第6章　対称性と保存則

6.1　対称操作と対称オペレータ

与えられた状態にある操作をしても、その後の物理が変らないとき、対称操作という。具体的には $|\psi(t)\rangle$ が運動方程式の解のとき、操作 $\widehat{T}$ を施した $\widehat{T}\,|\psi(t)\rangle$ も元の運動方程式を満せば、この操作は対称操作と呼ばれ、この物理システムには対称性があるという。$i\hbar\; d\widehat{T}\,|\psi(t)\rangle\,/dt = \widehat{H}\widehat{T}\,|\psi(t)\rangle$ であるが、左辺は $i\hbar\; d\widehat{T}\,|\psi(t)\rangle\,/dt = \widehat{T}\; i\hbar\; d\,|\psi(t)\rangle\,/dt = \widehat{T}\widehat{H}\,|\psi(t)\rangle$ となるので、結局

$$\widehat{H}\widehat{T} = \widehat{T}\widehat{H}$$

が成立する。このとき $\widehat{H}$ と $\widehat{T}$ が交換するという。

6.2　保存則

行列の性質より、二つのオペレータが交換するとき、それぞれのオペレータは共通の固有状態をとる (縮退しているときには、共通の固有状態をとるようにできる) ことが証明できる。$\widehat{H}$ の固有状態は定常状態である。このため、対称オペレータの固有状態は定常状態であることが結論できる。

- 対称オペレータの固有値は保存量である。

6.3　二回対称性とパリティ

二回操作を行うと元に戻る操作は、鏡像操作、原点対称操作、粒子交換など種類が多い。$\widehat{T}^2 = \widehat{I}$ である。これより、$\widehat{T}$ の固有値を t とするとき、$t^2 = 1$ が成立し、$t = \pm 1$ であることが導かれる。二回対称性が成立するとき、これらの固有値は保存量である。$t = 1$ を偶パリティ、$t = -1$ を奇パリティという。

整数スピンの同一粒子の交換操作は偶パリティ、半整数スピンの同一粒子の交換操作は奇パリティであり、これが原因となって、Bose-Einstein 統計や Fermi-Dirac 統計が誘導される。

6.4　並進対称性と運動量

進行方向にポテンシャルの凸凹などがない場合には、並進対称オペレータ $\widehat{T}(-x)$ に対する対称性が成立し、$\widehat{T}(-x)$ の固有値は保存量となる。時間経過オペレータ $\widehat{U}(t,t')$ から $\widehat{H}(t)$ を誘導したように、$-i\hbar\; d\widehat{T}(-x)/dx$ を定義すると、この固有値も保存量となる。このオペレータは実は運動量オペレータ $\widehat{p}$ であり、この結果運動量も保存量となる。

6.5　回転対称性と角運動量

z 軸の周りの回転オペレータ $\widehat{R}_z(-\theta)$ から、同様に、角運動量オペレータ J_z が誘導できる。x 軸の周りの回転、y 軸の周りの回転は加法的ではなため、次の式が成立する。

$$[\widehat{R}_x(\theta), \widehat{R}_y(\phi)] = \widehat{I} - \widehat{R}_z(\theta\phi) + O^3$$

たったこれだけの事実から

$$[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i\hbar\widehat{J}_z$$
$$[\widehat{J}_y, \widehat{J}_z] = i\hbar\widehat{J}_x$$
$$[\widehat{J}_z, \widehat{J}_x] = i\hbar\widehat{J}_y$$

が誘導され、運動量に対する種々の知見が得られる。

- 全角運動量の二乗は j を整数か半整数として $j(j+1)\hbar^2$ の値をとる。
- 全角運動量 $j\hbar$ 状態の、ある特定の軸の周りの角運動量を測定すると、必ず、最小値 $-j\hbar$ から最大値 $j\hbar$ の $\hbar$ ごとの飛び飛びの値のいずれかが観測される。

6.6　水素原子モデル

略。