—-**量子力学第** 2　　2000 July 25 **試験** (13:00-16:00)

問題 1 1 次元振動子の無摂動ハミルトニアンが

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}mw_0^2x^2 \tag{1}$$

と与えられている。これに摂動

$$H' = ax^4 \tag{2}$$

がかかっている。摂動がかかった状態のエネルギーを ($\hbar$ でのベキ展開と考えて) $\hbar^2$の項まで求めよ。ただし x に対する（H_0の固有状態に関する）行列要素は

$$(x)_{n,n-1} = (x)_{n-1,n} = \sqrt{\frac{\hbar n}{2mw_0}},\quad (x)_{n,m} = 0 \quad (m \neq n \pm 1)$$

となること、1 次元調和振動子のエネルギーは $E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})$ であることを用いてよい。また [問題 2] の参考も必要なら用いよ。

問題 2 等方的 3 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2 + z^2) \tag{3}$$

である。これは x, y, z方向成分の 1 次元調和振動子の組合せと考えることができる。1 次元調和振動子のエネルギーは $E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})$ であること、その他波動関数の性質など既知として以下の問に答えよ。（末尾参考１～２を参照）

(1-1) ハミルトニアン (3) による時間に依存しないシュレディンガー方程式を変数分離することにより、解を $X(x)Y(y)Z(z)$ の形に求めよ。

(1-2) 3 次元調和振動子の固有状態をエネルギーの低い方から 10 個とり、その固有エネルギーと 1 次元調和振動子の 3 個の量子数 (n_x, n_y, n_z) を定めよ。

(1-3) さらにそれらの状態について、角運動量量子数（方位量子数、磁気量子数）を決めよ。

[参考 1] 1 次元調和振動子

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

の波動関数は

$$\psi_n(x) = N_n H_n(\alpha x)\exp(-\alpha^2 x^2/2)$$

ただし $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}, \quad N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n N!}}$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \cdots\cdots$$

[参考 2] 球関数について

$(\ell = 0 : s - wave)$ $\qquad Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$

$(\ell = 1 : p - wave)$

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+iy}{r} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}, \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \\
Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x-iy}{r} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}
\end{aligned}$$

$(\ell = 2 : d - wave)$

$$\begin{aligned}
Y_{22} &= \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}}(\frac{x+iy}{r})^2 = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}, \\
Y_{21} &= -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}}\frac{z(x+iy)}{r^2} = -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}, \\
Y_{20} &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{4\pi}}\frac{3z^2-r^2}{r^2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{4\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \\
Y_{2-1} &= \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}}\frac{z(x-iy)}{r^2} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi}, \\
Y_{2-2} &= \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}}(\frac{x-iy}{r})^2 = \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\phi}
\end{aligned}$$