

第II部

相対論的量子力学

電子のスピンを議論するためにはどうしても相対論的效果の議論が必須である。以下の数節でそれを行おう。

4 特殊相対論 (古典論)

まず相対論の古典論の復習から始めよう。以下次の記法を用いよう。

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

またいわゆる特殊相対論における計量テンソル (後述) として

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ g^{\mu\nu} &= g^{\nu\mu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} &= \delta_\mu^\rho \end{aligned}$$

をとり添え字の上げ下げを

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu$$

などとして行う。これより

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

また一般に

$$a_0 = a^0, a_1 = -a^1, a_2 = -a^2, a_3 = -a^3$$

これらの記法により

$$a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

また

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

として

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = -\square$$

4.1 ローレンツ変換

ここでローレンツ変換とはノルム $|x|^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ を保存する実の線形変換 (座標変換) を指す。(時空間に固定された点を異なる座標系で計った時の座標を $x^\mu, x'^{\mu'}$ などとして)

$$\begin{aligned} x'^{\mu'} &= \Omega^{\mu'}_{\nu} x^\nu \\ (\Omega^{\mu'}_{\nu})^* &= \Omega^{\mu'}_{\nu} \\ |x'|^2 &= |x|^2 \\ g'_{\mu'\nu'} x'^{\mu'} x'^{\nu'} &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ g'_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \end{aligned}$$

これから以下の条件が導ける。^{78 79 80}

$$\begin{aligned} g_{\lambda\kappa} &= g'_{\mu'\nu'} \Omega^{\mu'}_{\lambda} \Omega^{\nu'}_{\kappa} \\ \delta_{\kappa}^{\rho} &= g_{\kappa}^{\rho} = \Omega^{\mu'\rho} \Omega_{\mu'\kappa} = (\Omega_{\mu'\rho} \Omega^{\mu'\kappa}) \end{aligned}$$

78

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} &= \delta_{\mu}^{\lambda} \\ &= g_{\mu}^{\lambda} \end{aligned}$$

79

$$\begin{aligned} x'^{\mu'} &= \Omega^{\mu'}_{\nu} x^\nu \\ (\Omega^{\mu'}_{\nu})^* &= \Omega^{\mu'}_{\nu} \\ g'_{\mu'\nu'} x'^{\mu'} x'^{\nu'} &= g'_{\mu'\nu'} \Omega^{\mu'}_{\lambda} x^\lambda \Omega^{\nu'}_{\kappa} x^\kappa = g_{\lambda\kappa} x^\lambda x^\kappa \text{ より} \\ g_{\lambda\kappa} &= g'_{\mu'\nu'} \Omega^{\mu'}_{\lambda} \Omega^{\nu'}_{\kappa} \\ \text{さらに } \delta_{\kappa}^{\rho} &= g^{\rho\lambda} g_{\lambda\kappa} \\ &= g^{\rho\lambda} g'_{\mu'\nu'} \Omega^{\mu'}_{\lambda} \Omega^{\nu'}_{\kappa} \\ &= \Omega^{\mu'\rho} \Omega_{\mu'\kappa} \end{aligned}$$

⁸⁰任意の量 X, Y について

$$X^\mu Y_\mu = X_\kappa g^{\kappa\mu} Y^\lambda g_{\lambda\mu} = X_\kappa Y^\lambda g^{\kappa}_{\lambda} = X_\kappa Y^\kappa$$

逆変換は⁸¹

$$x'^{\mu} \Omega_{\mu}^{\kappa} = x^{\kappa}$$

なおつぎの関係式も成立する。⁸²

$$\begin{aligned} \Omega_{\nu\kappa} \Omega^{\rho\kappa} &= \delta_{\nu}^{\rho} \\ &= \Omega_{\nu}^{\kappa} \Omega^{\rho}_{\kappa} = g_{\nu}^{\rho} \end{aligned}$$

これらはあわせて次のように表現できる。⁸³

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1})^{\mu}_{\nu} &= (\Omega)_{\nu}^{\mu} \\ (\Omega^{-1})_{\mu}^{\nu} &= \Omega^{\nu}_{\mu} \\ (\Omega^{-1})_{\mu\nu} &= \Omega^{\nu\mu} \\ (\Omega)_{\mu\nu} &\equiv \Omega_{\mu\nu} \text{ として} \\ \tilde{\Omega} \Omega &= \Omega \tilde{\Omega} = I \end{aligned}$$

81

$$\begin{aligned} x'^{\mu} g_{\mu\rho} &= g_{\rho\mu} \Omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Omega_{\rho\nu} x^{\nu} \\ x'^{\mu} g_{\mu\rho} \Omega^{\rho\kappa} &= \Omega^{\rho\kappa} \Omega_{\rho\nu} x^{\nu} \\ x'^{\mu} \Omega_{\mu}^{\kappa} &= \delta_{\nu}^{\kappa} x^{\nu} = x^{\kappa} \end{aligned}$$

82

$$\begin{aligned} g_{\rho\kappa} x^{\rho} x^{\kappa} &= g_{\rho\kappa} x'^{\nu} \Omega_{\nu}^{\rho} x'^{\mu} \Omega_{\mu}^{\kappa} = g_{\nu\mu} x'^{\nu} x'^{\mu} \\ g_{\rho\kappa} \Omega_{\nu}^{\rho} \Omega_{\mu}^{\kappa} &= \Omega_{\nu\kappa} \Omega_{\mu}^{\kappa} = g_{\nu\mu} \\ \Omega_{\nu\kappa} \Omega^{\rho\kappa} &= g_{\nu\mu} g^{\mu\rho} = \delta_{\nu}^{\rho} \end{aligned}$$

83

$$(\Omega^{-1})^{\mu}_{\nu} = (\Omega)_{\nu}^{\mu}$$

としてみれば

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1})^{\mu}_{\nu} \Omega^{\nu}_{\kappa} &= (\Omega)_{\nu}^{\mu} \Omega^{\nu}_{\kappa} = \delta_{\kappa}^{\mu} \\ \Omega^{\mu}_{\nu} (\Omega^{-1})^{\nu}_{\kappa} &= \Omega^{\mu}_{\nu} \Omega^{\nu}_{\kappa} = \delta_{\kappa}^{\mu} \end{aligned}$$

さらに

$$(\Omega^{-1})_{\mu}^{\nu} = ((\Omega^{-1})^{-1})^{\nu}_{\mu} = \Omega^{\nu}_{\mu}$$

ローレンツ変換の例

- z -軸まわりの ϕ 回転

$$\begin{pmatrix} ct'^0 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- x -軸方向の速度 $v = c \tanh \phi$ の特殊ローレンツ変換⁸⁴

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

テンソル

ある時空 P の物理量 $O(P)$ が座標変換 $x \rightarrow x'$ (ある座標系で $\{x^\mu\}$ と指定される時空の点 $P(\{x^\mu\})$ が異なる座標系 $'$ 系では $P(\{x'^\mu\})$ と指定される。この関係より $x'^\mu = x'^\mu(\{x^\nu\})$ なる関数関係が定まる。)のもとでつぎの変換則に従うとき以下の各々の名前によばれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\nu} &\equiv x'^{\mu'}_{,\nu} = \Omega^{\mu'}_{\nu} \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu'}} &\equiv x^\nu_{,\mu'} = \Omega_{\mu'}^{\nu} \\ x'^{\mu'}_{,\nu} x^\nu_{,\kappa'} &= \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\kappa'}} = \delta^{\mu'}_{\kappa'} \\ x^\mu_{,\nu'} x^{\nu'}_{,\kappa} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\kappa} = \delta^\mu_{\kappa} \end{aligned}$$

- スカラー

$$T' = T$$

⁸⁴これは $x = 0$ として

$$\begin{aligned} t' &= t \cosh \phi, & x' &= -ct \sinh \phi \\ \frac{x'}{t'} &= -c \tanh \phi \end{aligned}$$

これは x' -系が速度 $-c \tanh \phi$ で x -系に対して等速度運動していることを意味する。

- 反変ベクトル

$$T'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\nu} T^\nu = x'^{\mu'}_{,\nu} T^\nu = \Omega^{\mu'}_{\nu} T^\nu$$

- 共変ベクトル

$$T'_{\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu}} T_\nu = \Omega_{\mu}{}^{\nu} T_\nu$$

- 反変 1 階、共変 2 階のテンソル (例)

$$T'^{\mu_1}_{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\kappa_1}} \frac{\partial x^{\rho_2}}{\partial x'^{\kappa_2}} T^{\nu_1}_{\rho_1 \rho_2} = \Omega^{\mu_1}_{\nu_1} \Omega_{\kappa_1}{}^{\rho_1} \Omega_{\kappa_2}{}^{\rho_2} T'^{\nu_1}_{\rho_1 \rho_2}$$

- 例えば 反変ベクトルと共変ベクトルの縮約 $A^\mu B_\mu$ はスカラーである。⁸⁵
- 逆に反変ベクトルとの縮約がスカラーとなるものは共変ベクトルであることも示せる。
- $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルである。⁸⁶

4.2 自由粒子の作用

このとき作用積分として次のものをとろう。

$$S = -mc \int_a^b ds = \int_{t_a}^{t_b} L dt$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$L = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

85

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = \Omega^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \Omega_{\mu}{}^{\kappa} B_{\kappa} = \Omega^{\mu}{}_{\nu} \Omega_{\mu}{}^{\kappa} A^{\nu} B_{\kappa} = g^{\mu\rho} \Omega_{\rho\nu} g_{\mu\eta} \Omega^{\eta\kappa} A^{\nu} B_{\kappa} = \Omega_{\rho\nu} \Omega^{\rho\kappa} A^{\nu} B_{\kappa} = A^{\nu} B_{\nu}$$

86

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} dx^{\rho} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} dx^{\kappa}$$

$$ds^2 = g_{\rho\kappa} dx^{\rho} dx^{\kappa}$$

より $ds = ds'$ から

$$g'_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} = g_{\rho\kappa}$$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\kappa}$$

ローレンツ変換 $x'^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ で ($g' = g$) で線素は不変 $ds = ds'$ であり、これはすなわち作用をローレンツ不変な形にあらわすことができたことを意味する。

非相対論極限では

$$L \rightarrow -mc^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

と定数を除いて運動エネルギーを確かに与える。

運動量は

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv M\vec{v}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

となり M を相対質量とよぼう。さらにハミルトニアン H すなわちエネルギー E は

$$H = E = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$$

$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Mc^2$$

とあたえられ非相対論極限で

$$E \rightarrow mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

となり、静止エネルギー mc^2 が自然にあらわれる。またエネルギーと運動量の間に関係が導かれる。⁸⁷

$$c\vec{p} = \frac{\vec{v}}{c}E$$

$$H = E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

87

$$\vec{p} = \vec{v}\frac{E}{c^2}$$

を使ってエネルギーの式から v を消去すると

$$E^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2c^4$$

$$E^2\left(1 - c^2\frac{p^2}{E^2}\right) = m^2c^4$$

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

特に超相対論的 $v \approx c$ な時⁸⁸ $E \approx cp$ 特に光に対しては

$$E = cp$$

となる。

正準方程式は⁸⁹

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{c^2 \vec{p}}{E} \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = 0\end{aligned}$$

第一式より $\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} = M\vec{v}$ 第2式へこれを代入して

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d(M\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

これが運動方程式となる。

よりローレンツ不変性をあきらかな形で議論すれば変分原理より曲線のパラメータ τ 微分を ' で書いて作用を一般のパラメータ τ で書き直し一般のパラメータに対するラグランジアンをまた L と書き ($S = \int_{\tau_a}^{\tau_b} L d\tau$)⁹⁰

$$\frac{\delta L}{\delta x^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu'}} = -mc \frac{d}{d\tau} \left(\frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu'}}{\sqrt{g_{\rho\kappa} \dot{x}^{\rho'} \dot{x}^{\kappa'}}} \right) = 0$$

88

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{E} &\approx \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c^2} \\ E &\approx cp\end{aligned}$$

89

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = c \frac{2\vec{p}}{2\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \frac{c^2 \vec{p}}{E}$$

90

$$\begin{aligned}L &= -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu'} \dot{x}^{\nu'}} \\ \frac{\delta L}{\delta x^\mu} &= \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu'}} = -mc \frac{d}{d\tau} \left(\frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu'}}{\sqrt{g_{\rho\kappa} \dot{x}^{\rho'} \dot{x}^{\kappa'}}} \right) = 0\end{aligned}$$

ここでパラメター τ を $ds = cd\tau, (x^{\mu'}x_{\mu'} = c^2)$ (固有時と呼ぶ。) ととれば^{91 92}

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = 0$$

これをもって自由粒子と考える。また $\tau = t$ とすれば $\mu = 0$ 成分の関係式は⁹³

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dE}{dt} = 0$$

とエネルギーが保存することを意味し、 $\mu = i = 1, 2, 3$ から運動量の保存⁹⁴

$$\frac{d}{dt} \frac{mc\vec{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{0}$$

⁹¹ここでパラメター τ を $ds = cd\tau, (x^{\mu'}x_{\mu'} = c^2)$ ととれば

$$\begin{aligned} s &= \int_{s_a}^s ds = \int_{\tau_a}^{\tau} \sqrt{g_{\mu\nu}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_a}^{\tau} \sqrt{x^{\mu'}x_{\nu'}} d\tau \\ ds &= \sqrt{x^{\mu'}x_{\nu'}} d\tau = cd\tau \\ x^{\mu'}x_{\nu'} &= c^2 \end{aligned}$$

⁹²

$$g^{\kappa\mu} \frac{\delta L}{\delta x^\mu} = -mcg^{\kappa\mu} \frac{d}{d\tau} g_{\mu\nu} x^{\nu'} = -mc\delta^{\kappa\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = -mc \frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = 0$$

⁹³

$$\frac{d}{dt} \frac{c}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

⁹⁴

$$\frac{d}{dt} \frac{-\dot{x}^\mu}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

が出る。後述のように4元運動量を $p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$ ⁹⁵

$$p_0 = -Mc = -\frac{E}{c}$$

$$p_i = p_{x,y,z} = \left(\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)_i$$

とすると、これはローレンツ変換に関して共変ベクトルとなる。

4.3 電磁場中の粒子の運動 (ラグランジェ形式)

このとき作用積分として次のものをとろう。

$$S = S_0 + S_{el}$$

$$S_0 = -mc \int_a^b ds = -mc \int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = \int_{t_a}^{t_b} dt L_0$$

$$L_0 = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

$$S_{el} = -e \int A_\mu dx^\mu = -e \int_{\tau_a}^{\tau_b} A_\kappa \dot{x}^\kappa d\tau = \int_{t_a}^{t_b} dt L_{el}$$

$$L_{el} = -e A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} = -e\phi + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

ここで4元ベクトルポテンシャルは

$$A_0 = A^0 = \frac{1}{c}\phi$$

$$A_i = -A^i, \quad A^1 = A_x, A^2 = A_y, A^3 = A_z$$

$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ は4元速度である。

なおこの作用のローレンツ不変性は A_μ が共変ベクトルであることから従う。また、この A_μ の共変性は Maxwell の方程式および電荷の保存則より観測事実として従う。⁹⁶

⁹⁵

$$p_\mu = -mc \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}}$$

$$p_0 = -mc \frac{c}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -Mc = -\frac{E}{c}$$

$$p_i = p_{x,y,z} = -mc \frac{-\dot{x}^i}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(\frac{m\dot{\vec{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)_i$$

⁹⁶この A_μ の共変性は Maxwell の方程式および電荷の保存則より観測事実として従う。

詳しくは後述の議論から Maxwell の方程式は $\vec{B} = \text{div } \vec{A}$, $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$ として次の2式に等価である。

$$\begin{aligned}\square \vec{A} &= \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} (\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \mu_0 \vec{j} \\ \Delta \phi &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

これはローレンツ条件 (ゲージ) といわれる条件

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = 0$$

のもとで

$$\begin{aligned}\square \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \\ \square \phi &= -c^2 \mu_0 \rho\end{aligned}$$

となる。ここで4元カレント j^μ を

$$j_0 = c\rho, j^1 = j_x, j^2 = j_y, j^3 = j_z$$

と定義すれば Maxwell の方程式は

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

となる。

一方電荷の保存則

$$0 = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_\mu j^\mu$$

は (実験的に) ローレンツ不変であるから j^μ は反変ベクトルであり、従って A^μ も反変ベクトルとなる。なおローレンツ条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ はスカラーに対する関係式となりローレンツ変換に対して不変であり

$$\square \partial_\mu A^\mu = -\mu_0 \partial_\mu j^\mu = 0$$

と場の方程式と両立する。

またゲージ変換

$$\begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{\bar{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \\ \phi &\rightarrow \bar{\phi} = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\end{aligned}$$

は

$$A_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

と書ける。

つぎに \vec{E} , \vec{B} を4元形式で書こう。そこで2階の共変テンソルを

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -f_{\nu\mu}$$

この作用に変分原理を適用して運動方程式は⁹⁷ パラメターを固有時にとってロー

とすると

$$\begin{aligned}
 f_{01} &= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{c} E_x \\
 f_{02} &= \frac{1}{c} E_y \\
 f_{03} &= \frac{1}{c} E_z \\
 f_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z \\
 f_{13} &= \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y \\
 f_{23} &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_x
 \end{aligned}$$

まとめて

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

確かにこれらはゲージ変換で不変である。

$$\begin{aligned}
 \bar{f}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu \\
 &= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \chi) = f_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

97

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta L_0}{\delta x^\mu} &= mc \frac{d}{d\tau} \left(\frac{g_{\mu\nu} x^{\nu'}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} x^{\alpha'} x^{\beta'}}} \right) \\
 \frac{\delta L_{el}}{\delta x^\mu} &= -e \left(\partial_\mu (A_\kappa x^{\kappa'}) - \frac{dA_\mu}{d\tau} \right) \\
 &= -e \left(\partial_\mu (A_\kappa x^{\kappa'}) - x^{\nu'} \partial_\nu A_\mu \right) \\
 &= -e \left(x^{\kappa'} \partial_\mu A_\kappa - x^{\nu'} \partial_\nu A_\mu \right) \\
 &= -e \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) x^{\nu'} = -f_{\mu\nu} x^{\nu'} = f_{\nu\mu} x^{\nu'}
 \end{aligned}$$

よりパラメターを固有時にとって

$$\begin{aligned}
 mg_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + e \frac{dx^\nu}{d\tau} f_{\nu\mu} &= 0 \\
 mg^{\rho\mu} g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} &= -eg^{\rho\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} f_{\nu\mu} \\
 m \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} &= -e \frac{dx^\nu}{d\tau} f_\nu^\rho = -e \frac{dx_\nu}{d\tau} f^{\nu\rho}
 \end{aligned}$$

レンツ不変な形では

$$m \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} = -e \frac{dx_\nu}{d\tau} f^{\nu\rho}$$

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & 0 & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

これを

$$m \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} = F^\rho$$

$$F^\rho = -e \frac{dx_\nu}{d\tau} f^{\nu\rho}$$

と書いて F^ρ を4元力と呼ぶ。この運動方程式は4つすべてが独立ではなくその間に1つの線形関係⁹⁸

$$u_\mu F^\mu = 0$$

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

が存在する。ここで u^μ は4元速度であり

$$u^\mu u_\mu = c^2$$

$$u^\mu = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \vec{v} \frac{dt}{d\tau} \right)$$

$\tau = t$ とすれば

$$m \frac{d}{dt} \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e \dot{x}^\kappa f_{\mu\kappa}$$

$$\frac{d\pi_\mu}{dt} = e \dot{x}^\kappa f_{\mu\kappa}, \quad (\pi_\mu \text{ は一般のパラメータ } \tau \text{ として時間 } t \text{ をとる、つまり } \tau = t \text{ としたときに使おう})$$

$$\pi_\mu = m \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = M g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = M \dot{x}_\mu$$

$$\pi_\mu \pi^\mu = \frac{m^2 \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2 (c^2 - v^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2$$

98

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} F^\mu = -e \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\kappa}{d\tau} f^{\kappa\mu} = 0 \quad f^{\kappa\mu} \text{ の反対称性}$$

である。⁹⁹

またこの運動方程式は時間 t を使えば次のようにかける。¹⁰⁰

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_\mu}{dt} &= e\dot{x}^\kappa f_{\mu\kappa} \\ \pi_\mu &= m \frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = M\dot{x}_\mu = mu_\mu \\ \pi_\mu\pi^\mu &= m^2c^2\end{aligned}$$

これを各成分で書けば¹⁰¹

⁹⁹ これを書き直せば

$$\begin{aligned}u^0 &= c \frac{dt}{d\tau} \\ u^i &= \frac{dx^i}{d\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)^2} &= 1 \\ dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} &= d\tau \\ M\dot{x}^\mu &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\dot{x}^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^\mu}{dt} = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = mu^\mu\end{aligned}$$

¹⁰⁰

$$\begin{aligned}\pi_\mu\pi^\mu &= M^2c^2 - \vec{\pi}^2 = m^2c^2 \\ \vec{\pi} &= M\vec{v} = (\pi^1, \pi^2, \pi^3) = (-\pi_1, -\pi_2, -\pi_3)\end{aligned}$$

¹⁰¹

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{mc \cdot 1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Mc \\ \pi_1 &= \frac{-m\dot{x}^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -M\dot{x}^1 = -\pi^1 = -\pi_x \\ \pi_2 &= -M\dot{y} = -\pi^2 = -\pi_y, \quad \pi_3 = -M\dot{z} = -\pi^3 = -\pi_z\end{aligned}$$

第0成分より

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_0}{dt} &= c \frac{dM}{dt} = e\dot{x}^\kappa f_{0\kappa} = \frac{e}{c}(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z) \\ \frac{d(Mc^2)}{dt} &= e\vec{v} \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(Mc^2)}{dt} &= e\vec{v} \cdot \vec{E} \\ \frac{d\vec{\pi}}{dt} &= e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ M^2c^2 - \vec{\pi}^2 &= m^2c^2\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}M &= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{\pi} &= M\vec{v} = (\pi^1, \pi^2, \pi^3) = (-\pi_1, -\pi_2, -\pi_3) \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}}\end{aligned}$$

さらに次式が確認できるから

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{\pi}}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{dMc^2}{dt}$$

運動方程式としては $\frac{d\vec{\pi}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ のみが独立である。¹⁰²

第1成分より

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_1}{dt} &= -\frac{d(M\dot{x})}{dt} = e\dot{x}^\kappa f_{1\kappa} = e\left(-\frac{c}{c}E_x - \dot{y}B_z + \dot{z}B_y\right) \\ \frac{d\pi_x}{dt} &= e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})_x \\ \text{同様に} \quad \frac{d\pi_y}{dt} &= e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})_y, \quad \frac{d\pi_z}{dt} = e(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})_z\end{aligned}$$

102

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \frac{d\vec{\pi}}{dt} &= e\vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{dM}{dt}v^2 + M\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{dM}{dt}v^2 + \frac{1}{2}M\frac{dv^2}{dt} \\ &= m\frac{\frac{d}{dt}\frac{v^2}{c^2}}{2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}}v^2 + \frac{1}{2}M\frac{dv^2}{dt} \\ &= m\frac{v^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})c^2}{2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\frac{d}{dt}\frac{v^2}{c^2} = \frac{m}{2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\frac{dv^2}{dt} = \frac{dMc^2}{dt} \\ \vec{v} \cdot \frac{d\vec{\pi}}{dt} &= e\vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{dMc^2}{dt}\end{aligned}$$

4.4 電磁場中の粒子の運動 (ハミルトン形式)

上記の議論をハミルトニアン形式で行おう。まず正準運動量を次のように定義する。 $(\tau = t)$ ¹⁰³

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \\ &= -\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - eA_\mu = -M\dot{x}_\mu - eA_\mu \end{aligned}$$

各成分で書けば

$$\begin{aligned} p_0 &= -Mc - \frac{e}{c}\phi \\ p_1 &= M\dot{x} + eA_x \equiv p_x \\ p_2 &= M\dot{y} + eA_y \equiv p_y \\ p_3 &= M\dot{z} + eA_z \equiv p_z \end{aligned}$$

$$\vec{p} = \vec{\pi} + e\vec{A}$$

103

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \\ &= -mc \frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} - eA_\mu \\ &= -\frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - eA_\mu = -M\dot{x}_\mu - eA_\mu \\ &= -\pi_\mu - eA_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0 &= -Mc - eA_0 = -Mc - \frac{e}{c}\phi \\ p_1 &= -M\dot{x}_1 - eA_1 = +M\dot{x} + eA_x \\ p_2 &= -M\dot{x}_2 - eA_2 = +M\dot{y} + eA_y \\ p_3 &= -M\dot{x}_3 - eA_3 = +M\dot{z} + eA_z \end{aligned}$$

ハミルトニアン H は次のように定義される。^{104 105}

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mu=1,2,3} p_{\mu} \dot{x}^{\mu} - L \\ &= c\sqrt{\vec{\pi}^2 + m^2 c^2} + e\phi \\ &= c\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 c^2} + e\phi \end{aligned}$$

104

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= M\vec{v} = \vec{p} - e\vec{A} \\ M^2 c^2 &= \vec{\pi}^2 + m^2 c^2 \end{aligned}$$

より

$$Mc = \sqrt{\vec{\pi}^2 + m^2 c^2}$$

またはより具体的に

$$\begin{aligned} (\vec{p} - e\vec{A})^2 &= M^2 v^2 \\ (\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 c^2 &= \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m^2 c^2 = m^2 \frac{v^2 + c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= m^2 \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 c^2} &= \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Mc \end{aligned}$$

よって

$$Mc^2 = c\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 c^2}$$

105

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mu=1,2,3} p_{\mu} \dot{x}^{\mu} - L \\ &= \sum_{\mu=0,1,2,3} p_{\mu} \dot{x}^{\mu} - p_0 \dot{x}^0 - L \\ &= -p_0 \dot{x}^0 + p_{\mu} \dot{x}^{\mu} - L \\ &= -p_0 \dot{x}^0 - M \dot{x}_{\mu} \dot{x}^{\mu} - eA_{\mu} \dot{x}^{\mu} - (-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - eA_{\mu} \dot{x}^{\mu}) \\ &= -p_0 \dot{x}^0 - M(c^2 - v^2) + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= -p_0 \dot{x}^0 = Mc^2 + e\phi \\ &= c\sqrt{\vec{\pi}^2 + m^2 c^2} + e\phi \\ &= c\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 c^2} + e\phi \end{aligned}$$

なお非相対論的極限 $\frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{2m} \ll mc^2$ では¹⁰⁶

$$H \approx mc^2 + \frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{2m} + e\phi$$

議論を続けて正準方程式より¹⁰⁷

$$\begin{aligned}\vec{v} &\equiv \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{\pi}}{M} \\ \dot{\vec{p}} &= e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v} - \phi)\end{aligned}$$

106

$$\begin{aligned}H &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} (\vec{p} - e\vec{A})^2} + e\phi \\ &\approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} (\vec{p} - e\vec{A})^2\right) + e\phi = mc^2 + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi\end{aligned}$$

¹⁰⁷ 正準方程式は

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}\end{aligned}$$

であり、第1式より $Mc = \sqrt{\vec{\pi}^2 + m^2 c^2}$, $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = M\vec{v}$ に注意して

$$\begin{aligned}\vec{v} &\equiv \dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ &= \frac{\vec{\pi}}{\sqrt{\vec{\pi}^2 + m^2 c^2}} \\ &= \frac{\vec{\pi}}{M}\end{aligned}$$

また第2式より $\vec{\pi} = M\vec{v}$ から

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \\ &= c \frac{e\vec{\nabla}(\vec{\pi} \cdot \vec{A})}{\sqrt{\vec{\pi}^2 + m^2 c^2}} - e\vec{\nabla}\phi, \quad (\vec{\nabla} \text{は } \pi \text{ を微分しないものとする}) \\ &= e(\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla}\phi), \quad (\vec{\nabla} \text{は } v \text{ を微分しないものとする : 通常の記法}) \\ &= e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v} - \phi)\end{aligned}$$

ここで $\vec{p} = \vec{\pi} + e\vec{A}$ よりこの正準方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\pi}}{dt} &= e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v} - \phi) - e\frac{d\vec{A}}{dt} \\ &= e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v} - \phi) - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - e(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &\quad (\vec{\nabla} \text{は } v \text{ を微分しないものとする : 通常の記法}) \\ &= e\vec{E} + e(\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}) \\ &= e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

と前述の運動方程式を与える。非相対論的極限は自明であろう。¹⁰⁸

¹⁰⁸ v は \vec{r} とは独立と考えているから $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ より

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} &= \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \text{rot } \vec{A})_i &= \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \partial_l A_m \\ &= v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i \end{aligned}$$

5 ディラック方程式

5.1 ディラック方程式の導出

前節でもとめた相対論的ハミルトニアンに基づき量子化の手続きを進めよう。すなわち古典的ハミルトニアン

$$H_{cl} = c\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2c^2} + e\phi$$

に対して置き換え $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ を行い量子的なハミルトニアンを考えたい。しかしここで根号の扱いが困難であるから

$$H_{D,cl} = c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \beta mc^2 + e\phi$$

とおき、形式的な等式

$$H_{cl} = H_{D,cl}$$

から根号を含まないハミルトニアン $H_{D,cl}$ を決定することを試みよう。具体的には

$$c^2 \left\{ (\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2c^2 \right\} = \left\{ c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \beta mc^2 \right\}^2$$

を満たすように展開係数 $\vec{\alpha}, \beta$ を決めたい。そのためには

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 &= 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0, \quad i \neq j \\ \{\alpha_i, \beta\} &= \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \end{aligned}$$

であれば良い。これを満たす $\vec{\alpha}, \beta$ は4次の行列であればよく、具体的にはディラックの表現と呼ばれる次のものが便利である。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix} \equiv \rho_1 \otimes \sigma_i \\ \beta &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \equiv \rho_3 \otimes \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

ここで $\vec{\sigma}, \vec{\rho}$ は次のパウリ行列である。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これらは次の関係式をみたす。¹⁰⁹

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (i \neq j) \\ \sigma_i^2 &= \mathbf{I}_2 \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k \\ \text{Tr } \sigma_x &= \text{Tr } \sigma_y = \text{Tr } \sigma_z = 0 \\ \det \sigma_x &= \det \sigma_y = \det \sigma_z = -1 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) &= (\vec{A} \cdot \vec{B}) \mathbf{I}_2 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\end{aligned}$$

ここで記号 \otimes は 2×2 行列の組から 4×4 行列を次のように構成する際に用いる (テンソル積)

$$\begin{aligned}(A \otimes B)_{ia,jb} &\equiv A_{ij} B_{ab} \\ i, j &= 1, 2 \quad a, b = 1, 2 \\ (i, a), (j, b) &= (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\end{aligned}$$

よってブロック行列の掛算を思い出せば次のようになる。

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

これは次の式から理解することもできる。

$$\begin{aligned}\{(A \otimes B)(C \otimes D)\}_{ia,jb} &= (A \otimes B)_{ia,kc} (C \otimes D)_{kc,jb} \\ &= A_{ik} B_{ac} C_{kj} D_{cb} = (AC)_{ij} (BD)_{ab} \\ &= (AC \otimes BD)_{ia,jb}\end{aligned}$$

また¹¹⁰

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) &= \sigma_i A_i \sigma_j B_j = \frac{1}{2} \{ \sigma_i A_i \sigma_j B_j + \sigma_j A_j \sigma_i B_i \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=j} (\sigma_i \sigma_j A_i B_j + \sigma_j \sigma_i A_j B_i) + \sum_{i \neq j} (\sigma_i \sigma_j A_i B_j + \sigma_j \sigma_i A_j B_i) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i 2 \sigma_i^2 A_i B_i + \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j (A_i B_j - A_j B_i) \right\} \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + i \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k (A_i B_j - A_j B_i) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k A_i B_j \\ &= \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B}\end{aligned}$$

110

$$\text{Tr } A \otimes B = \sum_{ia} (A \otimes B)_{ia,ia} = \sum_{ia} A_{ii} B_{aa} = \text{Tr } A \text{ Tr } B$$

$$\begin{aligned}\text{Tr } A \otimes B &= \text{Tr } A \text{Tr } B \\ [A \otimes I, B \otimes C] &= AB \otimes C - BA \otimes C = [A, B] \otimes C\end{aligned}$$

この $H_{D,c}$ を用いて量子化 $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$ を行ったものがディラックハミルトニアン H_D であり、このときのシュレディンガー方程式はディラック方程式と呼ばれ次のようになる。

$$\begin{aligned}H_D &= c\vec{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}\right) + \beta mc^2 + e\phi \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) &= H_D\Psi(\vec{r},t)\end{aligned}$$

ここで次のディラック行列 γ_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ を導入しディラック方程式を書き直そう。¹¹¹

$$\begin{aligned}\gamma^\mu &= (\gamma^0, \vec{\gamma}) \\ \gamma^0 &= \beta \\ \vec{\gamma} &= (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z) = \beta\vec{\alpha} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$\vec{\alpha}, \beta$ のエルミート性は

$$\begin{aligned}\gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i\end{aligned}$$

とかけるがこれはまとめて

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

と表現できる。

111

$$\gamma_1\gamma_1 = \beta\alpha_x\beta\alpha_x = -\beta\beta\alpha_x\alpha_x = -I$$

など

これからディラック方程式は¹¹²

$$\begin{aligned} \left\{ i\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu) - mc \right\} \Psi &= 0 \\ (i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\Psi &= 0 \\ D_\mu &= \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \end{aligned}$$

とかける。ここで波動関数は4成分であることに注意しよう。

なお $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_D\Psi$ は

$$\begin{aligned} H_D &= \gamma^0(-i\hbar c\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + mc^2) \\ i\hbar c\partial_0\Psi &= H_D\Psi \end{aligned}$$

5.2 ディラック方程式の対称性

カレントの保存

ディラック方程式とそのエルミート共役を考えると¹¹³

$$\begin{aligned} \rho &= \Psi^\dagger\Psi \\ \vec{j} &= c\Psi^\dagger\vec{\alpha}\Psi \end{aligned}$$

¹¹²

$$\begin{aligned} \left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\mathbf{A} \right) - \beta mc^2 - e\phi \right\} \Psi &= 0 \\ \frac{\gamma^0}{c} \times \\ \left\{ \gamma^0 \left(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - e\frac{1}{c}\phi \right) - \vec{\gamma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}) - mc \right\} \Psi &= 0 \\ \left\{ i\hbar\gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} + ie\frac{1}{ch}\phi \right) + i\hbar\vec{\gamma} \cdot (\vec{\nabla} - i\frac{e}{\hbar}\vec{A}) - mc \right\} \Psi &= 0 \\ \left\{ i\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu) - mc \right\} \Psi &= 0 \\ (i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\Psi &= 0 \\ D_\mu &= \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu \end{aligned}$$

¹¹³ディラック方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c(-i\hbar\partial_i - eA_i)\alpha_i\Psi + (\beta mc^2 + e\phi)\Psi$$

のエルミート共役より

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t} = c(i\hbar\partial_i - eA_i)\Psi^\dagger\alpha_i + \Psi^\dagger(\beta mc^2 + e\phi)$$

として連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

が成立する。

共変形式では $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ としてカレントの保存則として次の関係が得られる。

114115

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \\ j^\mu &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) &= i\hbar (\dot{\Psi}^\dagger \Psi + \Psi^\dagger \dot{\Psi}) \\ &= -i\hbar \left\{ (\partial_i \Psi^\dagger \alpha_i) \Psi + \Psi^\dagger \alpha_i (\partial_i \Psi) \right\} \\ &= -i\hbar \partial_i (\Psi^\dagger \alpha_i \Psi) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \rho &= \Psi^\dagger \Psi \\ \vec{j} &= e \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi \end{aligned}$$

として

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

114

$$i\hbar \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi) - e \gamma^\mu A_\mu \Psi - mc \Psi = 0$$

エルミート共役より

$$-i\hbar (\partial_\mu \Psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} - e \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} A_\mu - mc \Psi^\dagger = 0$$

$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ として

$$-i\hbar (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu - e \bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu - mc \bar{\Psi} = 0$$

よってカレントの保存則として次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \\ j^\mu &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \end{aligned}$$

¹¹⁵ ローレンツ不変性をしめすためにはカレント j^μ が反変ベクトルであることを示す必要がある。逆にこの保存則が実験的に確認されることによりローレンツ不変性が保たれる。

自由粒子における全角運動量の保存

ここで自由粒子 ($\vec{A} = \vec{0}, \phi = 0$) をディラック表示で考えよう。¹¹⁶

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 = c\rho_1 \otimes \sigma_i p_i + \rho_3 mc^2$$

このとき

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ L_i &= \epsilon_{ijk} r_j p_k\end{aligned}$$

に対して

$$[\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} + \vec{L}, H] = 0$$

つまり

$$\begin{aligned}[H, \vec{J}] &= 0 \\ \vec{J} &= \vec{L} + \vec{S} \\ \vec{S} &= \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\end{aligned}$$

この \vec{S} をスピンと呼び全角運動量 \vec{J} は保存量となる。

¹¹⁶

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 = c\rho_1 \otimes \sigma_i p_i + \rho_3 mc^2$$

このとき

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ L_i &= \epsilon_{ijk} r_j p_k\end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned}[L_i, H] &= c\rho_1 \otimes \sigma_\ell [\epsilon_{ijk} r_j p_k, p_\ell] = i\hbar c\rho_1 \otimes \sigma_\ell \epsilon_{ijk} \delta_{j\ell} p_k \\ &= i\hbar c\rho_1 \otimes \epsilon_{ijk} \sigma_j p_k = i\hbar c\rho_1 \otimes (\vec{\sigma} \times \vec{p})_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[AB, C] &= ABC - CAB \\ A[B, C] + [A, C]B &= ABC - ACB + (ACB - CAB)\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}[\sigma_i, H] &= c\rho_1 \otimes [\sigma_i, \sigma_\ell] p_\ell \\ &= 2ic\rho_1 \otimes \epsilon_{i\ell k} \sigma_k p_\ell \\ &= -2ic\rho_1 \otimes (\vec{\sigma} \times \vec{p})_i\end{aligned}$$

よって

$$[\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} + \vec{L}, H] = 0$$

自由粒子におけるエネルギーと運動量の保存

自由粒子 $A^\mu = 0$ では

$$\begin{aligned}
 H_D &= c\rho_1 \otimes \sigma_i p_i + \rho_3 mc^2 \\
 [H_D, H_D] &= 0 \\
 [H_D, \vec{p}] &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

5.2.1 ローレンツ不変性

ローレンツ変換

$$\begin{aligned}
 x'^\mu &= \Omega^\mu{}_\nu x^\nu \\
 x'^\mu \Omega_\mu{}^\kappa &= x^\kappa
 \end{aligned}$$

について D_μ は共変ベクトルとして変換するから¹¹⁷ ($D_\mu = D'_\nu \Omega^\nu{}_\mu$)

$$\hat{\gamma}^\mu = \Omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

として¹¹⁸

$$(i\hbar \hat{\gamma}^\nu D'_\nu - mc)\Psi(x) = 0$$

 117

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu = \Omega_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Omega^\nu{}_\mu \partial'_\nu = \partial'^\nu \Omega^\nu{}_\mu$$

また A_μ の共変性より

$$\begin{aligned}
 A'_\mu(x') &= \Omega_\mu{}^\nu A_\nu(x) \\
 A'_\mu(x') \Omega^\mu{}_\kappa &= \Omega_\mu{}^\nu A_\nu(x) \Omega^\mu{}_\kappa = g_{\mu\rho} \Omega^{\rho\nu} A_\nu(x) g^{\mu\tau} \Omega_{\tau\kappa} = \delta_\rho{}^\tau \Omega^{\rho\nu} A_\nu(x) \Omega_{\tau\kappa} \\
 &= \Omega^{\rho\nu} A_\nu(x) \Omega_{\rho\kappa} = \delta^\nu{}_\kappa A_\nu(x) = A_\kappa(x)
 \end{aligned}$$

118

$$\begin{aligned}
 0 &= (i\hbar \gamma^\mu D_\mu - mc)\Psi(x) = (i\hbar \gamma^\mu D'_\nu \Omega^\nu{}_\mu - mc)\Psi(x) \\
 &= (i\hbar (\Omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu) D'_\nu \Omega^\nu{}_\mu - mc)\Psi(x) \\
 &= (i\hbar \hat{\gamma}^\nu D'_\nu - mc)\Psi(x)
 \end{aligned}$$

ここで¹¹⁹

$$\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

これより正則行列 Λ が存在しすべての μ に対して

$$\hat{\gamma}^\mu = \Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda$$

となる Λ が存在することが知られている。(後述) これより次の通りディラック方程式はローレンツ共変となる。¹²⁰

$$(i\hbar\gamma^\mu D'_\mu - mc)\Psi'(x') = 0$$

ここで

$$\Psi'(x') = \Lambda\Psi(x)$$

であり、

$$x' = \mathcal{L}x, \quad x'^\mu = \Omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

と書けば

$$\Psi'(x') = (\mathcal{L}\Psi)(x') = (\mathcal{L}\Psi)(\mathcal{L}x) = \Lambda\Psi(x)$$

変換行列の具体的な構成

ここで議論に使った Λ を具体的に構成してみよう。まず無限小ローレンツ変換を考え

$$\Omega^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \delta\Omega^\mu{}_\nu$$

119

$$\begin{aligned} \{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} &= \Omega^\mu{}_\kappa \Omega^\nu{}_\rho \{\gamma^\kappa, \gamma^\rho\} = 2\Omega^\mu{}_\kappa \Omega^\nu{}_\rho g^{\kappa\rho} \\ &= 2\Omega^\mu{}_\kappa \Omega^{\nu\kappa} = 2g^{\mu\tau} \Omega_{\tau\kappa} \Omega^{\nu\kappa} = 2g^{\mu\tau} \delta_\tau{}^\nu = 2g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

120

$$\begin{aligned} (i\hbar\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda D'_\mu - mc)\Psi &= 0 \\ (i\hbar\gamma^\mu\Lambda D'_\mu - mc\Lambda)\Psi &\equiv (i\hbar\gamma^\mu D'_\mu - mc)\Psi'(x') = 0 \end{aligned}$$

とすれば微小量の1次までで $\Omega^\mu{}_\nu \Omega_\mu{}^\lambda = g_\nu{}^\lambda$ より¹²¹

$$\delta\Omega_{\lambda\nu} = -\delta\Omega_{\nu\lambda}$$

ここで $\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = \Omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ を書き直そう。まず

$$\Omega^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \delta\Omega^\mu{}_\nu$$

$$\Omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \gamma^\mu + \delta\Omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

$$\Lambda = I + \delta\Lambda \quad \text{として}$$

$$(I - \delta\Lambda)\gamma^\mu(I + \delta\Lambda) = \gamma^\mu - [\delta\Lambda, \gamma^\mu]$$

よって

$$\delta\Omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu = -[\delta\Lambda, \gamma^\mu]$$

$$\delta\Omega_{\mu\nu}\gamma^\nu = -[\delta\Lambda, \gamma_\mu]$$

$$\delta\Lambda = -\frac{i}{4}\sigma^{\kappa\nu}\delta\Omega_{\kappa\nu}$$

として $\delta\Omega_{\mu\nu}$ の反対称性より

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$$

と仮定して一般性を失わず、反対称性に注意して

$$\delta\Omega_{\mu\nu}\gamma^\nu = \frac{i}{4}[\sigma^{\kappa\nu}, \gamma_\mu]\delta\Omega_{\kappa\nu}$$

$$[\sigma^{\kappa\nu}, \gamma_\mu] = -2i(g_\mu{}^\kappa\gamma^\nu - g_\mu{}^\nu\gamma^\kappa)$$

121

$$\begin{aligned} g_\nu{}^\lambda &= (g^\mu{}_\nu + \delta\Omega^\mu{}_\nu)(g_\mu{}^\lambda + \delta\Omega_\mu{}^\lambda) \\ &= g_\nu{}^\lambda + \delta\Omega^\lambda{}_\nu + \delta\Omega_\nu{}^\lambda \\ 0 &= \delta\Omega^\lambda{}_\nu + \delta\Omega_\nu{}^\lambda \\ 0 &= \delta\Omega_{\lambda\nu} + \delta\Omega_{\nu\lambda} \end{aligned}$$

次の $\sigma^{\mu\nu}$ がこの関係式を満たすことが示せる。¹²²

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

これを積分して¹²³

$$\begin{aligned}\Omega &= e^\omega, \\ \tilde{\omega} &= -\omega\end{aligned}$$

に対して (ω :実反対称)¹²⁴

122

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ \therefore [\gamma^\kappa \gamma^\nu, \gamma^\mu] &= \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \\ &= \gamma^\kappa (-\gamma^\mu \gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}) - \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \\ &= -\gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma^\nu + 2\gamma^\kappa g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \\ &= -2g^{\kappa\mu} \gamma^\nu + 2\gamma^\kappa g^{\mu\nu} \\ [[\gamma^\kappa, \gamma^\nu], \gamma^\mu] &= -2g^{\kappa\mu} \gamma^\nu + 2\gamma^\kappa g^{\mu\nu} - (-2g^{\nu\mu} \gamma^\kappa + 2\gamma^\nu g^{\mu\kappa}) \\ &= -4g^{\kappa\mu} \gamma^\nu + 4\gamma^\kappa g^{\mu\nu} \\ [[\gamma^\kappa, \gamma^\nu], \gamma_\mu] &= -4g_\mu^\kappa \gamma^\nu + 4\gamma^\kappa g_\mu^\nu \\ [\frac{i}{2}[\gamma^\kappa, \gamma^\nu], \gamma_\mu] &= -2i(g_\mu^\kappa \gamma^\nu - \gamma^\kappa g_\mu^\nu)\end{aligned}$$

123

$$\begin{aligned}\Omega &= e^\omega \\ \Omega \tilde{\Omega} &= I \text{より} \\ \tilde{\omega} &= -\omega\end{aligned}$$

成分表示では

$$(\tilde{\Omega})^\mu{}_\nu = \Omega_{\nu}{}^\mu$$

と書いて

$$\begin{aligned}(\Omega \tilde{\Omega})^\mu{}_\nu &= \Omega^\mu{}_\kappa \Omega_{\nu}{}^\kappa = \delta^\mu{}_\nu \\ (\Omega^{-1})^\kappa{}_\nu &= \Omega_{\nu}{}^\kappa \\ (\tilde{\omega})^\mu{}_\nu &= \omega_{\nu}{}^\mu = -\omega^\mu{}_\nu \\ (e^\omega)^\mu{}_\kappa (e^\omega)_{\nu}{}^\kappa &= (e^\omega)^\mu{}_\kappa (e^{\tilde{\omega}})^\kappa{}_\nu = (e^\omega)^\mu{}_\kappa (e^{\tilde{\omega}})^\kappa{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu\end{aligned}$$

¹²⁴まず

$$\hat{\gamma}^\kappa = (e^{t\omega})^\kappa{}_\lambda \gamma^\lambda \Big|_{t=1}$$

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}}$$

なお¹²⁵

$$\Lambda^\dagger = \gamma^0 \Lambda^{-1} \gamma^0$$

$$\Lambda(t) = e^{-\frac{it}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} = e^{-\frac{it}{4}\sigma_{\mu}{}^{\nu}\omega^{\mu}{}_{\nu}}$$

として

$$\begin{aligned} \Gamma^\kappa(t) &= \Lambda(t)^{-1} \gamma^\kappa \Lambda(t) = e^{+\frac{it}{4}\sigma_{\mu}{}^{\nu}\omega^{\mu}{}_{\nu}} \gamma^\kappa e^{-\frac{it}{4}\sigma_{\mu}{}^{\nu}\omega^{\mu}{}_{\nu}} \\ \frac{\partial \Gamma^\kappa}{\partial t} &= \frac{i}{4} \Lambda^{-1} [\sigma_{\mu}{}^{\nu}, \gamma^\kappa] \Lambda \omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} \Lambda^{-1} (g_{\mu}^{\kappa} \gamma^{\nu} - g^{\kappa\nu} \gamma_{\mu}) \Lambda \omega^{\mu}{}_{\nu} \\ &= \frac{1}{2} (g_{\mu}^{\kappa} \Gamma^{\nu} - g^{\kappa\nu} \Gamma_{\mu}) \omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma^{\nu} \omega^{\kappa}{}_{\nu} - \Gamma_{\mu} \omega^{\mu\kappa}) = \frac{1}{2} (\Gamma^{\nu} \omega^{\kappa}{}_{\nu} - \Gamma^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\kappa}) \\ &= \frac{1}{2} (\Gamma^{\nu} \omega^{\kappa}{}_{\nu} + \Gamma^{\mu} \omega_{\mu}{}^{\kappa}) = \omega^{\kappa}{}_{\mu} \Gamma^{\mu} \end{aligned}$$

$t=0$ で $\Gamma^{\mu}(0) = \gamma^{\mu}$ に注意して連立微分方程式の解として

$$\Gamma^{\mu} = (e^{t\omega})^{\mu}{}_{\nu} \gamma^{\nu}$$

$t=1$ として

$$\Gamma^{\mu}(1) = \hat{\gamma}^{\mu}$$

125

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu\dagger} &= \left(\frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \right)^{\dagger} = -\frac{i}{2} [\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}] \\ &= \frac{i}{2} [\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}] = \gamma^0 \frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \gamma^0 \\ &= \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 \\ \Lambda^\dagger &= e^{\frac{i}{4} (\sigma^{\mu\nu})^{\dagger} \omega_{\mu\nu}} \\ &= \gamma^0 e^{\frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}} \gamma^0 \\ &= \gamma^0 \Lambda^{-1} \gamma^0 \end{aligned}$$

このローレンツ変換に対してカレントは

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \Lambda^{-1} \Psi' = \gamma^0 \Lambda^\dagger \gamma^0 \Psi' \\
 j^\mu &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \\
 &= \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Psi \\
 &= \Psi'^\dagger \gamma^0 \Lambda \gamma^0 (\gamma^0 \gamma^\mu) \Lambda^{-1} \Psi \\
 &= \Psi'^\dagger \gamma^0 \Lambda \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Psi' \\
 &= \bar{\Psi}' \Lambda \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Psi'
 \end{aligned}$$

ここで前節の議論から

$$\begin{aligned}
 \Omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu &= \Lambda^{-1} \gamma^\mu \Lambda \\
 \Omega^\mu{}_\nu \Lambda \gamma^\nu \Lambda^{-1} &= \gamma^\mu \\
 \Omega_\mu{}^\kappa \Omega^\mu{}_\nu \Lambda \gamma^\nu \Lambda^{-1} &= g_\nu^\kappa \Lambda \gamma^\nu \Lambda^{-1} = \Lambda \gamma^\kappa \Lambda^{-1} = \\
 &= \Omega_\mu{}^\kappa \gamma^\mu = \gamma^\mu \Omega_\mu{}^\kappa
 \end{aligned}$$

よって¹²⁶

$$\begin{aligned}
 j'^\kappa &= \Omega^\kappa{}_\mu j^\mu \\
 j'^\mu &= \bar{\Psi}' \gamma^\mu \Psi'
 \end{aligned}$$

これはカレントが反変ベクトルとして変換することを意味し、保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ がローレンツ不変であることを意味する。

5.3 自由ディラック方程式の平面波解

この節では $A^\mu = 0$ として具体的にディラック方程式の解を構成しよう。ディラックハミルトニアンを

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\nabla}}{i} + \beta mc^2 = c\rho_1 \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + \rho_3 mc^2$$

としてディラック方程式は

$$i\hbar c \partial_0 \Psi = H \Psi$$

126

$$\begin{aligned}
 j^\mu &= j'^\nu \Omega_\nu{}^\mu \\
 \Omega^\kappa{}_\mu j^\mu &= \Omega^\kappa{}_\mu \Omega_\nu{}^\mu j'^\nu = g_\nu^\kappa j'^\nu = j'^\kappa
 \end{aligned}$$

と書けるから

$$\begin{aligned}\Psi^{(+)}(x) &= e^{-ik_\mu x^\mu} u(k) \\ \Psi^{(-)}(x) &= e^{+ik_\mu x^\mu} v(k) \\ -k^\mu x^\mu &= -k^0 x^0 + k^i x^i = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \\ (k_x, k_y, k_z) &= (k^1, k^2, k^3) = (-k_1, -k_2, -k_3) \\ k_0 &= k^0 = \frac{\omega}{c}\end{aligned}$$

と書いて

$$H^2 = (c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4) \mathbf{1}_4$$

に注意して平面波解は次の関係式を満たす。¹²⁷

$$\begin{aligned}\vec{p}\Psi^{(\pm)} &= \pm \hbar \vec{k} \Psi^{(\pm)} \\ H\Psi^{(\pm)} &= \pm E \Psi^{(\pm)} \\ Hu &= +Eu \\ Hv &= -Ev \\ E &= c\hbar k_0 = c\hbar k^0 = \hbar\omega \\ \hbar k_0 &= \sqrt{\hbar^2 \vec{k}^2 + m^2 c^2} \\ k_\mu k^\mu &= \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\end{aligned}$$

127

$$\begin{aligned}H^2 &= c^2 \rho^2 \otimes (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 + \rho_3^2 m^2 c^4 + 2mc^2 (\rho_1 \rho_3 + \rho_3 \rho_1) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ &= (c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4) \mathbf{1}_4\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}H &= \gamma^0 (-i\hbar c \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + mc^2) \\ H^2 &= \gamma^0 (-i\hbar c \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + mc^2) \gamma^0 (-i\hbar c \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + mc) \\ &= -\hbar^2 c^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j (\vec{\nabla})_i (\vec{\nabla})_j + m^2 c^4 - i\hbar mc^2 (\gamma^i \gamma^0 + \gamma^i \gamma^0) (\vec{\nabla})_i \\ &= -\hbar^2 c^2 (-\gamma^i) \gamma^j (\vec{\nabla})_i (\vec{\nabla})_j + m^2 c^4 \\ &= -\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \\ \vec{p}\Psi^{(\pm)} &= \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi^{(\pm)} = \frac{\hbar}{i} (\mp i) (k_1, k_2, k_3) \Psi^{(\pm)} = \pm \hbar (k^1, k^2, k^3) \Psi^{(\pm)} = \pm \hbar \vec{k} \Psi^{(\pm)}\end{aligned}$$

一方ディラック方程式 $(i\hbar\gamma^\mu\partial_mu - mc)\Psi^{(\pm)} = 0$ から $\not{k} = k_\mu\gamma^\mu$ として¹²⁸

$$(\hbar\not{k} - mc)u = 0$$

$$(\hbar\not{k} + mc)v = 0$$

5.3.1 $m \neq 0$ の場合

静止した慣性系 $\vec{v} = 0$, $k^\mu = (\frac{mc}{\hbar}, 0, 0, 0)$ をとれば完全系として $u_{\text{rest}}^\alpha, v_{\text{rest}}^\alpha, \alpha = 1, 2$ が以下のようにとれる。¹²⁹

$$u_{\text{rest}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{\text{rest}}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\text{rest}}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\text{rest}}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}^\alpha u^\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \bar{v}^\alpha v^\beta = -\delta_{\alpha\beta}, \quad \bar{u}^\alpha v^\beta = \bar{v}^\alpha u^\beta = 0$$

$$u_{\text{rest}}^\alpha = \begin{pmatrix} \psi_{\text{rest}}^\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\text{rest}}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{\text{rest}}^\alpha \end{pmatrix}$$

128

$$(\pm\hbar\not{k} - mc)\Psi^{(\pm)}(x) = 0, \quad \not{k} = k_\mu\gamma^\mu$$

$$(\hbar\not{k} - mc)u = 0$$

$$(\hbar\not{k} + mc)v = 0$$

129

$$mc(\gamma^0 - 1)u_{\text{rest}} = mc \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix} u_{\text{rest}} = 0$$

$$mc(\gamma^0 + 1)v_{\text{rest}} = mc \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} v_{\text{rest}} = 0$$

これを基にローレンツ変換により一般の平面波解を構成しよう。まず¹³⁰

$$\not{k} = -ia_\mu b_\nu \sigma^{\mu\nu} + a_\mu b^\mu$$

$$\not{k}\not{k} = k_\mu k^\mu = k^2$$

から

$$u^\alpha = \frac{1}{mc} (\not{k} + mc) u_{\text{rest}}^\alpha$$

$$= \frac{1}{mc} \begin{pmatrix} (\hbar k_0 + mc) \psi_{\text{rest}}^\alpha \\ \gamma_i \hbar k^i \psi_{\text{rest}}^\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{mc} \begin{pmatrix} (\frac{E}{c} + mc) \psi_{\text{rest}}^\alpha \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_{\text{rest}}^\alpha \end{pmatrix}$$

5.4 非相対論的極限

4成分のスピンルを2成分スピンル ψ, χ をつかって次のように書き

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}$$

ディラック方程式を次の型に書こう。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 + e\phi & cP \\ cP & -mc^2 + e\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$P = \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})$$

さらに定常状態に関しては

$$\psi(x) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\vec{r})$$

$$\chi(x) = e^{-iEt/\hbar} \chi(\vec{r})$$

として

$$(mc^2 + e\phi)\psi + cP\chi = E\psi$$

$$cP\psi + (-mc^2 + e\phi)\chi = E\chi$$

130

$$\not{k} = a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu = \frac{1}{2} (a_\mu b_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu + a_\nu b_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} (a_\mu b_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu + a_\nu b_\mu (-\gamma^\mu \gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}))$$

$$= \frac{1}{2} (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu) \gamma^\mu \gamma^\nu + a_\mu b^\mu = \frac{1}{2} a_\mu b_\nu [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + a_\mu b^\mu$$

$$= -ia_\mu b_\nu \sigma^{\mu\nu} + a_\mu b^\mu$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

以下非相対論的極限

$$e\phi \ll mc^2, \quad \frac{P^2}{2m} \ll mc^2, \quad E \approx mc^2$$

を考えるのに便利な型にディラック方程式を変形しよう。

$$W = E - mc^2$$

とすれば第2式より

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{c}{2M'c^2} P\psi = \frac{1}{2M'c} P\psi \\ 2M'c^2 &= E + mc^2 - e\phi = 2mc^2 + W - e\phi \\ M' &= m + \frac{1}{2c^2}(W - e\phi) \end{aligned}$$

これからディラック方程式は次のように厳密に書き直せる。¹³¹

$$\left(P \frac{1}{2M'} P + e\phi\right)\psi = W\psi$$

最低次の近似

最低次の近似として

$$M' = m$$

とすれば(シュレディンガー近似)

$$\begin{aligned} H_{sh}\psi &= W\psi \\ H_{sh} &= \frac{1}{2m} P^2 + e\phi \end{aligned}$$

ここで¹³²

$$P^2 = \vec{\pi}^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \quad \vec{B} = \text{rot } A$$

131

$$\begin{aligned} (mc^2 + e\phi)\psi + P \frac{1}{2M'} P\psi &= E\psi \\ \left(P \frac{1}{2M'} P + e\phi\right)\psi &= W\psi \end{aligned}$$

132

$$\begin{aligned} P^2 &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = (\sigma_i \pi^i)(\sigma_j \pi^j) = \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) \pi^i \pi^j \\ &= \vec{\pi}^2 + i\epsilon_{ijk} \sigma_i \pi_j \pi_k = \vec{\pi}^2 + i\epsilon_{ijk} \sigma_i (p_j - eA_j)(p_k - eA_k) \\ &= \vec{\pi}^2 - ie\epsilon_{ijk} \sigma_i (p_j A_k) = \vec{\pi}^2 - ie\epsilon_{ijk} \sigma_i \frac{\hbar}{i} (\partial_j A_k) \\ &= \vec{\pi}^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \quad \vec{B} = \text{rot } A \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} H_{sh} &= \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi + \vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ \vec{\mu} &= -\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \\ &= -g\mu_B\vec{S}/\hbar, \quad (\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここでボーア磁子 } \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m} \\ \text{いわゆる } g \text{ 因子 } g &= 2 \end{aligned}$$

となる。

$\frac{v^2}{c^2}$ までの近似

つぎに近似の次数をあげて¹³³

$$\frac{1}{M'} \approx \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2c^2}(W - e\phi)$$

としよう。ここで $W - e\phi \approx mv^2$ と見積もり $\frac{v^2}{c^2}$ までとった。よって

$$P\frac{1}{2M'}P = \frac{P^2}{2m} - \frac{1}{4m^2c^2}WP^2 + \frac{e}{4m^2c^2}P\phi P$$

これから

$$\left(\frac{P^2}{2m} + e\phi + \frac{e}{4m^2c^2}P\phi P \right) \psi = W \left(1 + \frac{1}{4m^2c^2}P^2 \right) \psi$$

ここで規格化について考えると

$$\chi = \frac{1}{2mc}P\psi$$

として

$$\begin{aligned} 1 &= \int d^3r \Psi^\dagger \Psi = \int d^3r (\psi^\dagger \psi + \chi^\dagger \chi) \\ &= \int d^3r \psi^\dagger \left(1 + \frac{1}{4m^2c^2}P^2 \right) \psi \end{aligned}$$

133

$$\begin{aligned} \frac{1}{M'} &= \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2mc^2}(W - e\phi) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2c^2}(W - e\phi) + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &\approx \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2c^2}(W - e\phi) \end{aligned}$$

よって2成分の規格化された波動関数 ψ_N を

$$\begin{aligned}\psi_N &= \Omega\psi \\ 1 &= \int d^3r \psi_N^\dagger \psi_N\end{aligned}$$

とすれば

$$\Omega = 1 + \frac{1}{8m^2c^2}P^2$$

とすればよい。よって ψ_N についての方程式は^{134 135}

$$\left(\frac{P^2}{2m} + e\phi - \frac{P^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{8m^2c^2}[P, [P, \phi]] \right) \psi_N = W\psi_N$$

次数を調べると

$$\begin{aligned}\frac{e}{8m^2c^2}[P, [P, \phi]] &\approx \frac{mv^2(mv)^2}{m^2c^2} = \frac{1}{2}mv^2 \cdot \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \\ \frac{1}{8m^3c^2}P^4 &\approx \frac{(mv)^4}{m^3c^2} = \frac{1}{2}mv^2 \cdot \left(\frac{v^2}{c^2} \right)\end{aligned}$$

と $\frac{v^2}{c^2}$ までとっていることとなる。

¹³⁴ここで $\{A^2, B\} - 2ABA = A^2B - BA^2 - 2ABA$, $[A, [A, B]] = A(AB - BA) - (AB - BA)A = A^2B - 2ABA + BA^2$ から $\{A^2, B\} - 2ABA = [A, [A, B]]$ を使う。

¹³⁵

$$\begin{aligned}\left(\frac{P^2}{2m} + e\phi + \frac{e}{4m^2c^2}P\phi P \right) \Omega^{-1}\psi_N &= W\Omega\psi_N \\ \Omega^{-1}\left(\frac{P^2}{2m} + e\phi + \frac{e}{4m^2c^2}P\phi P \right) \Omega^{-1}\psi_N &= W\psi_N \\ \left(\frac{P^2}{2m} + e\phi - \frac{P^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{8m^2c^2}\{\phi, P^2\} + \frac{e}{4m^2c^2}P\phi P \right) \psi_N + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) &= W\psi_N \\ \left(\frac{P^2}{2m} + e\phi - \frac{P^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{8m^2c^2}[P, [P, \phi]] \right) \psi_N &= W\psi_N\end{aligned}$$

$$P^4 = [\vec{\pi}^2 - e\hbar(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})]^2$$

$$[P, \phi] = [\sigma_j(p_j - eA_j), \phi] = \sigma_j(p_j\phi) = -i\hbar\sigma_j\partial_j\phi$$

ここで静的な電場の場合 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ より

$$[P, [P, \phi]] = \hbar^2 \operatorname{div} \vec{E} + 2\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \times \vec{\pi}$$

よってこの次数までの近似〔パウリ近似〕で

$$H_{pauli}\psi_N = W\psi_N$$

$$H_{pauli} = H_{sh} + H_c$$

$$H_{sh} = \frac{1}{2m}(\vec{\pi}^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B})^2 + e\phi = \frac{1}{2m}\vec{\pi}^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

$$H_c = -\frac{(\vec{\pi}^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B})^2}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div} \vec{E} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \times \vec{\pi}$$

となる。ここで古典的ハミルトニアン¹⁾の非相対論極限を考えると

$$H_{cl} = c\sqrt{\vec{\pi}^2 + m^2c^2} + e\phi = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{\pi}^2}{m^2c^2}} + e\phi$$

$$\approx e\phi + mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{\pi}^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{\vec{\pi}^4}{m^4c^4}\right)$$

$$= e\phi + mc^2 + \frac{\vec{\pi}^2}{2m} - \frac{\vec{\pi}^4}{2m^3c^4}$$

でスピンの効果を含めて $\vec{\pi}^2 \rightarrow \vec{\pi}^2 - e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ として H_c の第一項は相対論的な運動エネルギーの補正項と考えられる。

次の項は Darwin 項とよばれる。

$$P^4 = [\vec{\pi}^2 - e\hbar(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})]^2$$

$$[P, \phi] = [\sigma_j(p_j - eA_j), \phi] = \sigma_j(p_j\phi) = -i\hbar\sigma_j\partial_j\phi$$

$$[P, [P, \phi]] = -i\hbar[\sigma_i(p_i - eA_i), \sigma_j\partial_j\phi]$$

$$= -\hbar^2[\sigma_i\partial_i, \sigma_j\partial_j\phi] + ie\hbar[\sigma_iA_i, \sigma_j\partial_j\phi]$$

$$= -\hbar^2\sigma_i\sigma_j\partial_i\partial_j\phi - \hbar^2\sigma_i\sigma_j(\partial_j\phi)\partial_i + \hbar^2\sigma_j\sigma_i(\partial_j\phi)\partial_i + ie\hbar[\sigma_i, \sigma_j]A_i\partial_j\phi$$

$$= -\hbar^2\Delta\phi - \hbar^2[\sigma_i, \sigma_j](\partial_j\phi)\partial_i - 2e\hbar\epsilon_{ijk}\sigma_kA_i(\partial_j\phi)$$

$$= -\hbar^2\Delta\phi - 2i\hbar^2\epsilon_{ijk}\sigma_k(\partial_j\phi)\partial_i - 2e\hbar\epsilon_{ijk}\sigma_kA_i(\partial_j\phi)$$

$$= \hbar^2\operatorname{div} \vec{E} - 2i\hbar^2\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \times \vec{\nabla} + 2e\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{E}$$

$$= \hbar^2\operatorname{div} \vec{E} + 2\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \times (\vec{p} - e\vec{A})$$

$$= \hbar^2\operatorname{div} \vec{E} + 2\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \times \vec{\pi}$$

最後の項は特に中心力場の場合を考えると¹³⁷

$$\begin{aligned} e\phi(\vec{r}) &= V(r), \quad \vec{A} = \vec{0} \\ H_{LS} &\equiv -\frac{e\hbar}{4m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \times \vec{\pi} = \frac{\hbar}{4m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= \left(\frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \vec{s} \cdot \vec{\ell} \\ \vec{s} &= \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \\ \vec{\ell} &= \vec{r} \times \vec{p} \end{aligned}$$

となりスピン軌道相互作用とよばれる。

時間依存性のある場合 (最低次)

$$\Psi = e^{-imc^2t/\hbar} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

として (定常状態の議論を考えてエネルギー mc^2 近傍でのおそいモードに着目して

$$\begin{aligned} mc^2\psi + i\hbar\partial_t\psi &= (mc^2 + e\phi)\psi + cP\chi \\ mc^2\chi + i\hbar\partial_t\chi &= cP\psi + (-mc^2 + e\phi)\chi \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi &= e\phi\psi + cP\chi \\ i\hbar\partial_t\chi &= cP\psi + (-2mc^2 + e\phi)\chi \end{aligned}$$

まず $mv^2 \ll mc^2$, $e\phi \ll mc^2$ として第2式より

$$\chi = \frac{cP}{2mc^2}\psi$$

これから

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= H_{sh}\psi \\ H_{sh} &= \frac{P^2}{2m} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi + \vec{\mu} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

とシュレディンガー方程式が導かれる。

137

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{r}$$