—-**量子力学第** 2　　**１９９８．７．３０ 試験**（１５：００-１８：００）

$V(r)$ （$r = |\mathbf{r}|$）は球対称ポテンシャルでありまた

$$V_1(\mathbf{r}) = A(\ell_x^2 - \ell_y^2) \quad , \quad A > 0 \tag{1}$$

とする。$V_0(r) + V_1(\mathbf{r})$ 中にある電子のハミルトニアンは

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) + V_0(r) + V_1(\mathbf{r}) \tag{2}$$

である。以下の問に応えよ。(**注意**:途中の問題、例えば問題 1 に答えられなくても簡単に放棄せず先に進みなさい。また計算の手順は必ず明らかにすること。)

問題 1 $(\ell_x^2 - \ell_y^2)$ を $\ell_z, \ell_\pm$で表せ。$\ell = 1$ の状態に対して $V_1(\mathbf{r}) = A(\ell_x^2 - \ell_y^2)$ を行列で表せ。

問題 2 電子の電荷を$-e$ として、電磁場（ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$, スカラー・ポテンシャルϕ）でのシュレディンガー方程式が

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\phi + V_0(r) + V_1(\mathbf{r}) \tag{3}$$

であることを、ハミルトンの運動方程式を示すことで論ぜよ。

問題 3 式 (3) に対応して電流密度 $\mathbf{j}$ の式を示せ。なぜ君が書いた式が電流密度なのか説明せよ。

問題 4 今、外場として z方向の定磁場 $\mathbf{H_0} = (0, 0, H_0)$ を考える。このとき $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{H}_0 \times \mathbf{r}$ と選んでハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V_0(r) + V_1(\mathbf{r}) + \frac{e\hbar}{2m}H_0\ell_z + \frac{e^2}{8m}H_0^2(x^2 + y^2) \tag{4}$$

となることを示せ。

問題 5 V_1がない場合を考える。

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V_0(r) + \frac{e\hbar}{2m}H_0\ell_z + \frac{e^2}{8m}H_0^2(x^2 + y^2) \tag{5}$$

$\ell = 1$ の状態についてエネルギー準位はどうなるか。$\mathcal{H}_r = \frac{p^2}{2m} + V_0(r)$ を無摂動ハミルトニアンとして 1 次の摂動論によって計算せよ。

問題 6 以降では H_0^2の項は無視することにする。

問題 6 磁場がない場合 $H_0 = 0$ を考える。

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + V_0(r) + A(\ell_x^2 - \ell_y^2) \tag{6}$$

$\ell = 1$ の状態についてエネルギー準位はどうなるか。ハミルトニアンを対角化することで固有状態と固有エネルギーを求めよ。

問題 7 $\ell = 1$ の状態空間について

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}' \quad , \quad \mathcal{H}' = \frac{e\hbar}{2m} H_0 \ell_z \tag{7}$$

のエネルギー準位はどうなるか。上の $\mathcal{H}_0$を無摂動ハミルトニアンとして 2 次摂動によって固有状態およびそのエネルギーを計算せよ。

問題 8 $\ell = 1$ の状態について、問題 7 のハミルトニアンを正しく対角化することにより固有状態、固有エネルギーを求めよ。

問題 9 $t < 0$ で最低エネルギー状態にある $\ell = 1$ の電子を考える。$t \geq 0$ に z方向の定磁場 H_0を掛ける。このとき $\ell = 1$ の状態に限って議論しよう。

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + V_0(r) + A(\ell_x^2 - \ell_y^2) & : t < 0 \\ \frac{p^2}{2m} + V_0(r) + A(\ell_x^2 - \ell_y^2) + \frac{e\hbar}{2m} H_0 \ell_z & : t \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

以下の手順で考えよ。

9-1 $\mathcal{H} : t < 0$ の最低エネルギー状態を、$\mathcal{H} : t \geq 0$ の固有状態で表せ。

9-2 $t < 0$ で最低エネルギー状態にあった電子波動関数の $t \geq 0$ での時間変化（シュレディンガー表示の波動関数）を示せ。

9-3 9-2 で求めた状態について、$t \geq 0$ における ℓ_z の期待値の時間変化を求めよ。

[参考] 球面調和関数

$(\ell = 1 : p - wave)$

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x + iy)/r = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}, \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z/r = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \\ Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x - iy)/r = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \end{aligned}$$