

論理回路基礎 (2)

坂井 修一

東京大学大学院 情報理工学系研究科 電子情報学専攻
東京大学 工学部 電気工学科

- はじめに
- 論理演算

講義の概要と予定

1. デジタル回路入門
2. 論理演算
論理演算とは、3つの基本論理演算、NORとNAND、完備性、デジタル回路の表現、ブール代数、標準形
3. 組み合わせ回路の構成法
4. 組合せ回路の実例
5. フリップフロップ
6. 基本的な順序回路
7. 一般的な順序回路
8. 論理回路の実現
9. 記憶回路
10. デジタル回路から電子計算機へ

休講: 12 / 2, 試験: 3月3日(予定)

2. 論理演算

■ 論理演算

- 論理関数を用いた演算のこと。
 - 1出力論理関数とは、次のようなもの
 $F: (I_1, I_2, \dots, I_n) \quad 0, 1, 0 \text{ または } 1$
 1出力論理関数は、全部で 2^{2^n} 通り存在し得る
- 組合せ回路
 - 論理演算を実現する回路のこと

■ 論理関数の表現

- 真理値表
- ブール代数
- MIL記号

論理関数の表現

■ 真理値表

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0

正確: 入出力のパターンをすべて列挙

× 量! 意味?

■ ブール代数

$$\bullet Y_1 = X_1 \cdot X_2 + X_3$$

正確で簡潔。直感に訴えやすい

■ MIL記法



4つの記号で図示。理解しやすい
回路図に結びつけやすい

3つの基本関数 - AND, OR, NOT -

■ 真理値表による定義

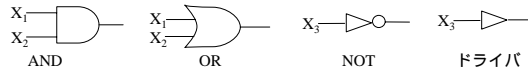
X_1	X_2	AND	OR
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

X_1	NOT
0	1
1	0

■ ブール代数: 論理変数と論理演算を記号化して表現する

AND: $X_1 \cdot X_2$ OR: $X_1 + X_2$ NOT: $\overline{X_1}$

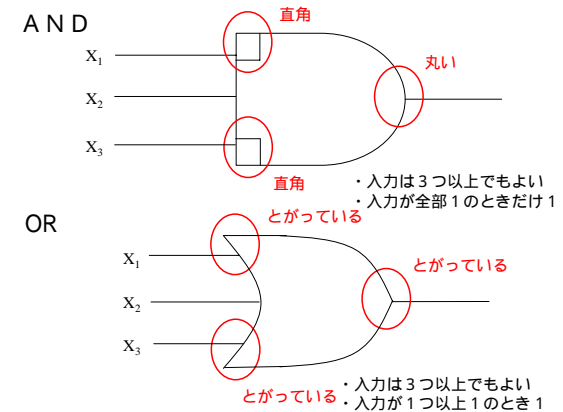
■ MIL記法: 4つの図式と結線で表現する



論理回路基礎

東大・坂井

MIL記法の書き方 (米国military)



論理回路基礎

東大・坂井

NAND, NOR

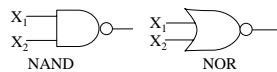
■ 真理値表による定義

X_1	X_2	NAND	NOR
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

■ ブール代数

NAND: $\overline{X_1 \cdot X_2}$ NOR: $\overline{X_1 + X_2}$

■ MIL記法



論理回路基礎

東大・坂井

XOR, EQUIV

■ 真理値表による定義

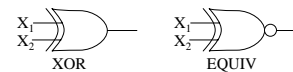
X_1	X_2	XOR	EQUIV
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

XORは入力の1つだけ1のとき1
EQUIVは $X_1 = X_2$ のとき1

■ ブール代数

XOR: $X_1 \oplus X_2$ EQUIV: $X_1 \odot X_2$

■ MIL記法



論理回路基礎

東大・坂井

完備性 (Completeness)

- 「M入力N出力のすべての論理関数を、少数の基本論理関数の組合せで表現できる」とき、その基本論理関数の集合を、「完備集合」(Complete Set)という
- 完備集合の例
 - {AND, OR, NOT}
 - {AND, NOT}
 - {OR, NOT}
 - {NAND}
 - {NOR}

論理回路基礎

東大・坂井

完備性の証明手順(1) {AND, OR, NOT}

■ 帰納法で証明する

- 1入力1出力の論理関数(全部で2種類)がすべて{AND, OR, NOT}の組合せで表現できることを証明する(自明)
2. M入力1出力の関数を{AND, OR, NOT}の組合せで表現できたと仮定して、M + 1入力1出力の関数が表現できることをいう

I_1, I_2, \dots, I_M	I_{M+1}	Out
F ₁	0	1
	1	0
F ₂	0	0
	1	1

$$F = F_1 \cdot \overline{I_{M+1}} + F_2 \cdot I_{M+1}$$

- (1) F₁, F₂はM入力：帰納法の仮定より表現可能
 (2)上の式は、F₁, F₂, I_{M+1}と2入力のAND, OR, NOTだけでできている

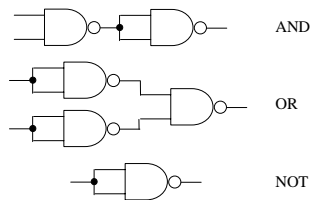
Fは{AND, OR, NOT}の組合せで表現可能

論理回路基礎

東大・坂井

完備性の証明手順(2) 一般の場合

- (さきと同様に)帰納法で証明する
- 当該集合の要素で{AND, OR, NOT}が作れることを言う
 - 例: {NAND}



論理回路基礎

東大・坂井

ブール代数

■ 演算規則

- $X + 0 = X$ $X \cdot 0 = 0$ $X + 1 = 1$ $X \cdot 1 = X$
- $X + X = X$ $X \cdot X = X$ $X + \overline{X} = 1$ $X \cdot \overline{X} = 0$
- $X + Y = Y + X$ $X \cdot Y = Y \cdot X$ (交換法則)
- $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ (結合法則)
- $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ $X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$ (分配法則)
- $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ (ド・モルガンの定理)

論理回路基礎

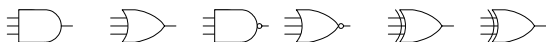
東大・坂井

多入力素子

■ 多入力素子

- 2入力の演算について、交換法則と結合法則が成り立つときに、これを多入力演算（3個以上の入力をもつ演算）に拡張することができる

x_0	x_1	x_2	AND	OR	NAND	NOR	XOR	EQ
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1



論理回路基礎

東大・坂井

用語の定義

■ リテラル

- ある論理変数 X が与えられたとき、 X または \overline{X} をリテラル(literal)と呼ぶ

■ 積項・和項

- リテラルの論理積（2変数以上、3変数以上であつてもよい）を積項(product term)と呼ぶ。同様に、リテラルの論理和を和項(sum term)と呼ぶ。

■ 最小項・最大項

- N 個のリテラルの論理積（ただしリテラルはすべて異なる）からなる積項を最小項(minterm)と呼ぶ。同様に、 N 個のリテラルの論理和（ただしリテラルはすべて異なる）からなる和項を最大項(maxterm)と呼ぶ。

論理回路基礎

東大・坂井

標準形

■ 加法標準形(積和標準形)

- 論理関数を、**最小項の論理和**として表現したもの
- 論理関数は必ず加法標準形で表現される(展開定理)
 - 証明: 完備性の証明の後半を繰り返し用いればよい

$$\begin{aligned}
 & F(i_1, i_2, \dots, i_M) \\
 = & \overline{i_1} \cdot \overline{i_2} \cdot \dots \cdot \overline{i_M} \cdot F(0, 0, \dots, 0) \\
 & + i_1 \cdot \overline{i_2} \cdot \dots \cdot \overline{i_M} \cdot F(0, 0, \dots, 1) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_M \cdot F(1, 1, \dots, 1)
 \end{aligned}$$

論理回路基礎

東大・坂井

加法標準形と真理値表

■ 加法標準形の最小項

- 真理値表で、論理関数の値が1になるときのリテラルの組み合わせをあらわしている

■ 加法標準形

- 「論理関数の値が1になるときのリテラルの積(AND)」の論理和(OR)

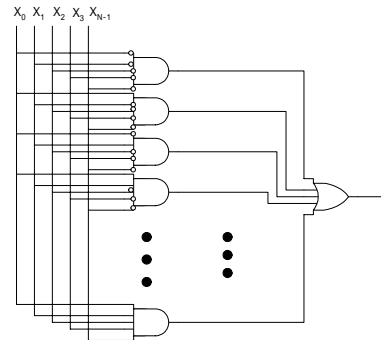
4入力1出力論理関数の真理値表

X	Y	Z	W	O
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$\overline{X}YZW + \overline{X}YZ\overline{W} + \overline{X}Y\overline{Z}W + \overline{X}Y\overline{Z}\overline{W} + \overline{X}YZ\overline{W} + \overline{X}Y\overline{Z}W + \overline{X}YZW + XYZW$$

論理回路基礎

加法標準形の一般形



注意：加法標準形は、いつも論理関数のもっとも簡単な表現法になるとは限らない

論理回路基礎

東大・坂井

加法標準形の記述法

■ 例

4入力1出力論理関数の真理値表

X	Y	Z	W	O	
0	0	0	0	0	(0)
0	0	0	1	0	(1)
0	0	1	0	1	(2)
0	0	1	1	1	(3)
0	1	0	0	1	(4)
0	1	0	1	0	(5)
0	1	1	0	1	(6)
0	1	1	1	0	(7)
1	0	0	0	1	(8)
1	0	0	1	0	(9)
1	0	1	0	1	(10)
1	0	1	1	1	(11)
1	1	0	0	0	(12)
1	1	0	1	0	(13)
1	1	1	0	0	(14)
1	1	1	1	1	(15)

$$O = (2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 15)$$

論理回路基礎

東大・坂井

加法標準形の記述法 (続)

1. 真理値表を、「入力の昇順」に書き、行番号(0から)を上から順番につける。
入力の昇順とは、「N個の入力をNビットの2進数とみなして小さいものから順番」、という意味
2. 1で出力が1になる行の行番号を () の括弧内に並べて書く
各行が該当する最小項を表す

論理回路基礎

東大・坂井

練習問題 = 宿題

- 1 ド・モルガンの定理を真理値表を用いて証明せよ
- 2 次の論理式を加法標準形に直せ。答えはブール代数の式と () の式の両方で示せ。
 - $X \oplus Y$
 - $X \oplus Y \oplus Z$
 - $(X + Y + Z) \cdot (Y + Z + W)$
- 3 論理関数を、最大項の論理積として表現したものを「乗法標準形」と呼ぶ。
 - 乗法標準形の求め方を示せ
 - 2の最初の2つの式を乗法標準形にせよ

論理回路基礎

東大・坂井