



東京大学 工学部 計数工学科/物理工学科

## 応用音響学：音声分析 (5)

# CSM 分析と等価パラメータセット

嵯峨山 茂樹 <[sagayama@hil.t.u-tokyo.ac.jp](mailto:sagayama@hil.t.u-tokyo.ac.jp)>

東京大学 工学部 計数工学科 <http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/>

---

- 複合正弦波モデル(CSM)とその解法
- CSM パラメータの性質
- CSM と LSP の関係: 拘束条件つき複合正弦波モデル
- 直交多項式理論から見た LPC と CSM の対称性: 統一理論
- スペクトルパラメータの相互変換



# 複合正弦波モデル (CSM) の motivation

## ■ 全極型フィルタの問題点

- 計算語長が必要 (巡回型  $> 16$  bits では不足, 約24bits)
- 振幅制御性が問題 — 異常振幅現象
- パラメータ量子化に細心の注意が必要
- 時変フィルタ — 解析, 制御が困難

## ■ 周波数領域のパラメータが有利

- 音声のフォルマント (音響音声学の分野)
- 聴覚的にはピーク周波数が重要 (共振帯域幅はあまり効かない)
- 音声認識にはスペクトルが直結

## ■ 正弦波形モデル

- **Non-harmonic** な正弦波の重ね合わせで **formant** 表現
- 波形合成: 制御性, 計算量, 必要語長ともに有利. 頑健.



# 複合正弦波モデル (CSM) 1979

- モデルパラメータ  $2n$  個
 
$$\begin{cases} n \text{ 個の周波数} & \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \\ n \text{ 個の強度} & \{m_1, m_2, \dots, m_n\} \end{cases}$$

- 波形モデル ( $t$  は離散時刻)

$$y_t = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + \dots + A_n \sin \omega_n t, \quad \text{ただし} \quad A_i = \sqrt{2m_i}$$

(位相は無視 — 聴覚特性, 情報圧縮目的, 認識特徴量)

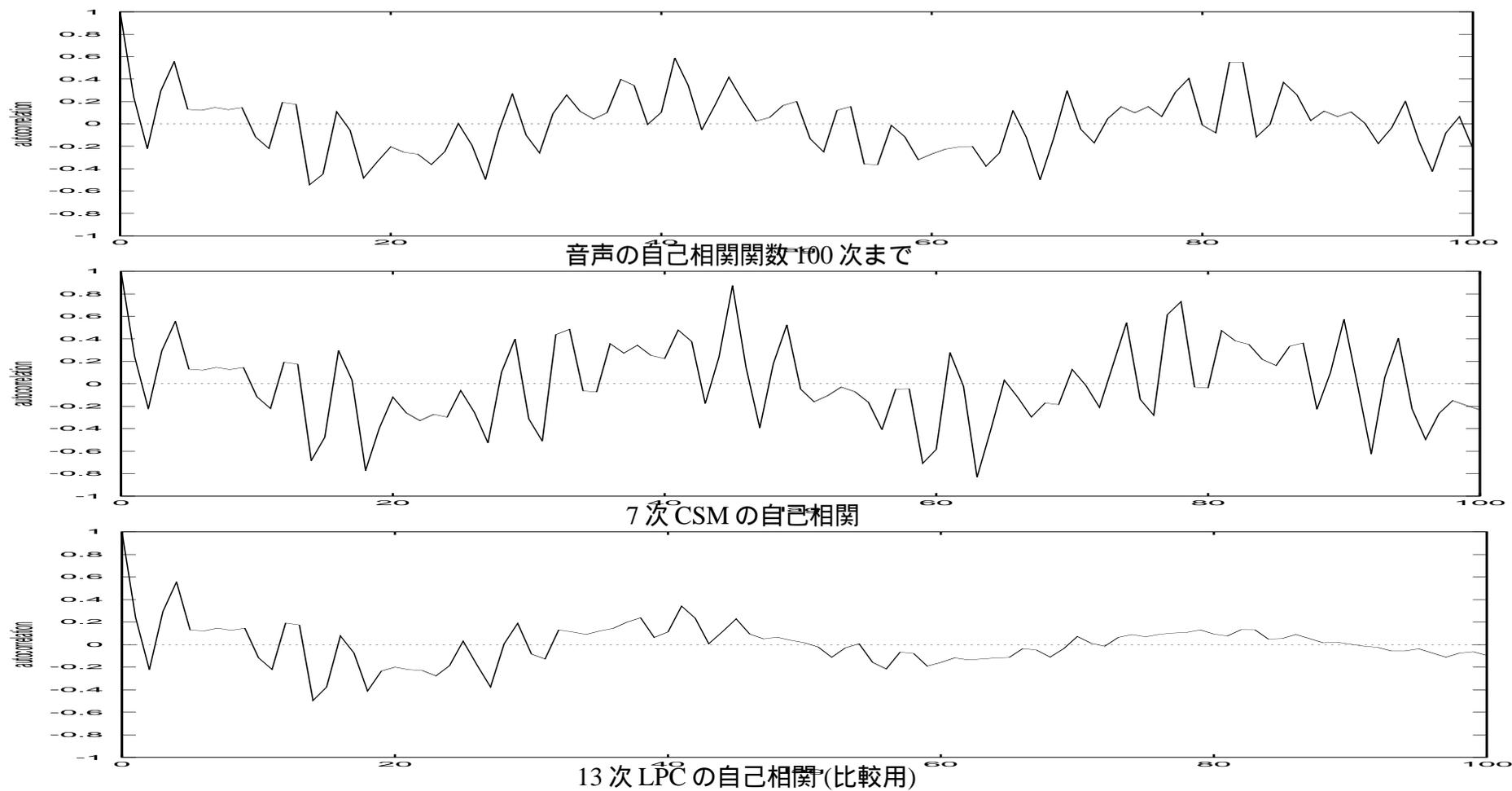
- **CSM 自己相関方程式: モデル自己相関と標本自己相関を等置**

$$m_1 \cos \tau \omega_1 + m_2 \cos \tau \omega_2 + \dots + m_n \cos \tau \omega_n = v_\tau, \quad \tau = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

$$n = 2 \text{ (2次) の例: } \begin{cases} m_1 & +m_2 & = v_0 \\ m_1 \cos \omega_1 & +m_2 \cos \omega_2 & = v_1 \\ m_1 \cos 2\omega_1 & +m_2 \cos 2\omega_2 & = v_2 \\ m_1 \cos 3\omega_1 & +m_2 \cos 3\omega_2 & = v_3 \end{cases}$$



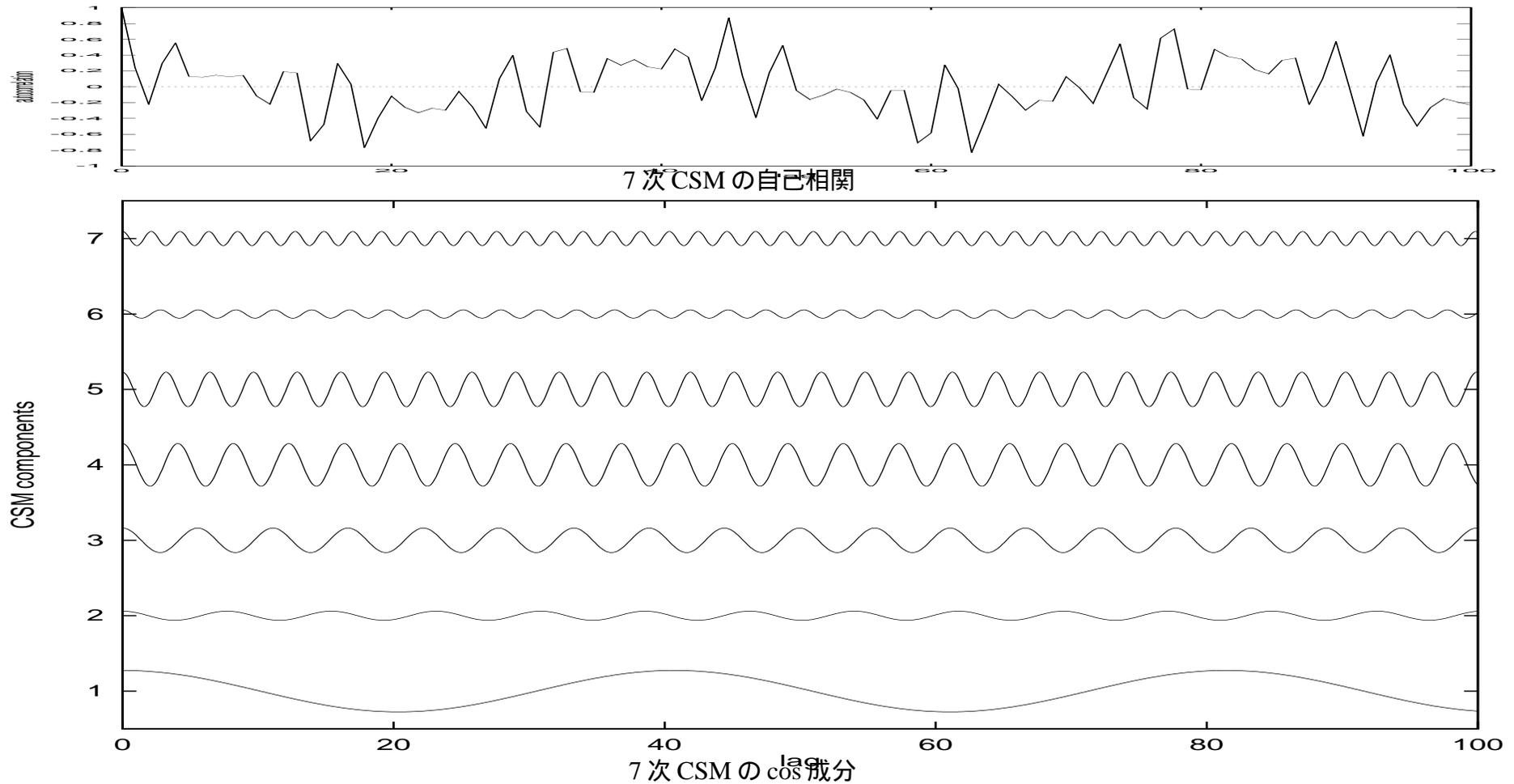
# CSM自己相関方程式の意味 — 相関領域のマッチング例



図：相関領域のマッチングの例



# CSM 自己相関方程式の意味 (相関領域のマッチング)



図：相関領域のマッチングの例



# CSM自己相関方程式の解法の導出 ( $n = 2$ の例)

## 1. 変数置換 $x = \cos \omega$ により, $\cos k\omega$ の Tchebychef 展開

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = v_0 \\ m_1 \cos \omega_1 + m_2 \cos \omega_2 = v_1 \\ m_1 \cos 2\omega_1 + m_2 \cos 2\omega_2 = v_2 \\ m_1 \cos 3\omega_1 + m_2 \cos 3\omega_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 + m_2 = u_0 \\ m_1 \cos \omega_1 + m_2 \cos \omega_2 = u_1 \\ m_1 \cos^2 \omega_1 + m_2 \cos^2 \omega_2 = u_2 \\ m_1 \cos^3 \omega_1 + m_2 \cos^3 \omega_2 = u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 + m_2 = u_0 \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 = u_1 \\ m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = u_2 \\ m_1 x_1^3 + m_2 x_2^3 = u_3 \end{cases}$$

但し  $\cos 2\omega = 2 \cos^2 \omega - 1$ ,  $\cos 3\omega = 4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega$  より,  $u_0 = v_0$ ,  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = \frac{1+u_1}{2}$ ,  $u_3 = \frac{4v_1+3v_3}{4}$

## 2. $\{x_1, x_2\}$ を根とする CSM 多項式 $P(x) = x^2 + p_1 x + p_2$

$$\begin{aligned} 0 &\equiv m_1 P(x_1) x_1^k + m_2 P(x_2) x_2^k \quad (k = 0, 1) \\ &= m_1 (x_1^2 + p_1 x_1 + p_2) x_1^k + m_2 (x_2^2 + p_1 x_2 + p_2) x_2^k \\ &= (m_1 x_1^{k+2} + m_2 x_2^{k+2}) + p_1 (m_1 x_1^{k+1} + m_2 x_2^{k+1}) + p_2 (m_1 x_1^k + m_2 x_2^k) \\ &= u_{k+2} + p_1 u_{k+1} + p_2 u_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 + p_1 u_1 + p_2 u_0 = 0 \\ u_3 + p_1 u_2 + p_2 u_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

## 3. CSM 多項式 $P(x)$ の根を求めれば, $\omega_i = \cos^{-1} x_i$

## 4. $x_i$ を代入すれば, 連立一次方程式



# CSM 自己相関方程式の解法

音声波形  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$

**標本自己相関関数計算**  $\{v_l\}$

$$v_l = \frac{1}{N} \sum_{t=l}^{N-1} Y_t Y_{t-l}, \quad v_{-l} = v_l, \quad l = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

乗  $(2n + 1)(N - n)$   
 除  $[2n]$   
 加  $(2n + 1)(N - n - 1)$   
 減  $0$

**Tchebychef 変換**  $\{u_l\}$

$$u_l = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} v_{2k-l}, \quad l = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

乗  $n^2 + n - 2$   
 除  $0$   
 加  $n(n - 1)$   
 減  $0$

**Hankel 行列方程式求解**  $\{p_i^{(n)}\}$

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n^{(n)} \\ p_{n-1}^{(n)} \\ p_{n-2}^{(n)} \\ \vdots \\ p_1^{(n)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{2n-1} \end{pmatrix}$$

直交多項式の漸化式  
 乗  $(2n - 1)(n - 1)$   
 除  $2n - 1$   
 加  $3n(n - 1)/2$   
 減  $n(n + 5)/2$

**$n$  次代数方程式求根**  $\{x_i\}$

$$P_n(x) \equiv x^n + p_1^{(n)} x^{n-1} + \dots + p_n^{(n)} = 0$$

**Newton-Raphson 法**  
 $n^2$  オーダ  
 (収束条件による)

多項式近似  
 (ライブラリ関  
 数など)

**逆 cos 変換**  $\{\omega_i\}$

$$\omega_i = \cos^{-1} x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

**Vandermonde 行列方程式求解**  $\{m_i\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

高速解法  
 乗  $n(n - 1)/2$   
 除  $n(n - 1)/2$   
 加  $0$   
 減  $n(n - 1)$

CSM 周波数  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

CSM 強度  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$



# CSM 周波数/強度の例

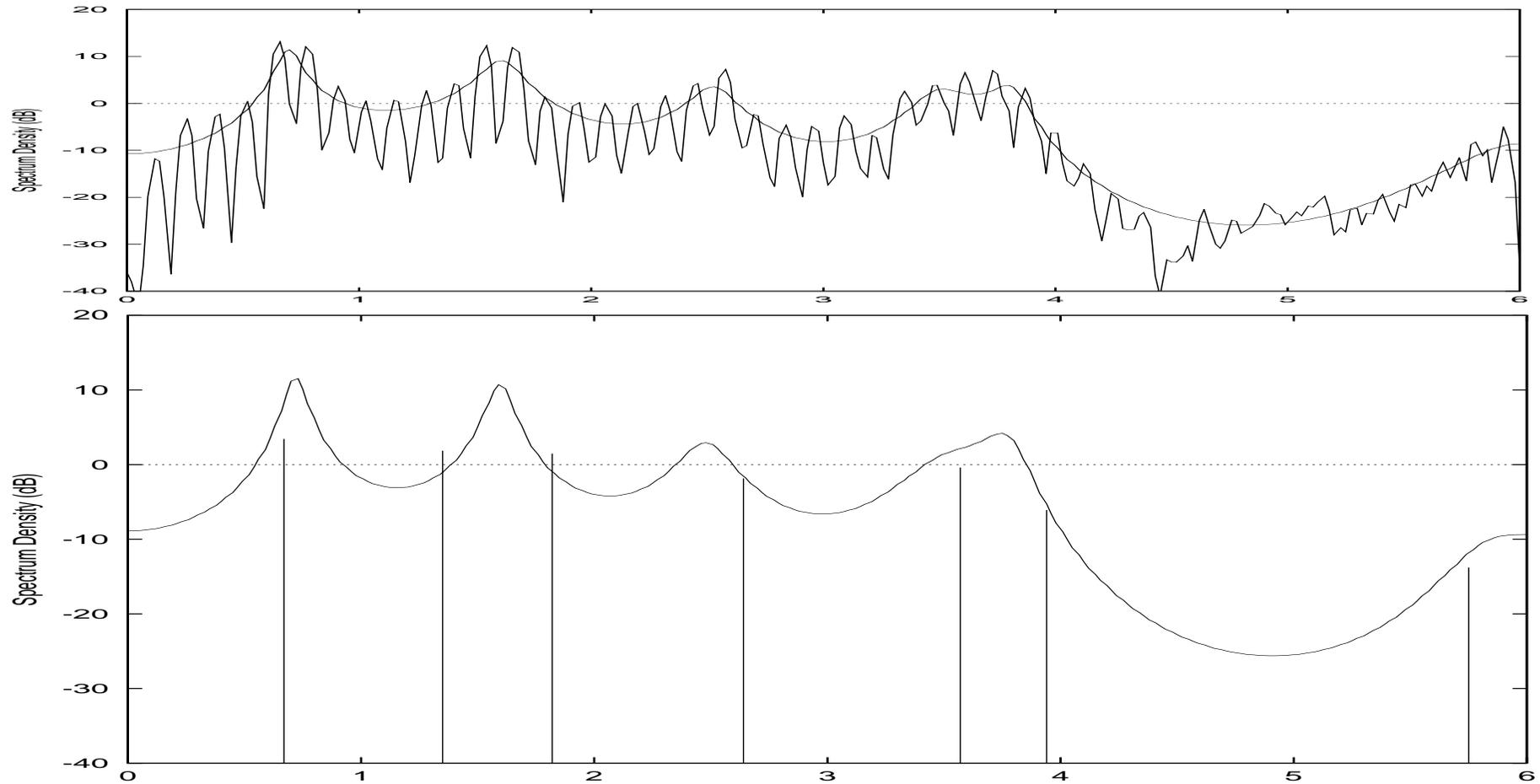
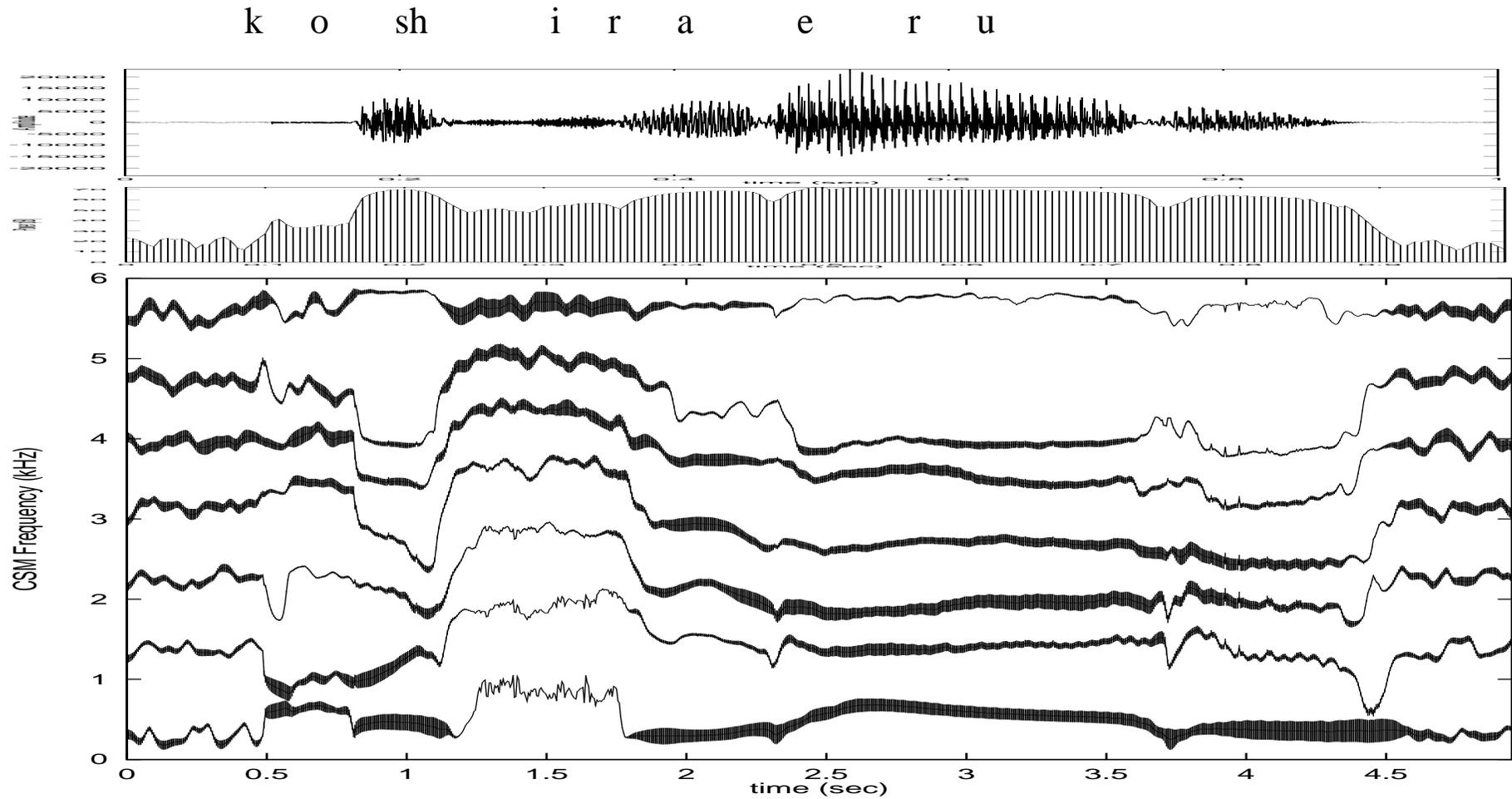


図: CSM 周波数/強度およびLPC 推定全極スペクトル (男声 /a/)



# CSM パラメータの時間パターン例



図：音声 CSM 分析時間パターン例（「こしらえる」）— 線幅は強度の平方根に比例



# LSP 周波数の時間パターン例 (比較)

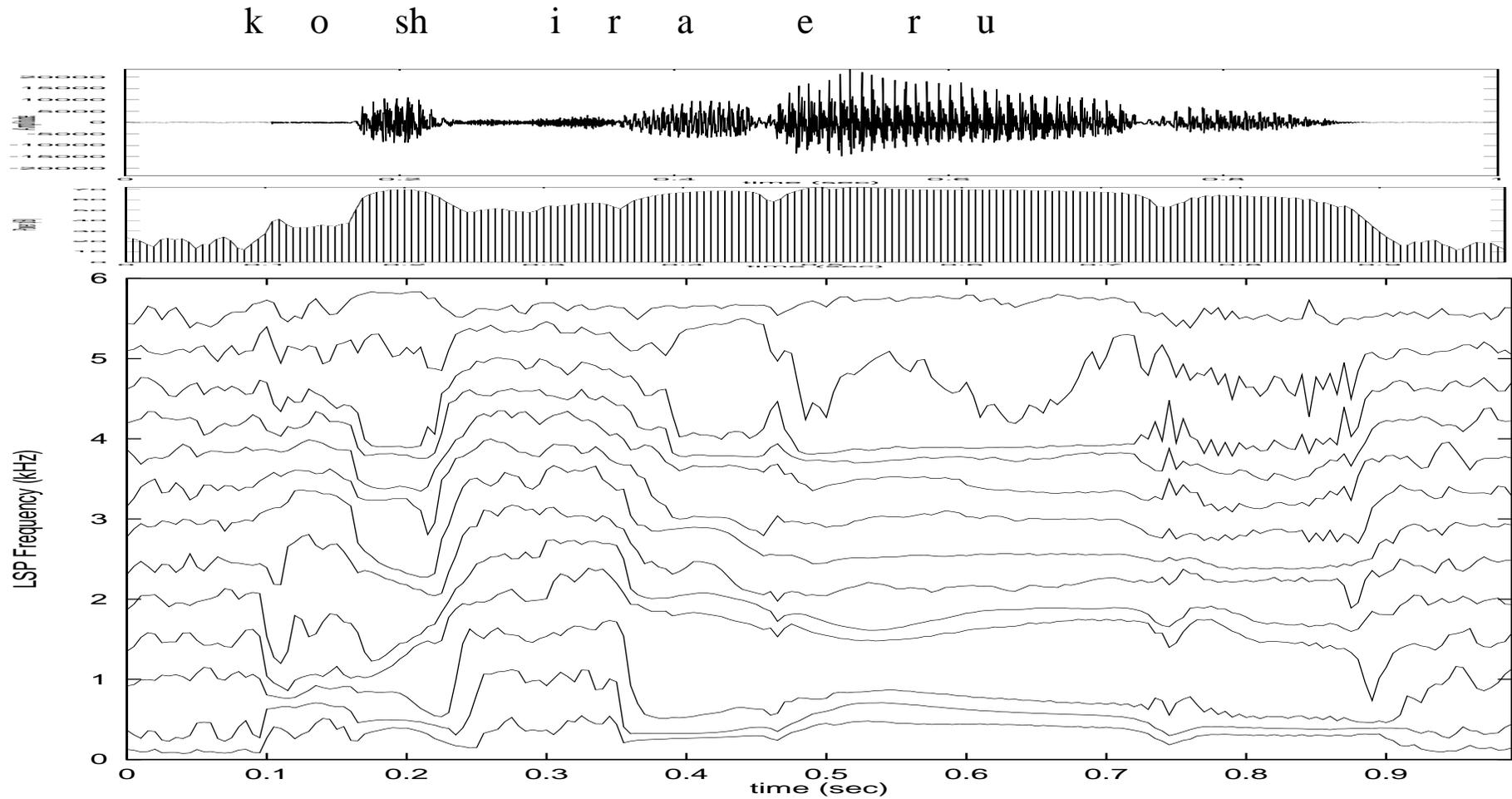
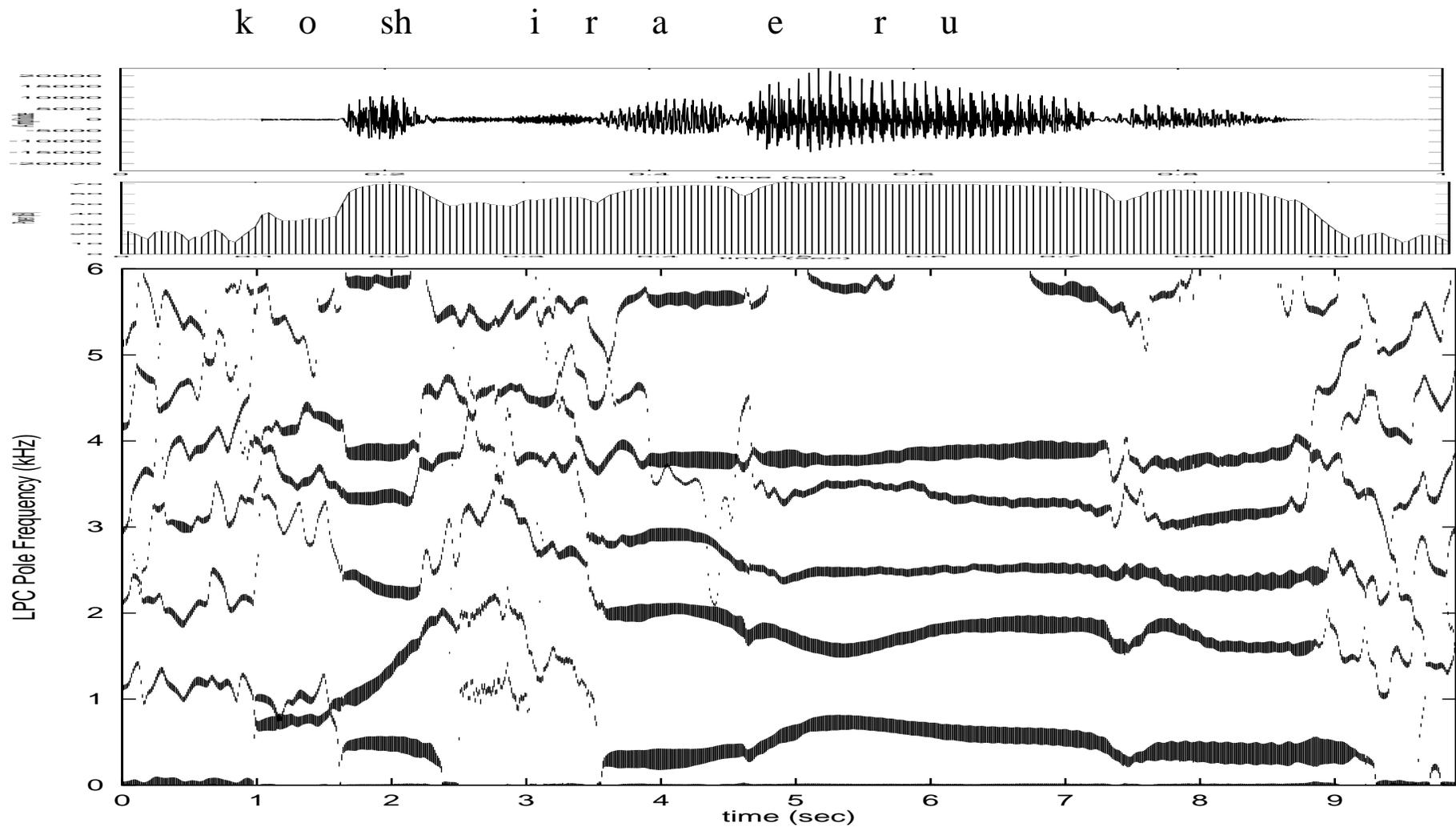


図: LSP 周波数の時間パターン例 (「こしらえる」)  
時間方向に滑らかに動くため, 補間特性が優れている。



# 線形予測極の時間パターン例 (比較)

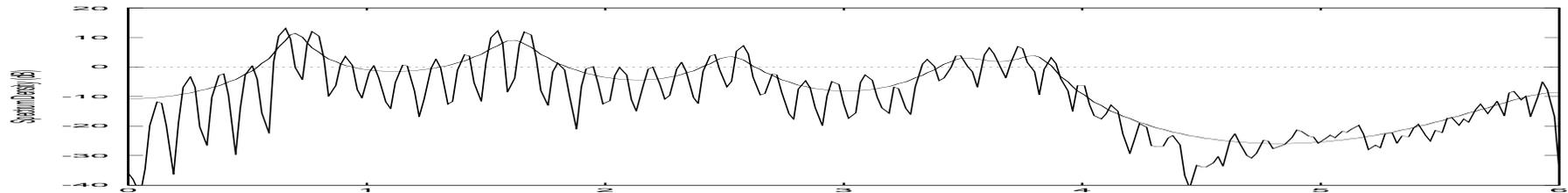


図：音声の13次線形予測極の時間パターン例（「こしらえる」）

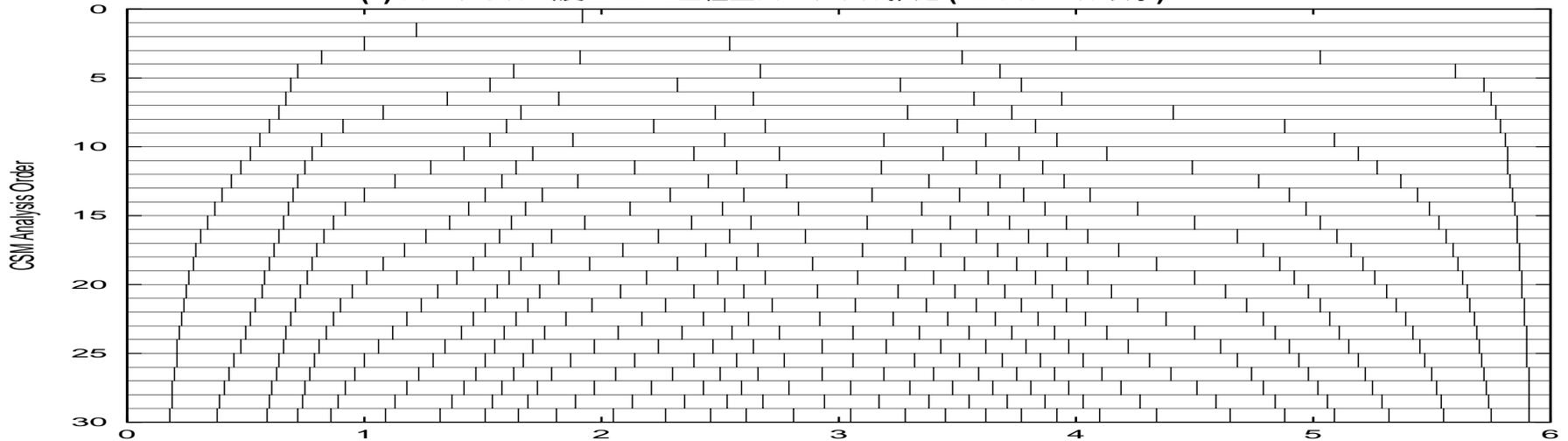


# CSM 周波数分布の性質 – 異なる分析次数

- $n$  次 CSM 分析の CSM 周波数は、 $(n - 1)$  次 CSM 分析の CSM 周波数と交番する。
- $n$  次より高い CSM 分析の CSM 周波数は、 $n$  次 CSM 分析の CSM 周波数の間ごとに1つ以上配置される。



(a) スペクトル密度と LPC 全極型スペクトル推定 (dB スケール表示)



(b) 異なる次数の CSM 周波数分布の関係



# 拘束条件つき CSM と LSP の関係

## ■ 4種の自己相関方程式が存在 (他には存在しない)

$$\begin{aligned}
 m_1 \cos l\omega_1 + \cdots + m_n \cos l\omega_n &= v_l \quad (\text{拘束なし}) \\
 m_0 + m_1 \cos l\omega_1 + \cdots + m_n \cos l\omega_n &= v_l \quad (\text{直流を含む}) \\
 m_1 \cos l\omega_1 + \cdots + m_n \cos l\omega_n + (-1)^l m_{n+1} &= v_l \quad (\text{上限周波数を含む}) \\
 m_0 + m_1 \cos l\omega_1 + \cdots + m_n \cos l\omega_n + (-1)^l m_{n+1} &= v_l \quad (\text{直流と上限周波数})
 \end{aligned}$$

## ■ 解法: 拘束なし CSM 方程式へ変換

## ■ 解の存在: $0 < \omega_1 < \cdots < \omega_n < \pi$ , $[m_0, ] m_1, \cdots, m_n, [m_{n+1}] >$ 0 の必要十分条件: 自己相関関数が正定値列

## ■ 奇数変数の場合の CSM 周波数対 $\equiv$ 奇数次の LSP 周波数 偶数変数の場合の CSM 周波数対 $\equiv$ 偶数次の LSP 周波数

## ■ 多数の LSP/CSM の性質が導かれる。



# 直交多項式理論から見た LPC と CSM

- **CSM** の本質は，音声スペクトル密度随伴直交多項式  $P_n(x)$  (実軸上の変数  $x = \cos \omega$ )

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_k(\cos \omega) P_l(\cos \omega) f(\omega) d\omega = \int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) g(x) dx = \begin{cases} Q_k > 0 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

- 音声スペクトル密度随伴直交多項式の他の可能性は？ **LPC** (単位円上の変数  $z = e^{j\omega}$ ) 単位円上の直交多項式理論 (**Szegő 1921**)

音声のパワースペクトルを重みとする  $z$  の直交多項式  $A_p(z)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_k(e^{j\omega}) A_l^*(e^{j\omega}) f(\omega) d\omega = \oint_C A_k(z) A_l^*(z) h(z) dz = \begin{cases} \sigma_k^2 > 0 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

- 変数の物理的意味:

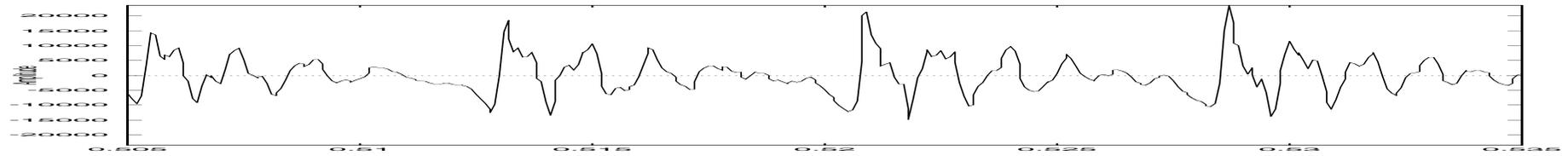
$z = \exp j\omega$ : 遅れ(進み)演算子,  $x = \cos \omega = \frac{z + z^{-1}}{2}$ : 補間演算子

- 最適逆フィルタ設計問題 ( $a_0 = p_0 = 1$  の拘束で出力パワー-min)

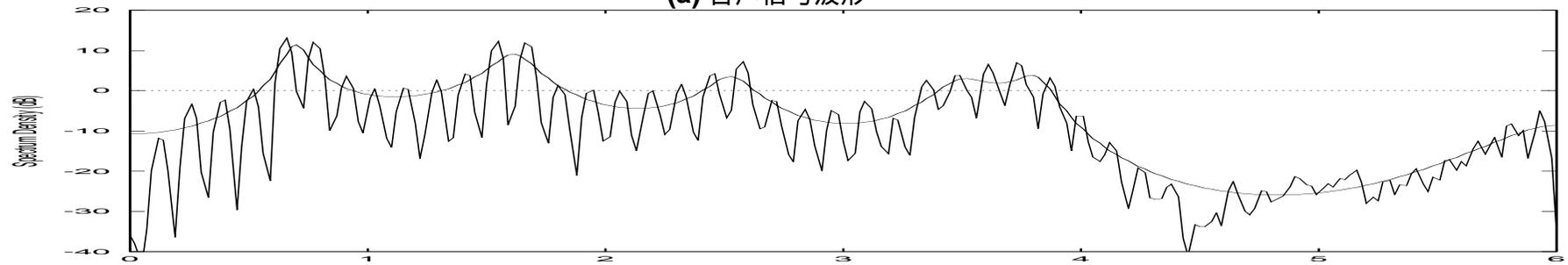
- **LPC**: 最小(最大)位相フィルタ
- **CSM**: 直線(零)位相フィルタ



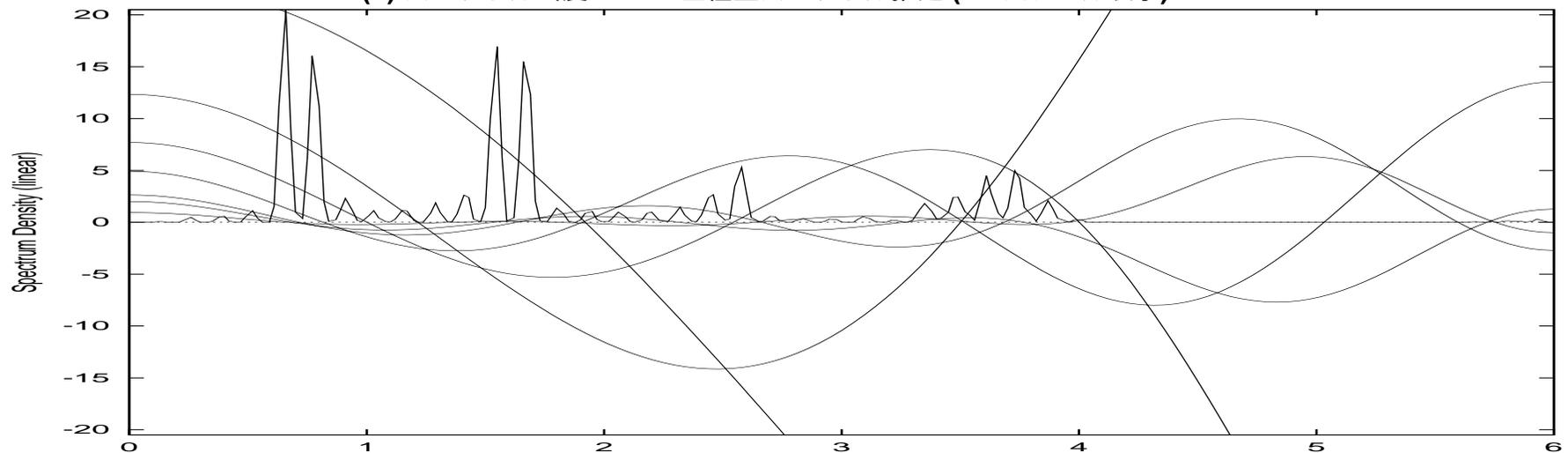
# 音声スペクトルと直交多項式の例



(a) 音声信号波形



(b) スペクトル密度とLPC全極型スペクトル推定 (dB スケール表示)



(c) スペクトル密度と1~7次直交多項式 (線形スケール表示)

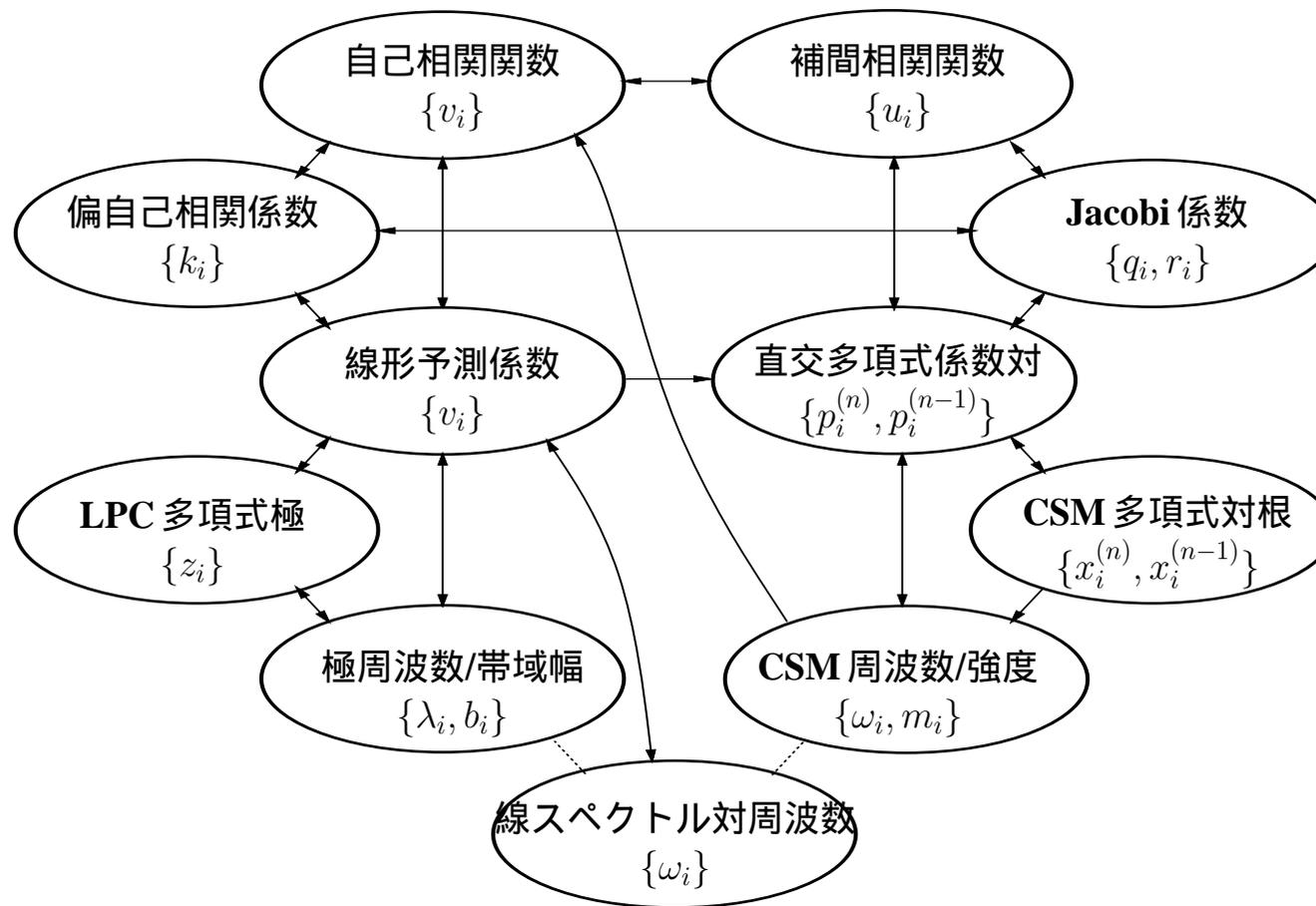


# 直交多項式理論による LPC と CSM の統一 (1980)

	LPC	CSM
基本演算子	$z = e^{j\omega}$ 遅れ演算子	$x = \cos \omega$ 補間演算子
冪関数列	$\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$	$\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$
冪関数間の内積	$(z^k, z^l) = \int_{-\pi}^{\pi} z^k(z^l)^* dF(\omega)$ $= \int_{-\pi}^{\pi} z^{k-l} dF(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{k-l} \omega dF(\omega) = v_{k-l}$ (自己相関関数)	$(x^k, x^l) = \int_{-\pi}^{\pi} x^k(x^l)^* dF(\omega)$ $= \int_{-\pi}^{\pi} x^{k+l} dF(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{k+l} \omega dF(\omega) = u_{k+l}$ (「補間相関関数」)
直交多項式	$A_p(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \dots + a_p = \frac{T_p(z)}{ V_p }$	$P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = \frac{H_n(x)}{ U_n }$
連立方程式 (正規方程式)	$\begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & \dots & v_{p-1} \\ v_1 & v_0 & v_2 & \dots & v_{p-2} \\ v_2 & v_1 & v_0 & \dots & v_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{p-1} & v_{p-2} & v_{p-3} & \dots & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p \\ a_{p-1} \\ a_{p-2} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_p \\ v_{p-1} \\ v_{p-2} \\ \vdots \\ v_1 \end{pmatrix}$ (Toeplitz 行列方程式)	$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{n-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ u_2 & u_3 & u_4 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ p_{n-2} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{2n-1} \end{pmatrix}$ (Hankel 行列方程式)
逐次式	$A_0(z) = 1$ , (Levinson-Durbin-板倉の逐次式, Schur) $A_i(z) = zA_{i-1}(z) - k_i z^{i-1} A_{i-1}(1/z)$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, p$ )	$P_{-1}(x) = 0$ , $P_0(x) = 1$ , (直交多項式の漸化式, Jacobi) $P_i(x) = (x - q_i)P_{i-1}(x) - r_{i-1}P_{i-2}(x)$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )
中間変数	$k_i = \frac{(zA_{i-1}(z), 1)}{\ A_{i-1}(z)\ ^2}$ (偏相関 (PARCOR) 関数, 反射係数)	$q_i = \frac{(xP_{i-1}(x), P_{i-1}(x))}{\ P_{i-1}(x)\ ^2}$ , $r_{i-1} = \frac{\ P_{i-1}(x)\ ^2}{\ P_{i-2}(x)\ ^2}$ (「Jacobi 係数」)
中間変数の計算法	$\prod_{i=1}^{l-1} (1 - k_i^2) = \ A_{l-1}(z)\ ^2 = \frac{1}{v_0} \sum_{i=0}^{l-1} a_i^{(l-1)} v_i$ $k_l \prod_{i=1}^{l-1} (i - k_i^2) = (zA_{l-1}(z), 1) = \frac{1}{v_0} \sum_{i=0}^{l-1} a_i^{(l-1)} v_{l-i}$	$\prod_{i=1}^{l-1} r_i = \ P_{l-1}(x)\ ^2 = \frac{1}{u_0} \sum_{i=0}^{l-1} p_i^{(l-1)} u_{2l-i-2}$ $\left(\sum_{i=1}^l q_i\right) \left(\prod_{i=1}^{l-1} r_i\right) = (P_{l-1}(x), x^l) = \frac{1}{u_0} \sum_{i=0}^{l-1} p_i^{(l-1)} u_{2l-i-1}$
拘束	$-1 < k_i < 1$ ( $i = 1, 2, 3, \dots, p$ )	$-1 < q_i < 1$ , $0 < r_{i-1} < 1$ ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )
周波数領域のパラメータ	$\lambda_i = \arg z_i$ , $b_i = -\log  z_i $ , $w = \frac{v_0}{\ A_p(z)\ ^2}$ (フォルマント)	$\omega_i = \arccos x_i$ , $m_i = \frac{\ P_{n-1}(x)\ ^2}{P_{n-1}(x_i)P'_n(x_i)}$ (CSM 周波数と強度)
周波数領域の表現	$f(\omega) = \frac{w}{2\pi} \prod_{i=1}^p (e^{j\omega} - e^{j\lambda_i - b_i})$ (全極スペクトル)	$f(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} (\delta(\omega - \omega_i) + \delta(\omega + \omega_i))$ (線スペクトル)
時間領域の表現	$y_t + a_1 y(t-1) + \dots + a_p y(t-p) = \sqrt{w} \epsilon_t$ (線形予測モデル)	$y_t = \sqrt{2m_1} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \dots + \sqrt{2m_n} \sin(\omega_n t + \phi_n)$ (複合正弦波モデル)
二次形式の最小化:	$T_F[\mathbf{a}] = \int_{-\pi}^{\pi}  z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \dots + a_p ^2 dF(\omega)$ $z = e^{j\omega}$ (Toeplitz 形式) 最小位相フィルタの出力パワー	$H_F[\mathbf{p}] = \int_{-\pi}^{\pi}  x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n ^2 dF(\omega)$ $x = \cos \omega$ (Hankel 形式) 直線位相フィルタの出力パワー



# 音声スペクトルパラメータ群の相互変換関係





# 等価な音声スペクトルパラメータセットのまとめ

- 目的
- 量子化特性 — bit 数削減
  - 時間補間特性 — フレームレート削減
  - 安定条件 — recursive filter
  - 合成フィルタ

パラメータ	記号	安定性条件	合成フィルタ
線形予測係数	$a_i$	(下項参照)	直接型
LPC 多項式 $A_p(z)$ の根	$z_i$	単位円内部 $ z_i  < 1$	縦続フィルタ
自己相関関数	$v_i$	<b>Toeplitz</b> 型行列が正定値	なし
PARCOR 係数	$k_i$	$-1 < k_i < 1$	格子型フィルタ
LPC 多項式根	$\lambda_i$	$-\pi < \lambda_i \pi$	共振フィルタ縦続
周波数 帯域幅	$b_i$	$b_i > 0$	
補間相関関数	$u_i$	<b>Hankel</b> 型行列が正定値	なし
CSM 多項式係数対	$p_i^{(n-1)}, p_i^{(n)}$	根が交番	なし
CSM 多項式対 $P_n(x)$ $P_{n-1}(x)$ の根	$x_i^{(n)}$ $x_i^{(n-1)}$	区間 $[-1, 1]$ で交番	なし
Jacobi 係数	$p_i, q_i$	$-1 < q_i < 1, 0 < r_i < 1$ (必要条件)	なし
CSM 周波数 強度	$\lambda_i$ $m_i$	区間 $[-\pi, \pi]$ で相異なる $m_i > 0$	波形生成
LSP 周波数	$\omega_i$	区間 $[-\pi, \pi]$ 内で相異なり順 序保存	LSP フィルタ