力を \mathbf{f} とし, その断面の法線ベクトルを \mathbf{n} とすれば, Cauchy 応力ベクトル \mathbf{t} が定まる. さらに, 法線ベクトル \mathbf{n} を Cauchy 応力ベクトル \mathbf{t} に線形変換するテンソルとして, Cauchy 応力テンソル \mathbf{T} を導入することができる. これは, 現配置における真応力となる.

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{t} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} \quad (1.9)$$

これを用いてガウスの発散定理を適用すれば, 以下の微分形¹で表示された質量保存則と *Cauchy* の第 1,2 運動法則が得られる.

¹微分形とは, 物体の任意の一部分 dv について成立するしなければならないという条件を定式化したもの. 逆に積分形は, 物体の全領域 $\int_v dv$ について成立しなければならないという条件を定式化したもので, 前者が *Cauchy* の運動法則, 後者が *Euler* の運動法則となる.

1. 質量保存則 (微分形) .

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \rho \nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.10)$$

2. Cauchy の第 1 運動法則 .

$$\rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (1.11)$$

3. Cauchy の第 2 運動法則 .

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad (1.12)$$

1.4 基準配置参照への変換操作

前節で導出した運動量保存則 (Euler の第 1,2 運動法則) は現配置参照, すなわち Cauchy 応力ベクトル \mathbf{t} を用いて定式化されていた. そこで, 改めて物体の現配置 t , 基準配置 t_0 各々において定式化すれば, 以下のように考えると考えられる (Euler の第 2 運動法則は省略した).

運動量保存則の現配置での定式

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \int_v \rho \mathbf{v} dv = \int_s \mathbf{t} ds + \int_v \rho \mathbf{g} dv \quad (1.13)$$

運動量保存則の基準配置での定式

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \int_V \rho_0 \mathbf{v} dV = \int_S \tilde{\mathbf{t}} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g} dV \quad (1.14)$$

また, 現配置, 基準配置それぞれの物体の任意の体積要素 dv, dV と面積要素 ds, dS は, 体積変化率 $J \equiv \det \mathbf{F}$ と Nanson の公式により, 以下のように関係付けられる.

$$\begin{aligned} dv &= [d\mathbf{x}_1 \ d\mathbf{x}_2 \ d\mathbf{x}_3] \\ &= [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3] \\ &= (\det \mathbf{F}) [d\mathbf{X}_1 \ d\mathbf{X}_2 \ d\mathbf{X}_3] \\ &= J dV \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$n ds = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dS \quad (1.16)$$

従って，質量密度 ρ, ρ_0 と応力ベクトル t, \tilde{t} は，以下の関係を満たすことになる．

$$dm = \rho dv = \rho J dV \equiv \rho_0 dV \quad (1.17)$$

$$df = t ds = \underbrace{J (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T})^T}_{\mathbf{\Pi}^T} \cdot \mathbf{N} dS \equiv \tilde{t} dS \quad (1.18)$$

このように基準配置参照に変換するために，自然の成り行きで導入される新たな応力テンソルが，第 1Piola–Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{\Pi}$ である．しかし，第 1Piola–Kirchhoff 応力テンソルは明らかに対称でないことから，対称テンソルとなるように補正した第 2Piola–Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} がさらに導入される．

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) \quad (1.19)$$

また，2つの応力テンソルの物理的解釈は以下の通り．

1. 第 1Piola–Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{\Pi}$. 表面力ベクトル df を，そのまま基準配置に作用させる．すなわち，第 1Piola–Kirchhoff 応力ベクトル \tilde{t} は，以下ようになる．また，このような観点から，第 1Piola–Kirchhoff 応力テンソルは公称応力とも呼ばれる．

$$\frac{df}{dS} \equiv \tilde{t} = \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{N} \quad (1.20)$$

2. 第 2Piola–Kirchhoff 応力テンソル \mathbf{S} . 表面力ベクトル df を， $\mathbf{F}^{-1} \cdot df$ と変換して基準配置に作用させる．すなわち，第 2Piola–Kirchhoff 応力ベクトル $\tilde{\tilde{t}}$ は，以下ようになる．

$$\frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot df}{dS} \equiv \tilde{\tilde{t}} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{N} \quad (1.21)$$

以上より，2つの応力テンソル $\mathbf{T}, \mathbf{\Pi}, (\mathbf{S})$ を導入すれば，Euler の運動法則は現配置参照型，並びに基準配置参照型の Cauchy の運動法則

に書き下すことが可能となる．

Cauchy の運動法則

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad (1.22)$$

Cauchy の運動法則の Lagrange 表示 1

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \nabla_X \cdot \mathbf{\Pi} + \rho_0 \mathbf{g} \quad , \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi})^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Pi} \quad (1.23)$$

Cauchy の運動法則の Lagrange 表示 2

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} = \nabla_X \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_0 \mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{S}^T = \mathbf{S} \quad (1.24)$$

また一般に構成式との兼ね合いから，平衡方程式 (1.22) は流体の運動の記述に用いられ，平衡方程式 (1.24) は固体の運動の記述に用いられる．

1.5 境界値問題と仮想仕事式

物体が平衡状態にあるためには，以下の諸条件が満たされる必要があり，一般にこの条件のもとで物体の変位，歪，応力を求める問題を境界値問題と呼ぶ．

[1] 平衡条件式 (Cauchy の第 1,2 運動法則)

[2] 境界条件式

[3] 変位・歪関係式

[4] 応力・歪関係式 (構成式)

平衡条件式 [1] については既に述べたので，境界条件式 [2] について考えると，それは力学的境界条件 (自然境界条件) と幾何学的境界条件 (基本境界条件) からなる．

力学的境界条件

幾何学的境界条件

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \underline{\underline{\mathbf{t}}} \quad , \quad \mathbf{u} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad , \quad (\mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{v}}}) \quad (1.25)$$

$$\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{N} = \underline{\underline{\tilde{\mathbf{t}}}} \quad , \quad \mathbf{u} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad , \quad (\mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{v}}}) \quad (1.26)$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{N} = \underline{\underline{\tilde{\mathbf{t}}}} \quad , \quad \mathbf{u} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} \quad , \quad (\mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{v}}}) \quad (1.27)$$

また補足として，基本境界条件とは未知変数の近似関数があらかじめ満足することを仮定して導入される境界条件であり，一方，自然境界条件は重み付き残差法の中に組み込まれ，近似的に満足される境界条件である．すなわち変位法に基づく有限要素法においては，前者が幾何学的境界条件となり，後者が力学的境界条件となる．当然のことながら，応力法に基づくコンプリメンタルな有限要素法においては，それらの関係は逆転する．

次に，仮想仕事の原理式を導出する．まず，可容応力場 T, Π と可容変位場 u からなる場と，それに仮想変位² δu を加えた新たな可容変位場 $u + \delta u$ に関して，それぞれ前節で得られた平衡方程式を弱形式化し，その2式の差を取ることで，平衡方程式 [1] と力学的境界条件式 [2] と同等な仮想仕事式が導かれる．ここで，記号 $\dot{}$ は物質時間導関数 $\partial/\partial t|_X$ を簡略表記したものである．

動的仮想仕事式

$$\int_v \rho \dot{v} \cdot \delta u dv + \int_v T : \delta A_{(L)} dv = \int_{s_t} \underline{t} \cdot \delta u ds + \int_v \rho g \cdot \delta u dv \quad (1.28)$$

動的仮想仕事式の Lagrange 表示 1

$$\int_V \rho_0 \dot{v} \cdot \delta u dV + \int_V \Pi^T : \delta F dV = \int_{S_t} \tilde{\underline{t}} \cdot \delta u dS + \int_V \rho_0 g \cdot \delta u dV \quad (1.29)$$

動的仮想仕事式の Lagrange 表示 2

$$\underbrace{\int_V \rho_0 \dot{v} \cdot \delta u dV}_{\text{慣性力項}} + \underbrace{\int_V S : \delta E dV}_{\text{内力項}} = \underbrace{\int_{S_t} \tilde{\underline{t}} \cdot \delta u dS}_{\text{外力項 (表面力)}} + \underbrace{\int_V \rho_0 g \cdot \delta u dV}_{\text{外力項 (体積力)}} \quad (1.30)$$

また，仮想仕事の原理式は，数学的な範疇では変分法における重み付き残差法の一部と捉えることができるから，様々な組み合わせで弱形式化を考えることができる．これにより，同様な弱形式化の操作を可容速度場 $v, v + \delta v$ に関して行えば，以下の仮想仕事率式 (得られる式の次元が仕事率 $\delta P = f \cdot \delta v$ となることに注意) が導かれるが，これは平衡方程式 (1.24) のみについて明記する．

応力-速度型の動的仮想仕事式

$$\underbrace{\int_v \rho \dot{v} \cdot \delta v dv}_{\text{慣性力項}} + \underbrace{\int_v T : \delta D dv}_{\text{内力項}} = \underbrace{\int_{s_t} \underline{t} \cdot \delta v ds}_{\text{外力項 (表面力)}} + \underbrace{\int_v \rho g \cdot \delta v dv}_{\text{外力項 (体積力)}} \quad (1.31)$$

ここで， F は変形勾配テンソル， A は Almansi 歪テンソル， E は Green-Lagrange 歪テンソル， D は変形速度 (ストレッチング) テンソルとし，変位・歪関係式 [3] より得られるそれぞれの仮想変分が $\delta F, \delta A, \delta E, \delta D$ である．また，これらの仮想仕事式から得られるマトリクス方程式は，反復計算法において，割線法 (*Secant method*) すなわち割線マトリクス方程式に相当する．

²拘束条件を破らない範囲で，系が構造上許される可能な (admissible) 変位を意味する [?]

さらに，弱形式化を可容応力速度場と可容変位場に関して行えば，以下の速度形式の仮想仕事式が得られる．すなわち速度形式とは，反復計算法における接線法 (*Tangent method*) すなわち接線マトリクス方程式に相当するものである．

応力速度-変位型の動的仮想仕事式

$$\underbrace{\int_V \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV}_{\text{慣性力項}} + \underbrace{\int_V \dot{\mathbf{S}} : \delta \mathbf{E} dV + \int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV}_{\text{内力項 (接線剛性マトリクス)}} = \underbrace{\int_{S_i} \dot{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dS}_{\text{外力項 (表面力)}} + \underbrace{\int_V \rho_0 \dot{\mathbf{g}} \cdot \delta \mathbf{u} dV}_{\text{外力項 (体積力)}} \quad (1.32)$$

これより一般に動的な仮想仕事式は，「慣性力と内力による仮想仕事の和が，外力による仮想仕事と等しい」という形式で得られることが分かる．また，3種類の仮想仕事式 (1.28), (1.29), (1.30) を導出したが，これらは全て運動量保存則 (1.13) から得られた式であるから，その絶対的な値も等しく，完全に等価である．また，構造解析では Lagrange 座標系が有用なことから，応力テンソルが対象になるという理由から，一般に式 (1.30) が用いられることが多い．一方，状態変数を流速に取る流体解析では仮想仕事率式 (1.31) が用いられる．本論文でも，ALE 法に拡張する以外は，基本的にそれに従う．また，以上の仮想仕事式，仮想仕事率式は応力・歪関係式 [4] すなわち構成式とは無関係に成立する．

第2章 ALE法による流体解析の基礎式

2.1 緒言

流体・構造連成問題の解析を行うにあたって、最も重要となる課題は、流体と構造の境界面の再現方法である。すなわち、移動する境界面をどのように取り扱うかが研究の対象となる。そこで、移動境界を取り扱う必要が生じる流れ問題としては、自由表面流れ問題 (free surface flow, flow with free surface) と流体・構造連成問題 (Fluid-Structure interaction problems) がある。連成度合の弱い問題では、構造の変形を微小とすれば、構造は Lagrange 法で、流体は Euler 法でそれぞれ独立に取り扱って、弱連成解析として取り扱うことが可能であるが、人工心臓等に代表されるような流体領域の大変動を伴う問題においては、その連成の度合が極端に強いため、その手法では困難となる。前述の通り、Lagrange 表記では物質点に座標系を固定しているため (埋め込み座標)、移動境界は厳密に表現できるが、対流 (移流) 現象が過度に生じると要素のもつれが生じてしまい、流動や変形の追跡、すなわちシミュレートがある点で論理的に不可能となり、その一方、Euler 表記法により記述された数学表現は、その性質から移動境界を全く表現することができないからである。この問題点の従来型の打開策としては、メッシュの再分割法の導入であり、境界面をリメッシングで Lagrange 的に追跡し、近似的に評価する手法が挙げられる。しかし、変位法においてはリメッシングの際に応力の精度が著しく低下するため、その信頼性の面からあまり有用とは言えない。

そこで、これら2つの座標表示の欠点を解決する手法の1つとして、かつ、移動境界を再現可能な有力な手法として、arbitrary Lagrangian-Eulerian 法 (Huerta, A. and Liu, W. K. 1985^[2]) と呼ばれる手法 (ALE 法) が近年提案されている。ALE 法では、物体の変形や流動とは無関係に任意に動かすことのできる参照座標系を用いて連続体の運動を記述する方法であり、Euler 表記と Lagrange 表記を発展的に統一したものである。これにより、双方の有効な部分を組み合わせて変形や流動の記述が可能となる。

本節では、ALE 法による流体解析の基礎式となる、質量保存則と Navier-Stokes 方程式の ALE 表記法を導入した数学表現と、その有限要素定式化、さらにマトリクス方程式の導出を行う。

2.2 ALE法の基礎式

Lagrange 表示で表される座標系を物質座標系 (Lagrange 座標系)、Euler 表示で表される座標系を空間座標系 (Euler 座標系) と呼ぶ。そして、これらの座標系とは独立した任意の座標系、すなわち参照座標系を図 2.1 として設定し、その座標系上で物体の運動を記述することを

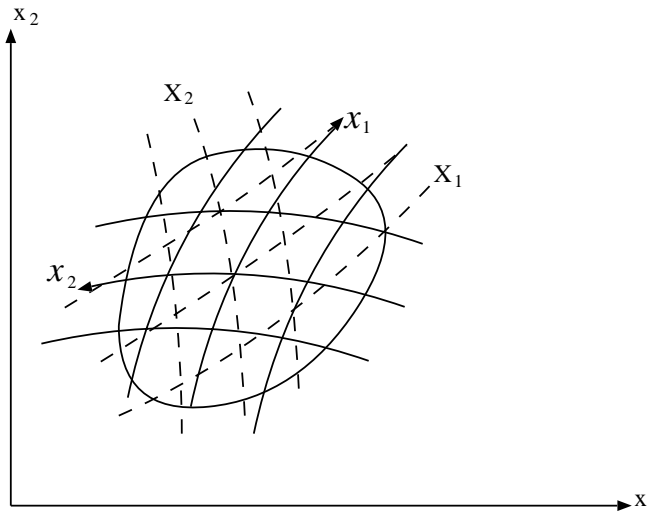


図 2.1: Lagrange 座標系 \mathbf{X} , Euler 座標系 \mathbf{x} , 及び ALE 座標系 χ の概念図

参照表示 (ALE 表示) と定義する . 今 , Lagrange , Euler , ALE の各表示により解析領域および領域内のある点を次のように表す (久田俊明, 野口裕久 1995 ^[7]) .

$$\begin{cases} \text{Lagrange 表示} & : R_{\mathbf{X}} , \mathbf{X} \\ \text{Euler 表示} & : R_{\mathbf{x}} , \mathbf{x} \\ \text{ALE 表示} & : R_{\chi} , \chi \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで , スカラー ϕ , ベクトル \mathbf{b} , テンソル \mathbf{A} 等の場を表す任意の量 f を考え , その Lagrange 表示 , Euler 表示 , ALE 表示をそれぞれ $f(\mathbf{X}, t)$, $f(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$, $f(\mathbf{X}(\chi, t), t)$ とし , それらの各種時間導関数を考えると , 以下の時間導関数の変換式が成り立つ .

1. 実質時間導関数と物質時間導関数の関係式 .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}}_{\text{物質時間導関数}} + \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial X_i} \underbrace{\frac{dX_i}{dt} \Big|_{\mathbf{X}}}_{=0} \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. 実質時間導関数 (物質時間導関数) と空間時間導関数の関係式 .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \underbrace{\left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}}_{\text{空間時間導関数}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \underbrace{\left. \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}}_{\equiv v_i} \\ &= \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes f) \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. 実質時間導関数物 (物質時間導関数) と“参照”時間導関数の関係式 .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \underbrace{\left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}}_{\text{参照時間導関数}} + \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \chi_i} \underbrace{\left. \frac{\partial \chi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}}_{\equiv w_i} \\ &= \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{w} \cdot (\nabla_{\boldsymbol{\chi}} \otimes f) \end{aligned} \quad (2.4)$$

これより明らかなように，物質時間導関数以外の時間導関数は，右辺第2項の移流導関数 (*Covective derivative*)，一般に移流項，対流項が出現する．これは，空間時間導関数は空間に固定された観測者，さらに参照時間導関数は任意に移動する観測者から観測される時間変動であることから，観測者と物質点の運動によって相対的に輸送される物理量 f の変化率を表している．

また，ここで出現する各種の速度の物理的解釈は以下の通りである．

1. Euler 座標系に対する物質点の速度 \mathbf{v} .

$$v_i = \left. \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \quad (2.5)$$

2. 参照座標系に対する物質点の速度 \mathbf{w} .

$$w_i = \left. \frac{\partial \chi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \quad (2.6)$$

3. Euler 座標系に対する参照座標系の速度 $\hat{\mathbf{v}}$.

$$\hat{v}_i = \left. \frac{\partial x_i(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} \quad (2.7)$$

次に，参照時間導関数の式 (2.4) の第 2 項，すなわち ALE 法によって出現する移流項を，Euler 表示するための基礎式を導出する．まず，式 (2.4) において，任意物理量 f を現在位置ベクトル \mathbf{x} とすれば，以下の速度関係式が得られる．

$$\left. \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + w_j \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} \quad (2.8)$$

$$v_i = \hat{v}_i + w_j \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} \quad (2.9)$$

従って，新たに参照座標系に対する物質点の相対速度 $\mathbf{c} \equiv \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ を導入すれば，その ALE 法による定式化を明瞭に展開することが可能となる．この速度関係式が，ALE 法の移流項を Euler 表示するための基礎式となる．

$$c_i \equiv v_i - \hat{v}_i = w_j \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} \quad (2.10)$$

以上より，速度関係式 (2.10) を参照時間導関数の式 (2.4) に代入すれば，Euler 領域で参照時間導関数を取る式が得られる．これが本研究の ALE 法 (*arbitrary Lagrangian–Eulerian method*) における時間導関数の基本式となる．

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes f) \end{aligned} \quad (2.11)$$

また，ALE 法は $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ であれば Lagrange 座標系， $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ であれば Euler 座標系に退化するので，Lagrange 法と Euler 法を発展的に統一したものと考えることができる．すなわち，実際の問題では，メッシュ速度 $\hat{\mathbf{v}}$ を移動境界面に沿うように制御すれば，合理的に移動境界問題を取り扱うことが可能となる．さらに，図 2.2 より明らかなように，解析配置 (ALE メッシュ) によって理論が構築されるため，その時刻での実際の基準配置と現配置は共に未知となるが，流体のように構成式が流速のみで変位 (歪) の情報を必要としない場合，その効果は大きい．また，構造に適用する場合，ALE メッシュの基準配置が時々刻々更新されるため，メッシュのゆがみを回避するように ALE メッシュを制御すれば，リメッシングを行わずに解析を進めることが可能となる．

2.3 ALE 質量保存則の Euler 表示

本節では，第 1 章で導いた質量保存則を，ALE 表記に変換する．ただし， ρ は Euler 領域 R_x で定義される質量密度を表す．

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.10)$$

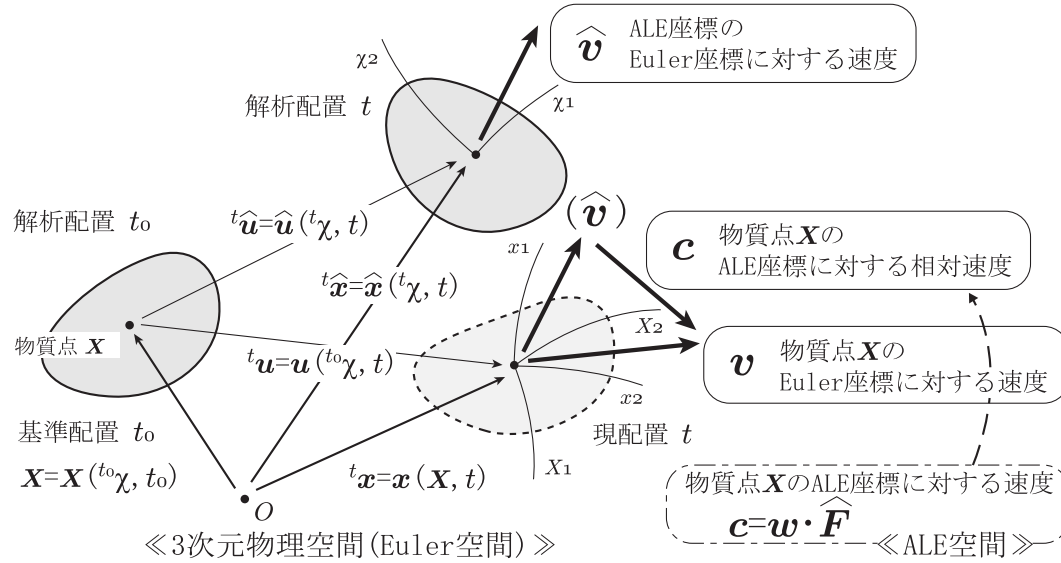


図 2.2: ALE 法における配置と速度関係図

すなわち，上式の物質時間導関数 $\partial/\partial t|_X$ を式 (2.11) の $f \equiv \rho$ を用いて，参照時間導関数 $\partial/\partial t|_X$ に変換すればよい．従って，ALE 質量保存則の Euler 表示は以下ようになる．

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_X + \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \rho) + \rho \nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.12)$$

これを成分表示すれば，以下ようになる．

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_X + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{in } R_x) \quad (2.13)$$

次に，本研究では非圧縮性流体を取り扱うが，質量保存則を完全非圧縮性の式，すなわち $\nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0$ とすることによって，数値的な不安定性が引き起こされることが明らかになっているため，以下で微圧縮性の質量保存則を導入する．これは一般に，*Barotropic* 流動と呼ばれ，以下の関係を導入する (Ray, S. E., Wren, G. P. and Tezduyar, T. E. 1997 [?]) ．

$$p = \frac{B_1}{B_2} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{B_2} - 1 \right] \quad (2.14)$$

ただし， ρ_0 と B_1 は標準気圧での体積密度と体積弾性率である． B_2 は無次元の定数である．体積弾性率の定義式は， θ を温度とすれば以下

のようになる .

$$B = \rho \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\theta} \quad (2.15)$$

この Barotropic 流動の式 (2.14) は次の体積弾性率の仮定式から誘導することができる .

$$B = B_1 + B_2 p \quad (2.16)$$

これに, 等温変化条件 ($\theta = \text{Const}$) を仮定すると, 式 (2.15) から次の式が得られる .

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{B}{\rho} \quad (2.17)$$

更に, 体積弾性率の圧力 p からの影響を無視して, B は定数であることを仮定する . これらを用いると, ALE 質量保存則の Euler 表示式 (2.13) は, 以下のように書き改めることができる (Huerta, A. and Liu, W. K. 1988 [?]).

$$\frac{1}{B} \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{B} c_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{in } R_x) \quad (2.18)$$

この式が, 微圧縮性 ALE 質量保存則 (連続の式) となる . すなわち, 左辺の第 1 項と第 2 項が微圧縮性を導入する項であり, 左辺第 3 項のみならば完全非圧縮式となる . 本研究では, 連続の式として, この微圧縮性の Barotropic 流動式を用いる .

2.4 ALE Navier–Stokes の方程式の Euler 表示

本節では, 第 1 章で導いた Cauchy の運動法則を, ALE 表記に変換する (Wu, W. Y. [?]).

$$\rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{T} \quad (1.11)$$

前節と同様に, 上式の物質時間導関数 $\partial/\partial t|_{\mathbf{X}}$ を式 (2.11) の $f \equiv v_i$ を用いて, 参照時間導関数 $\partial/\partial t|_{\mathbf{x}}$ に変換すればよい . 従って, ALE Cauchy の運動法則の Euler 表示は以下ようになる .

$$\rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{c} \cdot (\nabla_x \otimes \mathbf{v}) = \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.19)$$

これを成分表示すれば, 以下ようになる .

$$\rho \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (\text{in } R_x) \quad (2.20)$$

また, 一般的な流体の力の伝達方法を示した法則は, 大きく分けて以下の Pascal の原理と Newton の粘性法則とからなる .

[1] *Pascal* の原理 .

密閉容器内の流体の一点に圧力を加えると、全ての部分に同じ圧力が伝達される .

[2] *Newton* の粘性法則 .

粘性によって生じるせん断応力は、その面に垂直な速度勾配に比例する .

すなわち、これを構成式として定式化したものが、一般的な *Newton* 流体の構成式となる . ただし、 μ は粘性係数とし、動粘性係数は $\nu \equiv \mu/\rho$ で定義される .

$$\mathbf{T} = \left\{ -p - \frac{2}{3}\mu(\text{tr}\mathbf{D}) \right\} \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.21)$$

さらに、本研究で取り扱う流動においては、ほぼ圧縮性が無視できると考えられるから、構成式にも非圧縮条件 $\text{tr}\mathbf{D} = \nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0$ を適用すれば、以下のように簡略化される .

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.22)$$

これを成分表示すれば、以下のようになる .

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.23)$$

また一般に流体解析においては、*Cauchy* の運動法則に *Newton* 流体の構成式を適用し、さらに空間時間導関数に変換したものが *Navier–Stokes* の方程式と呼ばれるので、以後 ALE 法においてもそれに従う .

一方、流体の境界条件は、基本境界条件 (*Dirichlet* 境界条件) と自然境界条件 (*Neumann* 境界条件) からなり、それらは以下のように設定される .

$$v_i = \bar{v}_i \quad (\text{on } \partial R_x^b) \quad (2.24)$$

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{h}_i \quad (\text{on } \partial R_x^h) \quad (2.25)$$

ただし、その境界面は、

$$\partial R_x = \overline{\partial R_x^b \cup \partial R_x^h}, \quad \emptyset = \partial R_x^b \cap \partial R_x^h \quad (2.26)$$

を満たすものとする .

2.5 有限要素方程式の導出

本節では、支配方程式を重み付き残差法で弱形式化し、有限要素離散化する . さらに、一般化行列、ベクトルを導入して、その支配方程式をマトリクス方程式で表記したものを導く .

2.5.1 支配方程式の重みつき残差式の導出

以上の節で，微圧縮性 ALE 連続の式 (2.18) と ALE Navier–Stokes の方程式 (2.20) が導出された．以下では，これら 2 つの流体の支配方程式を有限要素法で離散化する．その手法として，重みつき残差法の中の Galerkin 法によって弱形式化する (Huerta, A. and Liu, W. K. 1988 [7])．Galerkin 法 (Bubnov–Glerkin 法) とは，重み関数を形状関数に取る手法であり，重み関数に形状関数以外のものをさらに付加する定式化は，それと区別するために Petrov–Glerkin 法と呼ばれる．

ここで未知の状態変数は圧力 p と流速 \boldsymbol{v} であり，それぞれ変数に対する重み関数を δp ， $\delta \boldsymbol{v}$ とする．まず，微圧縮 ALE 連続の式 (2.18) を重み付き残差法で有限要素離散化すると，以下ようになる．ここで， R_x^e は Euler 表示による要素領域である．

$$\sum_e \int_{R_x^e} \delta p \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{x}} dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \delta p \frac{1}{B} c_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \delta p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dR_x = 0 \quad (2.27)$$

次に，ALE Navier–Stokes の方程式 (2.20) を重み付き残差法で有限要素離散化すると，以下ようになる．

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{x}} dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dR_x \\ & - \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dR_x - \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho g_i dR_x = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここで，Cauchy 応力テンソルは対象であることを考慮して，次の形式的な関係式を導入し，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{v}) &= \frac{\partial (\sigma_{ij} \delta v_j)}{\partial x_i} = \delta v_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} \\ &= \delta v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} \quad \left(= \delta \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + ((\nabla \delta \boldsymbol{v})^T) : \boldsymbol{\sigma}^T \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

体積積分を面積積分に変換するガウスの発散定理を適用すれば，

$$\sum_e \int_{R_x^e} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{v}) dR_x = \int_{\partial R_x^h} \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{n} dS \quad (2.30)$$

となるから，Navier–Stokes 離散化式 (2.28) の応力に関する第 3 項は，次のように変形できる．

$$- \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dR_x = \sum_e \int_{R_x^e} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dR_x - \int_{\partial R_x^h} \delta v_i \bar{h}_i dS \quad (2.31)$$

ただし，ここでは自然境界条件式 (2.25) を使った．さらに，Newton 流体の構成式 (2.23) を代入すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} &= \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \left\{ -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\
&= -\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} p + \mu \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\
&= -\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} p + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

となるので，ALE Navier–Stokes の離散化式 (2.28) は，最終的に以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned}
\sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_{\mathcal{X}} dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dR_x \\
- \sum_e \int_{R_x^e} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} p dR_x + \sum_e \int_{R_x^e} \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dR_x \\
- \sum_e \int_{R_x^e} \delta v_i \rho g_i dR_x - \int_{\partial R_x^h} \delta v_i \bar{h}_i dS = 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

2.5.2 流体要素のマトリクス方程式の生成

以上で，弱形式化することにより有限要素離散化した微圧縮性 ALE 連続の式 (2.27) と ALE Navier–Stokes の方程式 (2.33) が得られた．これを，一般化未知変数ベクトルを導入してマトリクス表示すると，その最終的な形は，以下ようになる (Huerta, A. and Liu, W. K. 1988 [?]) ．

微圧縮性 ALE 連続の式のマトリクス方程式

$$\mathbf{M}^P \cdot \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A}^P \cdot \mathbf{p} + \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{2.34}$$

ALE Navier–Stokes の方程式のマトリクス方程式

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{K}_\mu \cdot \mathbf{v} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{F} \tag{2.35}$$

ただし，記号 * は未知変数の ALE 座標系における時間微分 (参照時間導関数 $\partial/\partial t|_{\mathcal{X}}$) を表す．この 2 つのマトリクス方程式は，流体の全未知変数で一般化したベクトル $\boldsymbol{\phi}$ を導入することにより，さらにまとめて 1 つのマトリクス方程式で表すことができる．

流体解析のマトリクス方程式

$$\mathbf{M}_f \dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{C}_f \boldsymbol{\phi} = \mathbf{F}_f \tag{2.36}$$

ここで出現する各マトリクスと各ベクトルは，以下の通りである．

$$M_f = \begin{bmatrix} M^P & \\ & M \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} \Lambda^P & G^T \\ -G & \Lambda + K_\mu \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\varphi = \begin{Bmatrix} p \\ v \end{Bmatrix}, \quad F_f = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

さらに，各記号の物理的解釈は以下の通りである．

$$\left\{ \begin{array}{l} M^P, M : \text{圧力, 速度についての質量マトリクス} \\ \Lambda^P, \Lambda : \text{圧力, 速度についての移流項 (対流項) のマトリクス} \\ F^{\text{ext}} : \text{外力ベクトル} \\ K_\mu : \text{粘性散逸マトリクス} \\ G : \text{発散についてのマトリクス} \\ p^*, v^* : p, v \text{ の参照時間導関数} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

また，流体要素の形状関数を表す記号を以下のように定義する．

$$\left\{ \begin{array}{l} N_a : \text{節点 } a \text{ に関する速度の形状関数} \\ N_a^P : \text{節点 } a \text{ に関する圧力の形状関数} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

さらに，有限要素解析で用いる自由度定数を以下のように置く．

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 要素内の圧力点数} : \text{NEPN} \\ 1 \text{ 要素内の速度点数} : \text{NEN} \\ \text{空間の次元数} : \text{NSD} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

以上で，流体解析の支配方程式が一つのマトリクス方程式 (2.36) で表されたが，それぞれのマトリクスの具体的な成分を以下に示す．

微圧縮性 ALE 連続の式のマトリクス

$$\mathbf{M}^P = \sum_e \mathbf{M}^{Pe} , \quad \mathbf{M}^{Pe} = [M_{IJ}^P] \quad (2.42)$$

$$M_{IJ}^P = \int_{R_x^e} \frac{1}{B} N_a^P N_b^P dR_x \quad (2.43)$$

$$\mathbf{A}^P = \sum_e \mathbf{A}^{Pe} , \quad \mathbf{A}^{Pe} = [A_{IJ}^P] \quad (2.44)$$

$$A_{IJ}^P = \int_{R_x^e} \frac{1}{B} N_a^P c_k \frac{\partial N_b^P}{\partial x_k} dR_x \quad (2.45)$$

$$\mathbf{G} = \sum_e \mathbf{G}^e , \quad \mathbf{G}^e = [G_{MJ}] \quad (2.46)$$

$$G_{MJ} = \int_{R_x^e} N_b^P \frac{\partial N_c}{\partial x_m} dR_x \quad (2.47)$$

ここで，成分添え字は以下を満たす．

$$\begin{cases} I = a \\ J = b \\ M = (c - 1) \cdot \text{NSD} + m \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq a, b \leq \text{NEPN} \\ 1 \leq c \leq \text{NEN} \\ 1 \leq k, m \leq \text{NSD} \end{cases} \quad (2.48)$$

ALE Navier–Stokes の方程式のマトリクス

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^e, \quad \mathbf{M}^e = [M_{IJ}] \quad (2.49)$$

$$M_{IJ} = \int_{R_x^e} \delta_{ij} \rho N_a N_b \, dR_x \quad (2.50)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_e \mathbf{\Lambda}^e, \quad \mathbf{\Lambda}^e = [\Lambda_{IJ}] \quad (2.51)$$

$$\Lambda_{IJ} = \int_{R_x^e} \delta_{ij} \rho N_a c_m \frac{\partial N_b}{\partial x_m} \, dR_x \quad (2.52)$$

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_e \mathbf{F}^{\text{ext}e}, \quad \mathbf{F}^{\text{ext}e} = [F_I^{\text{ext}}] \quad (2.53)$$

$$F_I^{\text{ext}} = \int_{R_x^e} \rho N_a g_i \, dR_x \quad (2.54)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{R_x^e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \, dR_x \quad (2.55)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_a \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{\text{NEN}}] \quad (2.56)$$

ここで，成分添え字は以下を満たす．

$$\begin{cases} I = (a-1) \cdot \text{NSD} + i \\ J = (b-1) \cdot \text{NSD} + j \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq i, j, m \leq \text{NSD} \\ 1 \leq a, b \leq \text{NEN} \end{cases} \quad (2.57)$$

さらに， \mathbf{B} マトリクスと \mathbf{D} マトリクスは，3次元の場合：

$$\mathbf{B}_a^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_3} & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & \frac{\partial N_a}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

2次元の場合：

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_a}{\partial x_2} & \frac{\partial N_a}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_a}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

となる。

第3章 ALE有限要素法による流体・構造連成解析の境界条件の制御方法

3.1 緒言

単純な流れ問題と流体・構造連成問題を解析する場合に，その境界条件としては，流体・構造境界面，固定壁面とオープン境界面に分類できる．本章では，各種類の境界の連続条件(幾何学的境界条件)と平衡条件(力学的境界条件)をまとめる．

また，有限要素法においては重み付き残差法の観点から，境界条件は2種類に分類できる．それは，基本境界条件(Dirichlet境界条件)と自然境界条件(Neumann境界条件)である．前者は，未知変数の近似関数があらかじめ満足することを仮定して導入される境界条件であり，一方，後者は重み付き残差法の中に組み込まれ，近似的に満足される境界条件である．すなわち変位法に基づく有限要素法においては，前者が幾何学的境界条件となり，後者が力学的境界条件に相当する．当然のことながら，応力法に基づくコンプリメンタルな有限要素法においては，それらの関係は逆転する．また，どのような境界面においても，その境界条件の一般形式は以下ようになる．

自然境界条件

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \underline{t} \quad (3.1)$$

基本境界条件

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}}, \mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}}, (p = \underline{p}) \quad (3.2)$$

補足として，流体や超弾性体などの構成式に出現する圧力は，混合法的な取り扱いをするため一概に分類できないが，本研究においては変位法を基礎とするので，それは基本境界条件の範疇となる．しかし，圧力指定の境界条件は使用していない．

3.2 流体・構造連成境界面の制御方法

取り扱う流体の性質により，流体・構造境界面は，固着条件と滑り条件の2種類の連成条件に分類される．

3.2.1 流体・構造境界面の固着条件

粘性流体と構造の連成問題における流体・構造の境界面では，固着条件を適用する (Wu, W. Y. 1983^[?]). 境界面での固着条件式は，以下の通りである .

$$v_i^f = v_i^s \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

ただし右肩符号 f は流体要素の，並びに s は構造要素の諸量であることを示す . また，境界面での平衡条件は，以下の通りである .

$$\sigma_{ij}^f n_j^f + \sigma_{ij}^s n_j^s = \bar{h}_i \quad (3.4)$$

ただし， n は境界面の単位法線ベクトル， t は境界面の単位接線ベクトル， h は外力ベクトルを意味する .

3.2.2 流体・構造境界面の滑り条件

理想流体と構造の連成問題における流体・構造の境界面では，滑り条件を適用する (Wu, W. Y. 1983^[?] と Nitikitpaiboon, C. and Bathe, K. J. 1993^[?]). 境界面での滑り条件式は，以下の通りである .

$$v_n^f = v_n^s, \quad v_t^f \neq v_t^s \quad (\text{速度}) \quad (3.5)$$

$$\dot{v}_n^f = \dot{v}_n^s, \quad \dot{v}_t^f \neq \dot{v}_t^s \quad (\text{加速度}) \quad (3.6)$$

ただし，流体・構造境界面での変位は，流体に対しては指定せず，構造に対しては動的な積分法 (Newmark- β 法，PMA 法など) に従って節点の変位量を定める . また，境界面での平衡条件は以下で与えられる .

$$\sigma_n^f + \sigma_n^s = 0 \quad (3.7)$$

$$\sigma_t^f = 0, \quad \sigma_t^s = 0 \quad (\text{理想流体}) \quad (3.8)$$

$$\sigma_t^f = \tau, \quad \sigma_t^s = -\tau \quad (\text{粘性流体}) \quad (3.9)$$

ここで， τ は粘性摩擦 (せん断) 応力である .

3.3 固定壁面の境界条件の制御方法

粘性流体の場合には，固定壁面で固着条件を適用する . この場合は，流速指定の境界条件しか存在しない (Wu, W. Y. 1983^[?]).

$$v_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

理想流体の場合には，固定壁面で滑り条件を適用する．すなわち，法線方向のゼロ流速境界条件と接線方向のゼロ応力境界条件になる．

$$v_n = 0 \quad (3.11)$$

$$\sigma_t = \sigma_{ij}t_i n_j = 0 \quad (3.12)$$

ただし，滑り条件と固着条件を混在して用いると，流速分布に不合理な現象が生じるため，混在して用いることは望ましくない．

3.4 オープン境界面の制御方法

流入口と流出口はオープン境界面として取り扱いが最も難しい境界条件となる (Gresho P. M. and Sani, R.L. 1998 [?]) .

3.4.1 自然境界条件を適用するオープン境界面 (応力指定)

応力境界条件 (自然境界条件) は，以下のように与えられる．

$$\sigma_{ij}n_i n_j = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{h}} \quad (3.13)$$

$$\sigma_{ij}t_i n_j = \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{h}} \quad (3.14)$$

ただし， $\mathbf{n}, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{h}}$ はオープン境界面の単位法線ベクトル，単位接線ベクトル，並びに境界における表面力である．ここで，粘性流体の場合は，Newton の粘性流体の構成式より，

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\text{div}\mathbf{v}\delta_{ij}) \quad (3.15)$$

であるから，法線方向と接線方向の応力成分は以下ようになる．ただし，変形勾配テンソル成分は $e_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ で与えられる．

$$\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j = -p - \frac{2}{3}\mu\text{div}\mathbf{v} + 2\mu e_{ij}n_i n_j \quad (3.16)$$

$$\sigma_t = 2\mu e_{ij}t_i n_j \quad (3.17)$$

次に，理想流体の場合には，粘性せん断応力が働かず圧縮性もないので，構成式は以下ようになる．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3.18)$$

従って，法線方向と接線方向成分は以下のように簡潔な形で与えられる．

$$\sigma_n = -p \quad (3.19)$$

$$\sigma_t = 0 \quad (3.20)$$

以上の式から見ると，理想流体の場合にはオープン境界面にかかる圧力が分かれば，自然境界条件（応力境界条件）の設定は簡単であるが，粘性流体の場合には，特に複雑な流れ問題に対して，応力の法線方向成分 σ_n と接線方向成分 σ_t の設定は困難である．従って，本研究では人工心臓を解析する際に，応力境界条件は理想流体の式を便宜的に用いる．

3.4.2 流量指定のオープン境界面

もし流入口，流出口の形状が円管で，そこを通過する流量が分かる場合には，次の流量指定の境界条件が適用される．

理想流体の場合，流速分布は管内で断面方向に一様であるから，流量値より容易に流速が計算できる．ただし， A は出口（入口）断面の面積， Q は体積流量である．

$$v_n = Q/A \quad (3.21)$$

次に，接線方向の滑り条件は，以下のようなになる．

$$\sigma_t = 0 \quad (3.22)$$

次に粘性流体の場合，流速分布は断面方向に一様とはならない．しかし，一般に粘性流体の円管内部流は，その理論解，すなわちハーゲン・ポワズイユ流れとすることにより，流量値より流速分布が計算される．

$$\int_A v_n \, dA = Q \quad (3.23)$$

次に，管壁面での接線方向の近似流速条件は，以下の固着条件とする．

$$v_t = 0 \quad (3.24)$$

第4章 ALE有限要素法におけるメッシュの制御方法

4.1 緒言

人工心臓のダイアフラムの構造座屈によって、流体の解析領域の時間変動問題が引き起こされる。このように、構造の変形が無視できない流体・構造連成問題においては、特に流体領域のメッシュ制御が重要となる。本研究で適用する ALE 法すなわち参照座標系によって定式化された有限要素解析手法は、時々刻々の解析過程でメッシュの任意的な移動をさせることが可能であるという点である。これを有効に利用するために、適切なメッシュ制御方法を確立することが重要となる。そこで、一般的にメッシュ制御を行う際に重要となる点は、以下の3つが挙げられる。

1. 変動する解析領域の境界面を、メッシュの移動によって正しく追跡できる。
2. 最大限にメッシュの歪みを回避することができる。
3. メッシュの速度と変位との関係は、支配方程式の中で要求される節点の移動関係を満足する。

本章では、ALE 有限要素法に適用するメッシュ制御方法について論じる。特に、メッシュ制御の3つのポイントを満足するよう、Total submerged 流体・構造連成問題のメッシュ制御方法を適用した。さらに、内部メッシュの空間的分布の適切な制御を実現するために、拡散理論による制御方法 (Laplace 方程式)、または弾性体理論による制御方法 (Cauchy の運動法則) を適用する。解析結果から、弾性体理論のほうがより良いメッシュ制御を実現することが可能であることが分かった。また、メッシュ制御式は、動的な時間積分法のアルゴリズム (PMA 法、Newmark- β 法) の中に組み込まれるが、時間ステップ間の構造の変形は微小との仮定のもとに弱連成化した。しかし、この仮定は PMA 法を採用する際、その予測値の精度に限りなく依存する。

4.2 Total submerged 流体・構造連成問題のメッシュ制御

Total submerged 流体・構造連成問題においては、解析過程で変形する構造の全領域は流体・構造連成境界面になる。つまり、流体質点に接触する構造の節点しか存在しない。これに対して、*Partial submerged* 流体・構造連成問題においては、解析過程で変形する構造の一部が流体・構造連成境界面となり、それ以外の部分は流体節点に接触しない。

本研究の人工心臓の解析は，解析領域として有限長さの流入口管と流出口管を設けることにより，粘性流体の人工心臓内部の流れ問題になる．すなわち，人工心臓のダイアフラムは流体と全境界面で接しているため，その分類は Total submerged 流体・構造連成問題となる．本節では，メッシュ制御の3つのポイントを満足し，動的な時間積分法である PMA 法を用いた Total submerged 流体・構造連成問題のメッシュ制御法を示す．

4.2.1 Total submerged 流体・構造連成問題の境界面でのメッシュ制御

Total submerged な流体・構造連成問題においては，その境界面は固定壁に接する領域，流出入口，並びに流体・構造連成境界面からなる．固定壁に接する境界面，および流出入口のメッシュ制御は，単に壁面への固着制御で与える．

$$\hat{v} = 0 \quad (4.1)$$

ただし， \hat{v} はメッシュ(節点)の速度ベクトルである．また構造(ダイアフラム)との連成境界面でのメッシュ制御は，構造の物質点に固着させて行なう(構造への固着制御)．

$$\hat{v} = v^s \quad (4.2)$$

ここで， v^s は連成境界面での構造の速度ベクトルである．以上の境界面のメッシュ制御法を適用すると，境界面でのメッシュ移動が流体・構造連成数値計算アルゴリズムの解析結果から直接決定される(ただし，弱連成)．

4.2.2 Total submerged 流体・構造連成解析の領域内部のメッシュ制御アルゴリズム

流体・構造連成境界面のメッシュ移動量から，流体領域内部のメッシュ移動量を算出し(後述)，動的な時間積分法である PMA 法 (Huerta, A. and Liu, W. K. 1988 [2]) のアルゴリズムを用いて，内部メッシュ節点の制御と更新を行う．この制御方法は，各増分ステップの始めに内部メッシュの節点の変位，速度，並びに加速度を予測して，そのあとは Newmark- β 法と同様なアルゴリズムとなる．その利点は，各増分ステップで初回のメッシュ制御方程式を解くことが省略される点であり，欠点は数値誤差によってメッシュのゆがみが発生する可能性が大きくなるという点である．以下で，弱連成メッシュ制御の PMA アルゴリズムを示す．

1. 内部節点の変位，速度，加速度ベクトルの予測値を出す．

$${}^{t+\Delta t}\hat{U}_i^{(0)} = {}^t\hat{U}_i + \Delta t {}^t\hat{V}_i + \Delta t^2(0.5 - \beta) {}^t\hat{V}_i^* \quad (4.3)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{V}_i^{(0)} = {}^t\hat{V}_i + \Delta t(1 - \gamma) {}^t\hat{V}_i^* \quad (4.4)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{V}_i^{*(0)} = 0 \quad (4.5)$$

2. 流体・構造連成系の反復解析結果から，連成境界面の変位ベクトル $\Delta\hat{U}_b$ が求まり，それから内部メッシュ節点の変位ベクトル増分量を求める．

$$\Delta\hat{U}_i = - \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{ii}^{(k)} \right)^{-1} \cdot \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{ib}^{(k)} \right) \Delta\hat{U}_b \quad (4.6)$$

ただし，ここでマトリックス ${}^t \mathbf{K}$ は時刻 t のメッシュ配置におけるメッシュ制御マトリクスであり，後述する拡散理論もしくは弾性理論によるメッシュ制御マトリクスを用いる．また添字 ii と ib における i は内部 (inside) のメッシュ節点に対応することを示し， b は境界 (boundary) のメッシュ節点に対応することを示す．さらに，添字 (k) は第 k 回目 ($k = 0, 1, 2, \dots$) の反復番号を表す．

3. Newmark- β 法の時間積分関係式より，内部メッシュ節点の速度ベクトルと加速度ベクトルの増分量を求める．

$$\Delta\hat{V}_i^{(k)} = \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \Delta\hat{U}_i^{(k)} \quad (4.7)$$

$$\Delta\hat{V}_i^{*(k)} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \Delta\hat{U}_i^{(k)} \quad (4.8)$$

4. 内部メッシュ節点の変位ベクトル，速度ベクトル，並びに加速度ベクトルを修正する．

$${}^{t+\Delta t} \hat{U}_i^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t} \hat{U}_i^{(k)} + \Delta\hat{U}_i \quad (4.9)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{V}_i^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t} \hat{V}_i^{(k)} + \Delta\hat{V}_i \quad (4.10)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{V}_i^{*(k+1)} = {}^{t+\Delta t} \hat{V}_i^{*(k)} + \Delta\hat{V}_i^* \quad (4.11)$$

4.3 内部メッシュ制御理論

前節では，流体・構造境界メッシュ節点から内部メッシュ節点の変位増分量を求める式 (4.6) をあらかじめ記述したが，本節でその内部メッシュ制御マトリクス \mathbf{K} を導出する理論と，具体的なマトリクス成分を導出する．それは，拡散理論 (Bathe, K. J. 1996 [?]) によるものと，弾性体理論によるものからなる．また，そのマトリクスの性質が，大幅にメッシュの歪み度，すなわちメッシュ制御の性能に反映する．

4.3.1 拡散理論による内部メッシュ制御

拡散理論によるメッシュ制御は，その支配方程式に Laplace 方程式を用いる．これを流体力学に置き換えて物理的に解釈すると，理想流体のポテンシャル流れに相当する．したがって，流体・構造境界面のメッシュ移動量 (弱連成化するので既知) を境界条件としたポテンシャル流れによって，内部のメッシュ移動量が制御，並びに決定される理論となる．

Laplace 方程式とその弱形式

Laplace 方程式は以下のように与えられる。ただし， ψ は領域 R_x 内部のスカラー量とする。

$$\psi_{,ii} = 0 \quad \text{in } R_x \quad (4.12)$$

境界条件としては，基本境界条件と自然境界条件からなる。ただし， Γ_1 は基本境界， Γ_2 自然境界である。

$$\psi = \bar{\psi} \quad \text{in } \Gamma_1 \quad (4.13)$$

$$\psi_{,n} = \bar{h}_i \quad \text{in } \Gamma_2 \quad (4.14)$$

次に，Laplace 方程式を重み付き残差法で弱形式化する。基本境界 Γ_1 で $\delta\psi = 0$ を満たす重み関数 $\delta\psi$ を導入して，領域 R_x で積分すると，以下ようになる。

$$\int_{R_x} \psi_{,ii} \delta\psi \, dR_x = 0 \quad (4.15)$$

これに部分積分を実行して展開すれば，

$$\int_{R_x} (\psi_{,i} \delta\psi)_{,i} \, dR_x - \int_{R_x} \psi_{,i} \delta\psi_{,i} \, dR_x = 0 \quad (4.16)$$

となる。また，左辺第 1 項に Gauss の発散定理を適用すれば，以下ようになる。

$$\int_{R_x} (\psi_{,i} \delta\psi)_{,i} \, dR_x = \int_{\partial R_x} \psi_{,n} \delta\psi \, dS_x \quad (4.17)$$

以上より，Laplace 方程式の弱形式が得られる。

$$\int_{R_x} \psi_{,i} \delta\psi_{,i} \, dR_x = \int_{\partial R_x} \psi_{,n} \delta\psi \, dS_x \quad (4.18)$$

拡散メッシュ制御マトリクスの導出

次に，拡散理論によるメッシュ制御マトリクスを導出する。メッシュ制御においては，自然境界条件を与えないから，Laplace 方程式 (4.18) の右辺はゼロとなる。

$$\int_{R_x} \psi_{,i} \delta\psi_{,i} \, dR_x = 0 \quad (4.19)$$

また，空間的な各方向の変位 (又は速度) は成分ごとに見ればスカラー値であるから，それぞれ独立に Laplace 方程式 (4.19) を適用することにより，内部メッシュ節点の移動が制御可能となる。従って，

$$\mathbf{u}_i = N_a u_a^{(i)} \quad (4.20)$$

この変位成分の補間式を Laplace 方程式の弱形式 (4.19) に代入すれば，拡散理論によるメッシュ制御マトリクス K が得られる．

$$K \cdot U = 0 \quad (4.21)$$

ただし，

K : Laplace 方程式の弱形式から作られる拡散メッシュ制御マトリクス．
 U : メッシュ節点の変位 (又は速度) ベクトル．

ここで，拡散メッシュ制御マトリクス K の成分は，以下のとおりである．

$$K = \sum_e K^e, \quad K^e = [K_{IJ}^e] \quad (4.22)$$

$$K_{IJ}^e = \int_{R_x^e} \delta_{ij} \frac{\partial N_a}{\partial dx_k} \frac{\partial N_b}{\partial dx_k} dR_x \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} I = (a - 1) \times \text{NSD} + i, & 1 \leq a \leq \text{NEN} \\ J = (b - 1) \times \text{NSD} + j, & 1 \leq b \leq \text{NEN} \end{cases}$$

ただし，NSD は空間の次元数，NEN は要素の節点数とする．

以上より，拡散メッシュ制御マトリクス式 (4.21) を，Total submerged 流体・構造連成解析のメッシュ制御に適用する場合，節点の変位 (又は速度) ベクトルを流体・構造境界面での既知部分と領域内部の未知部分に分けて，その要素ブロックを境界メッシュ節点から内部メッシュ節点の変位増分量を求める式 (4.6) に用いる．

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{Bmatrix} U_i \\ \bar{U}_b \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

4.3.2 弾性体理論による内部メッシュ制御

弾性体理論によるメッシュ制御は，その支配方程式に Cauchy の運動法則を用いる．これを弾性力学に置き換えて物理的に解釈すると，線形等方弾性体の弾性変形に相当する．したがって，流体・構造境界面のメッシュ移動量 (弱連成化するので既知) を境界条件とした線形等方弾性体の弾性変形によって，内部のメッシュ移動量が制御，並びに決定される理論となる．

Cauchy の運動法則とその弱形式

静的な Cauchy の運動法則は以下のように与えられる．ただし， σ_{ij} は Cauchy 応力テンソル成分， f_i は単位体積あたりの体積力である．

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (4.25)$$

境界条件としては，幾何学的境界条件と力学的境界条件からなる．ただし， S_u は幾何学的境界， S_σ は力学的境界である．

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{in } S_u \quad (4.26)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{h}_i \quad \text{in } S_\sigma \quad (4.27)$$

次に，Cauchy の運動法則を重み付き残差法で弱形式化する．幾何学的境界 S_u で $\delta \mathbf{u} = 0$ を満たす重み関数 $\delta \mathbf{u}$ を導入して，領域 R_x で積分すると，以下ようになる．

$$\int_{R_x} (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i \, dR_x = 0 \quad (4.28)$$

これに部分積分を実行して展開すれば，

$$\int_{R_x} \{(\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij}\delta u_{i,j}\} \, dR_x + \int_{R_x} f_i \delta u_i \, dR_x = 0 \quad (4.29)$$

となる．また，左辺第 1 項に Gauss の発散定理を適用すれば，以下ようになる．

$$\int_{R_x} (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j} \, dR_x = \int_{\partial R_x} \sigma_{ij}n_j \delta u_i \, dS_x \quad (4.30)$$

上式に力学的境界条件を適用して整理すれば，Cauchy の運動法則の弱形式が得られる．

$$\int_{\partial R_x} \bar{h}_i \delta u_i \, dS_x + \int_{R_x} f_i \delta u_i \, dR_x = \int_{R_x} \sigma_{ij}\delta u_{i,j} \, dR_x \quad (4.31)$$

弾性体メッシュ制御マトリクス of 導出 (Lame 定数を使う場合)

次に，Lame 定数を用いて弾性体理論によるメッシュ制御マトリクスを導出する．メッシュ制御においては，力学的境界条件と体積力は与えないから，Cauchy の運動法則 (4.31) の左辺第 1 項と第 2 項はゼロとなる．メッシュ制御の問題においては，自然境界条件と体積力を与えないため，左辺第 1 項，第 2 項 = 0 となる．

$$\int_{R_x} \sigma_{ij}\delta u_{i,j} \, dR_x = 0 \quad (4.32)$$

上式を，Green–Lagrange 歪テンソル成分の線形部分を用いて書き直せば，以下ようになる．

$$\int_{R_x} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}) \, dR_x = 0 \quad (4.33)$$

すなわち，歪テンソル成分は以下のように表される．

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.34)$$

次に，応力の構成式としては，Hooke の法則に相当する線形等方弾性体を用い，Lame 定数 λ, μ を導入して以下のように表される (Johnson, A. A. and Tezduyar, T. E. 1994 [?]) .

$$\sigma_{ij} = \lambda(\text{tr } \varepsilon_{ij})\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (4.35)$$

従って，構成式 (4.35) と歪みテンソルの定義式 (4.34) を利用して，Cauchy の運動法則の弱形式 (4.33) に形式的な式変形を施せば，以下のようにになる．

$$\int_{R_x} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} u_{k,k} \delta u_{i,i} + (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta u_{i,j} \right\} \, dR_x = 0 \quad (4.36)$$

また，解析領域での任意点の変位 (又は速度) のベクトル \mathbf{u}_i は，以下のように補間される．

$$\mathbf{u}_i = N_a u_a^{(i)} \quad (4.37)$$

この変位成分の補間式を Cauchy の運動法則の弱形式 (4.36) に代入すれば，弾性体理論によるメッシュ制御マトリクス \mathbf{K} が得られる．

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.38)$$

ただし，

\mathbf{K} : Cauchy の運動法則の弱形式から作られる弾性体メッシュ制御マトリクス .

\mathbf{U} : メッシュ節点の変位 (又は速度) ベクトル .

ここで，弾性体メッシュ制御マトリクス \mathbf{K} の成分は，以下のとおりである．

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{K}^e = [\mathbf{K}_{IJ}^e] \quad (4.39)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^e = \int_{R_x^e} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} N_{a,i} N_{b,j} + (\delta_{ij} N_{a,k} N_{b,k} + N_{a,j} N_{b,i}) \right\} \, dR_x \quad (4.40)$$

$$\begin{cases} I = (a - 1) \times \text{NSD} + i, & 1 \leq a \leq \text{NEN} \\ J = (b - 1) \times \text{NSD} + j, & 1 \leq b \leq \text{NEN} \end{cases}$$

またこれより，線形等方弾性体理論によるメッシュ制御を適用する場合は，体積力と表面力を想定しないので，弾性体メッシュ制御マトリクスの中で独立な材料定数は $\frac{\lambda}{\mu}$ 1つになる．

以上より，弾性体メッシュ制御マトリクス式 (4.38) を，Total submerged 流体・構造連成解析のメッシュ制御に適用する場合，節点の変位 (又は速度) ベクトルを流体・構造境界面での既知部分と領域内部の未知部分に分けて，その要素ブロックを境界メッシュ節点から内部メッシュ節点の変位増分量を求める式 (4.6) に用いる．

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \bar{\mathbf{U}}_b \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

弾性体メッシュ制御マトリクスの導出 (Young 率と Poisson 比を使う場合)

弾性体メッシュ制御マトリクスの材料定数として，縦弾性係数 (Young 率) E と Poisson 比 ν を用いる場合を解説する．

ここで各種材料定数，すなわち Lamé 定数 λ, μ ，縦弾性係数 E ，横弾性係数 G ，Poisson 比 ν の間に成り立つ一般的な関係式は，以下の通りである．

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad (4.42)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu} \quad (4.43)$$

従って，これらの関係式により，独立な材料定数 $\frac{\lambda}{\mu}$ を算出すればよい．

第5章 流体・構造連成方程式の生成と動的な解析手法

5.1 緒言

以上の章で，流体並びに構造の支配方程式が導出された．そこで本章では，流体と構造の連成問題を，強連成として解析するための支配方程式を生成する．さらに，動的な時間積分法として，構造解析の分野で広く使われている *Newmark- β* 法と，流体解析の分野で広く使われている *PMA* 法 (*Predictor-Multicorrector-Algorithm*，予測子・多重修正子法 (Huerta, A. and Liu, W. K. 1988 [?]) を示す．そのアルゴリズム中で，メッシュ制御式は弱連成化されている．

5.2 流体・構造強連成方程式の生成

5.2.1 流体の支配マトリクス方程式の増分形式

微圧縮性 ALE 連続の式 (2.34) と ALE Navier-Stokes の方程式 (2.35) より，流体解析の支配方程式のマトリクス形式は，以下のように導かれた．

$$M_f \dot{\varphi} + C_f \varphi = F_f \quad (2.36)$$

次に，割線法 (*Secant method*) によって動的な時間積分を進めるために，このマトリクス方程式をそのまま増分形式にする．従って，時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ までの増分形式は，以下ようになる．

$${}^t M^f \Delta \varphi^* + {}^t C^f \Delta \varphi^f = {}^{t+\Delta t} F^f - {}^t Q^f \quad (5.1)$$

ただし， ${}^t M^f$ と ${}^t C^f$ は時刻 t での割線マトリックスとし， ${}^{t+\Delta t} F^f$ は時刻 $t + \Delta t$ での外力等価節点力ベクトルである．また， ${}^t Q^f$ は時刻 t での流体の内力等価節点力ベクトルである (すなわち，時刻 t における収束解)．

$${}^t Q^f = {}^t M^f \dot{\varphi}^* + {}^t C^f \varphi^f \quad (5.2)$$

また，記号 * は参照時間導関数を意味する．なお，節点変数ベクトル φ^f は次のように定義される．

$$\varphi^f = \begin{Bmatrix} P \\ V^f \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

5.2.2 流体の支配マトリクス方程式の強連成解析に対応した分割

流体・構造連成問題の解析では，流体と構造の境界面で一部の自由度が共有される．そこで，流体の節点変数ベクトル φ^f を以下のように並び替える．

$$\varphi^f = \begin{Bmatrix} P \\ V_i^f \\ V_c^f \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

ここで， V_i^f は構造とは独立な流体節点の速度ベクトル (非連成部)， V_c^f は流体と構造に共有な節点の速度ベクトルである (連成部)．このように速度ベクトルを並び替えれば，流体解析の各マトリクスは以下のように分割される．

$$\begin{aligned} {}^t M_t^f &= \begin{bmatrix} {}^t M^P & & \\ & {}^t M_{ii}^f & {}^t M_{ic}^f \\ & {}^t M_{ci}^f & {}^t M_{cc}^f \end{bmatrix}, \quad {}^t C_t^f = \begin{bmatrix} \Lambda^P & G_i^T & G_c^T \\ -G_i & \Lambda_{ii} + K_{\mu ii} & \Lambda_{ic} + K_{\mu ic} \\ -G_c & \Lambda_{ci} + K_{\mu ci} & \Lambda_{cc} + K_{\mu cc} \end{bmatrix} \\ {}^{t+\Delta t} F^f &= \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^{t+\Delta t} F_i^f \\ {}^{t+\Delta t} F_c^f \end{Bmatrix}, \quad {}^t Q^f = \begin{Bmatrix} 0 \\ {}^t Q_i^f \\ {}^t Q_c^f \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで，マトリクスの添字 ii と添字 ic における i は非連成部 (independent part) の自由度に対応することを示し， c は流体・構造連成部 (coupling part) の自由度に対応することを示す．

5.2.3 構造の支配マトリクス方程式の強連成解析に対応した分割

Cauchy の運動法則より，構造解析の支配方程式のマトリクス形式の増分形式 (??) は，以下のように導かれた．ただし，このマトリクス方程式は接線マトリクスであるから，その動的な時間積分法は接線法 (*Tangent method*) となる．

$${}^t M^s \Delta \dot{\varphi}^s + {}^t (K_L + K_{NL}) \Delta U^s = {}^{t+\Delta t} F^s - {}^t Q^s \quad (5.6)$$

次に流体と同様にして，以下のように構造の節点変数ベクトルも並び替える．

$$\varphi^s = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_c^s \\ \mathbf{V}_i^s \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}^s = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_c^s \\ \mathbf{U}_i^s \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

ここで， \mathbf{V}_i^s は流体とは独立な構造節点の速度ベクトル（非連成部）， \mathbf{V}_c^s は流体と構造に共有な節点の速度ベクトルである（連成部）．このように速度ベクトルを並び替えれば，構造解析の各マトリクスは以下のように分割される．

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{M}^s &= \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{M}_{cc}^s & {}^t\mathbf{M}_{ci}^s \\ {}^t\mathbf{M}_{ic}^s & {}^t\mathbf{M}_{ii}^s \end{bmatrix} \\ {}^t\mathbf{K}_L &= \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_{Lcc} & {}^t\mathbf{K}_{Lci} \\ {}^t\mathbf{K}_{Lic} & {}^t\mathbf{K}_{Lii} \end{bmatrix}, \quad {}^t\mathbf{K}_{NL} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_{NLcc} & {}^t\mathbf{K}_{NLci} \\ {}^t\mathbf{K}_{NLic} & {}^t\mathbf{K}_{NLii} \end{bmatrix} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s &= \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^s \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^s \end{Bmatrix}, \quad {}^t\mathbf{Q}^s = \begin{Bmatrix} {}^t\mathbf{Q}_c^s \\ {}^t\mathbf{Q}_i^s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.2.4 流体・構造強連成支配マトリクス方程式の生成

流体・構造連成境界面での任意物質質量 f に対して，ALEメッシュ制御によって，流体・構造固着条件 (3.3) が満たされるとすれば，物質時間導関数と参照時間導関数は等しくなり，連成境界面の節点変数ベクトルは，以下のような関係を導入することができる．

$$\mathbf{V}_c^s = \mathbf{V}_c^f \equiv \mathbf{V}_c, \quad \dot{\mathbf{V}}_c^s = \dot{\mathbf{V}}_c^{*f} \equiv \dot{\mathbf{V}}_c^* \quad (5.9)$$

$$\varphi^s = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_c^s \\ \mathbf{V}_i^s \end{Bmatrix} = \mathbf{U}^{*s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_c^{*s} \\ \mathbf{U}_i^{*s} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_c^* \\ \mathbf{U}_i^{*s} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

以上の連成境界面における連続条件式を適用すれば，以下のように流体・構造強連成の全節点変数ベクトルが定義できる．

$$\varphi^{fs} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{V}_i^f \\ \mathbf{V}_c \\ \mathbf{V}_i^s \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}^s = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_c \\ \mathbf{U}_i^s \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

従って，流体のマトリクス方程式 (5.1) と構造のマトリクス方程式 (5.6) に，以上の節点変数ベクトルの並び替え操作と結合操作を施せば，流体・構造強連成支配方程式のマトリクス形式が得られる．以下の式が，流体・構造連成解析に用いる最終的な支配方程式となる．

$${}^t\mathbf{M}^{fs} \Delta \varphi^{*fs} + {}^t\mathbf{C}^f \Delta \varphi^{fs} + {}^t\mathbf{K}^s \Delta \mathbf{U}^s = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}^{fs} \quad (5.12)$$

ここで、各マトリクスの成分と、物理的解釈は以下の通りである。

1. 時刻 t における強連成実質量マトリクス ${}^tM^{fs}$.

$${}^tM^{fs} = \begin{bmatrix} {}^tM^P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^tM_{ii}^f & {}^tM_{ic}^f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^tM_{ci}^f & {}^tM_{cc}^f + {}^tM_{cc}^s & {}^tM_{ci}^s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^tM_{ic}^s & {}^tM_{ii}^s \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

2. 時刻 t における流体の移流，粘性散逸，発散の強連成マトリクス ${}^tC^f$.

$${}^tC^f = \begin{bmatrix} \Lambda^P & \mathbf{G}_i^T & \mathbf{G}_c^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_i & \Lambda_{ii} + \mathbf{K}_{\mu ii} & \Lambda_{ic} + \mathbf{K}_{\mu ic} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_c & \Lambda_{ci} + \mathbf{K}_{\mu ci} & \Lambda_{cc} + \mathbf{K}_{\mu cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

3. 時刻 t における構造の強連成接線剛性マトリクス ${}^tK^s$.

$${}^tK^s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^tK_{Lcc} + {}^tK_{NLcc} & {}^tK_{Lci} + {}^tK_{NLci} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^tK_{Lic} + {}^tK_{NLic} & {}^tK_{Lii} + {}^tK_{NLii} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

4. 時刻 t における内力等価節点力ベクトル ${}^tQ^{fs}$ と，時刻 $t + \Delta t$ における外力等価節点力ベクトル ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$.

$${}^tQ^{fs} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^tQ_i^f \\ {}^tQ_c^f + {}^tQ_c^s \\ {}^tQ_i^s \end{Bmatrix}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{fs} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^f \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^s \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

5.3 動的な時間積分法と数値解析アルゴリズム

本節で、流体・構造強連成支配マトリクス方程式 (5.12) の動的な解析手法として用いた、Newmark- β 法と PMA 法、並びにそのアルゴリズムの解説を行う。

5.3.1 Newmark- β 法

Newmark- β 法の基礎式

Newmark- β 法 (Bathe, K. J. 1996 ^[2]) は, 構造解析における動的な時間積分法として広く用いられている. これは, 時間増分 Δt 間の加速度が線形的に変化するものと仮定した線形化速度法を, 2つのパラメータ β, γ を導入して拡張したものである. すなわち, 解析済み時刻 t での変位, 速度, 加速度と, 増分後の時刻 $t + \Delta t$ での変位, 速度, 加速度との間に, 以下のような関係式を仮定する.

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t \left[\gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (5.17)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \right\} \quad (5.18)$$

この関係式を用いて, 反復解析過程の未知変数を加速度増分ベクトル $\Delta\ddot{\mathbf{U}}$ のみに減じて数値計算を実行する.

具体的に示せば, 速度増分ベクトル式 (5.17) から, 時間増分ステップ t から $t + \Delta t$ 間の反復第 1 回目 ($i = 1$) の式が, 以下のように誘導される.

$$\Delta^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(1)} = \Delta t \left[{}^t\ddot{\mathbf{U}} + \gamma(\Delta^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(1)}) \right] \quad (i = 1) \quad (5.19)$$

また, $\Delta^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(1)}, \Delta^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(1)}$ の定義式は以下の通りである.

$$\Delta^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(1)} = {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(1)} - {}^t\dot{\mathbf{U}} \quad (5.20)$$

$$\Delta^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(1)} = {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(1)} - {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (5.21)$$

さらに, 反復第 2 回目以降 ($i \geq 2$) に関しては, 次式が成立する.

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(i-1)} - {}^t\dot{\mathbf{U}} = \Delta t \left[\gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)} + (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (5.22)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(i)} - {}^t\dot{\mathbf{U}} = \Delta t \left[\gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} + (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (5.23)$$

従って, 以下の $i \geq 2$ の場合の加速度と速度の増分量の定義式,

$$\Delta^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(i-1)} \quad (5.24)$$

$$\Delta^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)} \quad (5.25)$$

を導入して式 (5.23) と式 (5.22) の差を取ると, 次の速度増分量ベクトルを求める式が得られる.

$$\Delta^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(i)} = \Delta t \gamma \Delta^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i)} \quad (i \geq 2) \quad (5.26)$$

全く同様な計算を，変位増分ベクトル式 (5.18) に関しても行えば，以下の変位増分量ベクトルを求める式が得られる．

$$\Delta^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(1)} = \Delta t \dot{\mathbf{U}} + \Delta t^2 \left\{ \beta \Delta^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(1)} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{U}} \right\} \quad (i = 1) \quad (5.27)$$

$$\Delta^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = \Delta t^2 \beta \Delta^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(i)} \quad (i \geq 2) \quad (5.28)$$

Newmark- β 法による強連成解析アルゴリズム

以下で，Newmark- β 法による強連成解析アルゴリズムを示す．収束解が得られるまで，この計算ループを繰り返す．

1. 流体・構造の強連成解を求める：時間増分ステップ t から $t + \Delta t$ までの反復第 1 回目 ($i = 1$) での計算式は，

$$\begin{aligned} & \left[{}^t\mathbf{M}^{fs} + {}^t\mathbf{C}^f \Delta t \gamma + {}^t\mathbf{K}^s \Delta t^2 \beta \right] \Delta \varphi^{*fs} \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}^{fs} - ({}^t\mathbf{K}^s \Delta t {}^t\mathbf{U}^* + {}^t\mathbf{K}^s \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\mathbf{U}^{**}) - {}^t\mathbf{C}^f \Delta t {}^t\dot{\varphi}^{*fs} \end{aligned} \quad (5.29)$$

であり，反復第 2 回目以降 ($i \geq 1$) の場合は，以下のようになる．

$$\begin{aligned} & \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^{fs(i-1)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{f(i-1)} \Delta t \gamma + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{s(i-1)} \Delta t^2 \beta \right] \Delta \varphi^{*fs(i-1)} \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^{fs(i-1)} \end{aligned} \quad (5.30)$$

2. 節点変数ベクトルを修正する：反復第 1 回目 ($i = 1$) の場合の増分量は，

$$\Delta^{t+\Delta t}\varphi^{(1)} = \Delta t \left[{}^t\dot{\varphi}^* + \gamma \Delta {}^{t+\Delta t}\dot{\varphi}^{*(1)} \right] \quad (i = 1) \quad (5.31)$$

$$\Delta^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(1)} = \Delta t {}^t\mathbf{U}^{*s} + \Delta t^2 \left\{ \beta \Delta^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{**s(1)} + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{U}^{**s} \right\} \quad (i = 1) \quad (5.32)$$

となり，反復第 2 回目以降 ($i \geq 1$) の場合の増分量は，以下のようになる．

$$\Delta^{t+\Delta t}\varphi^{(i)} = \Delta t \gamma \Delta^{t+\Delta t} \dot{\varphi}^{*(i)} \quad (i \geq 2) \quad (5.33)$$

$$\Delta^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(i)} = \Delta t^2 \beta \Delta^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{**s(i)} \quad (i \geq 2) \quad (5.34)$$

従って、節点変数ベクトルは以下のように修正される。

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(i)} + \Delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(i)} \quad (5.35)$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \Delta {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{(i)} \quad (5.36)$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{*(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{*(i)} + \Delta {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{*(i)} \quad (5.37)$$

3. メッシュ配置を修正，更新する：連成境界面を幾何学的境界条件とした ALE メッシュ制御により，流体領域のメッシュを更新する。

5.3.2 PMA 法 (予測子・多重修正子法)

PMA 法は，流体解析における動的な時間積分法として広く用いられている。これは，Newmark- β 法による解析アルゴリズムにおいて，加速度増分ベクトルを 0 とした速度増分ベクトル，変位増分ベクトルの値を，反復ループの初期値 (予測値) として用い，初回の支配方程式を解くことを省略した計算アルゴリズムである。以下に，その具体的なアルゴリズムを示す。

1. 節点変数ベクトルの予測値を出す：流体・構造強連成支配マトリクス方程式を解かず，加速度増分ベクトルを 0 とした予測値を出す。

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(0)} = {}^t\mathbf{U}^s + \Delta t {}^t\mathbf{V}^s + \Delta t^2(0.5 - \beta) {}^t\mathbf{V}^{*s} \quad (5.38)$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{(0)} = {}^t\boldsymbol{\varphi} + \Delta t(1 - \gamma) {}^t\boldsymbol{\varphi}^* \quad (5.39)$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{*(0)} = \mathbf{0} \quad (5.40)$$

ただし，

$$\mathbf{V}^s = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_c \\ \mathbf{V}_i^s \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

2. ALE メッシュの予測値を出す：節点変数ベクトルの予測値より，ALE メッシュの予測値を出す。
3. 反復番号 i を 0 にリセットする。
4. 流体・構造強連成支配方程式の解を求める。

$$\mathbf{M}^* \Delta \boldsymbol{\varphi}^{*(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i)} \quad (5.42)$$

ただし, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i)}$ は時刻 $t + \Delta t$ での解を求める際の, 第 i 回目の反復解析における残差ベクトルである. また, 一般化質量マトリクス \mathbf{M}^* は次式で与えられる.

$$\mathbf{M}^* = {}^{t+\Delta t}\mathbf{M}_{fs}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_f^{(i)} \Delta t \gamma + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_s^{(i)} \Delta t^2 \beta \quad (5.43)$$

5. 節点変数ベクトルを修正する.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{s(i)} + \Delta \mathbf{V}^{*s(i)} \Delta t^2 \beta \quad (5.44)$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{(i)} + \Delta \boldsymbol{\varphi}^{*(i)} \Delta t \gamma \quad (5.45)$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{*(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varphi}^{*(i)} + \Delta \boldsymbol{\varphi}^{*(i)} \quad (5.46)$$

6. ALE メッシュを修正する: 節点変数ベクトルの修正値より, ALE メッシュの修正値を出す.

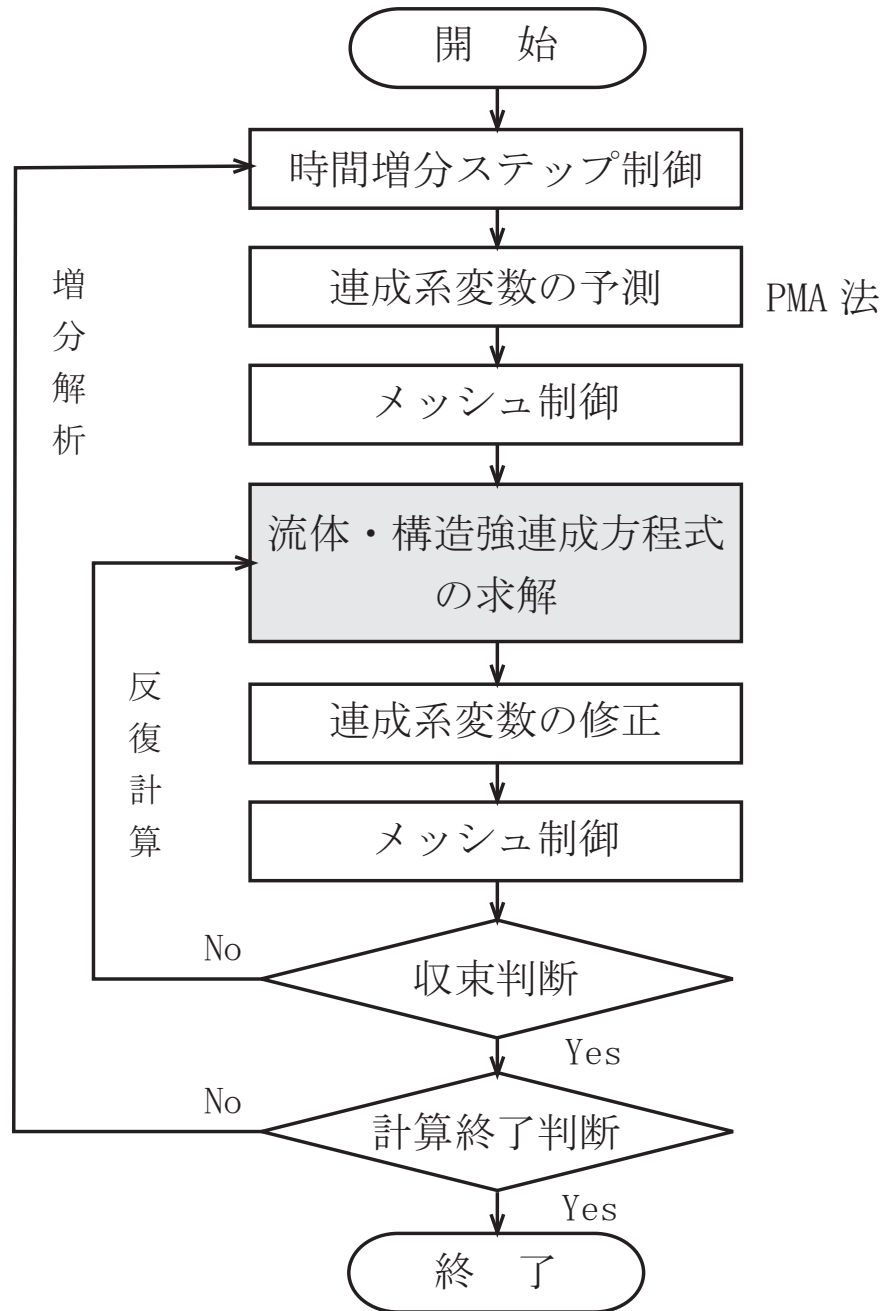


図 5.1: 流体・構造連成系の解析のアルゴリズム