東京大学 工学部 計数工学科/物理工学科

応用音響学：音声分析 (4) PARCOR分析

嵯峨山 茂樹 <sagayama@hil.t.u-tokyo.ac.jp>
東京大学 工学部 計数工学科 http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/

概要

- LPC正規方程式の高速解法: Levinson-Durbin-板倉アルゴリズム
- 偏自己相関係数 (PARCOR係数)
- PARCOR 格子型フィルタ
- 等価音響管モデル
- 全極型合成フィルタの安定性とパラメータ量子化

正規方程式の高速解法

- Yule-Walker方程式(正規方程式): p元連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{p-1} \\ v_1 & v_0 & \cdots & v_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{p-1} & v_{p-2} & \cdots & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$$

  v_τ は自己相関関数 (正値列をなす $\equiv$ スペクトルが正)。

- 連立一次方程式の解法
  - 一般の場合: Gaussの消去法 (p^3オーダーの計算)
  - 左辺が正値対称行列の場合: Choleski 分解
  - 左辺が正値 Toeplitz 行列の場合: Levinson アルゴリズム
  - Yule-Walker 方程式 (左辺が正値 Toeplitz 行列、右辺が特殊): Durbin-板倉 アルゴリズム

    計算量: ×: $p^2 - p + 1$回, ÷: p回, +: $\dfrac{p(p-1)}{2}$回, −: $\dfrac{p(p+3)}{2}$回

(Szegő)-Levinson-Durbin-板倉アルゴリズム

Szegő 1921,1939 (単位円上の直交多項式), Levinson 1947 (Wienerの予測理論), Durbin 1960 (時系列パラメータ推定), 板倉 1969 (音声分析)

初期: $u_0 = v_0$ (信号パワー)
反復: $i = 1, 2, \cdots, p$ **について**

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} v_{i-j} + v_i}{u_{i-1}} \quad \text{(PARCOR 係数)} \tag{1}$$

$$\alpha_i^{(i)} = -k_i \tag{2}$$

$$\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-j}^{(i-1)} \quad \textbf{for} \quad j = 1, 2, \cdots, i-1 \tag{3}$$

$$u_i = (1 - k_i^2) u_{i-1} \quad \text{(残差パワー)} \tag{4}$$

($\{\alpha_i^{(p)}\}$ **が** p **次線形予測係数。)**

PARCOR アルゴリズム

```
double corref( int p, double cor[], double alf[], double ref[] ) {
   double res,r,a; int i,j,k;
   res=1.0;
   for(i=1;i<=p;i++) {
      r=cor[i]; for(j=1;j<i;j++) r+=alf[j]*cor[i-j];
      alf[i]= -(ref[i]=(r/=res));
      for(j=0,k=i;++j<=--k;) {
         a=alf[j]; alf[j]-=r*alf[k]; if(j<k) alf[k]-=r*a;
      }
      res*=(1.0-r)*(1.0+r);
   }
   return(res);
}
```

Levinson-Durbin-板倉アルゴリズムの導出

n 次の線形予測係数を $\alpha_i^{(n)}$ と書き、$\alpha_0^{(n)} \equiv 1$ として

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} v_{i-j} = 0, \; j = 1, \cdots, n$$

に関する漸化式を導く。

(1) $n-1$ 次について、

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(n-1)} v_{i-j} = 0$$

(但し $\alpha_n^{(n-1)} \equiv 0$ と定義。) が成立。

(2) $i' = n-1-i, j' = n-1-j$ と書けば、

$$\sum_{i'=0}^{n-1} \alpha_{n-i'}^{(n-1)} v_{i'-j'} = 0, \; j' = 1, \cdots, n-1$$

(3) 任意の係数 k_n に関して、上 2 式から、

$$\sum_{i'=0}^{n-1} \{\alpha_i^{(n-1)} - k_n \alpha_{n-i}^{(n-1)}\} v_{i-j} = 0, \; j = 1, \cdots, n-1$$

(4) 上式が $j = n$ でも成立するためには、

$$k_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n-1)} v_{i-n}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i}^{(n-1)} v_{i-n}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(n-1)} v_{i-n} + v_n}{v_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i}^{(n-1)} v_{i-n}}$$

のように k_n を決めれば良い。

(5) 上式の分子を w_{n-1}、分母を u_{n-1} とすると、

$$\begin{aligned}
u_n &= v_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} v_i = v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(n)} v_i - k_n v_n \\
&= v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \{\alpha_i^{(n-1)} - k_n \alpha_{n-1}^{(n-1)}\} v_i - k_n v_n \\
&= \left[v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(n)} v_i \right] - k_n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-i}^{(n)} v_i + v_n \right] \\
&= n_{n-1} - k_n w_{n-1} = n_{n-1} - k_n k_n u_{n-1} \\
&= (1 - k_n^2) u_{n-1}
\end{aligned}$$

(6) 以上より、$u_0 = v_0$ として、$i = 1, 2, \cdots, p$ について、

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} v_{i-j} + v_i}{u_{i-1}}$$

を求め、

$$a_i^{(i)} = -k_i$$

および $j = 1, 2, \cdots, i-1$ について

$$a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - k_i a_{i-j}^{(i-1)}$$

および、

$$u_i = (1 - k_i^2) u_{i-1}$$

を繰り返せばよい。

Levinson-Durbin-板倉アルゴリズムの導出 (別)

LPC 正規方程式は逐次的に解ける。板倉による導出の概要は以下のようである。まず、

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= v_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i^{(p)} v_i \\
w_p &= v_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} a_i^{(p)} v_{p+1-i}
\end{aligned}
$$

と定義する。物理的な意味としては、σ_p^2 は線形予測誤差の 2 乗平均値 (残差パワー)、w_p は後述する偏相関値に相当する。正規方程式の右辺を左辺に移し、σ_p^2 を付加して $(p+1) \times (p+1)$ 行列で書くと

$$
\begin{pmatrix}
v_0 & v_1 & \cdots & v_p \\
v_1 & v_0 & \cdots & v_{p-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
v_p & v_{p-1} & \cdots & v_0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\sigma_p^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}
$$

さらに w_p を付け加えて行列を $(p+2) \times (p+2)$ にすると

$$
\begin{pmatrix}
v_0 & v_1 & \cdots & v_p & v_{p+1} \\
v_1 & v_0 & \cdots & v_{p-1} & v_p \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
v_p & v_{p-1} & \cdots & v_0 & v_1 \\
v_{p+1} & v_p & \cdots & v_1 & v_0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\sigma_p^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_p
\end{pmatrix}
$$

となる。係数行列は対称だからベクトルを反転してもよく、それに任意の係数 k_{p+1} を掛けて上式から辺々引くと、

$$
\begin{pmatrix}
v_0 & v_1 & \cdots & v_p & v_{p+1} \\
v_1 & v_0 & \cdots & v_{p-1} & v_p \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
v_p & v_{p-1} & \cdots & v_0 & v_1 \\
v_{p+1} & v_p & \cdots & v_1 & v_0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 - 0 \\ a_1 - k_{p+1} a_p \\ \vdots \\ a_p - k_{p+1} a_1 \\ 0 - k_{p+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\sigma_p^2 - k_{p+1} w_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_p - k_{p+1} \sigma_p^2
\end{pmatrix}
$$

を得る。k_{p+1} は任意だから、ここで $w_p - k_{p+1}\sigma_p^2 = 0$ となるように定めれば、右辺のベクトルは第一成分を除いてすべて 0 であり、左下の式において次元 p を $p+1$ に置き換えたものと同じ形をしている。従って、次元 p の線形予測係数を $\{a_i^{(p)}\}$ と書けば、

$$
\begin{aligned}
k_{p+1} &= \frac{w_p}{\sigma_p^2} = \frac{v_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} a_i^{(p)} v_{p+1-i}}{v_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i^{(p)} v_i} \\
a_i^{(p+1)} &= a_i^{(p)} - k_{p+1} a_{p-i}^{(p)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, p \\
\sigma_{p+1}^2 &= \sigma_p^2 - k_{p+1} w_p = (1 - k_{p+1}^2)\sigma_p^2
\end{aligned}
$$

を得る。これにより、LPC の係数は効率的に計算できる。これは PARCOR アルゴリズムと呼ばれる。

Norman Levinson (1912–1975)

Norman Levinson：予測理論、時系列、...

Born: 11 Aug 1912 in Boston, Massachesetts, USA
Died: 10 Oct 1975 in Boston, Massachesetts, USA

直交多項式による定式化 (Szegő, Gray, et al.)

- **単位円上($z = e^{j\omega}$)の直交多項式 (Szegő 1921):** $A_k(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^{k-i}$
  - **重み関数:** $f(\omega) > 0$**, 内積:** $(\varphi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z)\psi_n^*(z) f(\omega) d\omega, \;\; z = e^{j\omega}$
  - **直交性:** $(A_m, A_n) = \int_{-\pi}^{\pi} A_m(z) A_n^*(z) f(\omega) d\omega = \begin{cases} \sigma_m^2, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$
  - **漸化式 (後の Levinson アルゴリズム, PARCOR 漸化式):**

$$\begin{cases} A_0(z) & = 1 \\ A_m(z) & = zA_{m-1}(z) - k_m z^{m-1} A_{m-1}(z^{-1}), \quad m = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

  - **係数** k_m**:** $m > 0$ **については** $(A_m(z), A_0(z)) = 0$ **から、**

$$k_m = \frac{(zA_{m-1}(z), 1)}{(z^{m-1}, A_{m-1}(z))} = \frac{\frac{1}{v_0} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^{(m-1)} v_{m-i}}{\frac{1}{v_0} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^{(m-1)} v_i} = \frac{w_{m-1}}{\sigma_{m-1}^2}$$

- **音声スペクトル** $f(\omega)$ **を重みとする内積:**

$$(z^m, z^n) = \int_{-\pi}^{\pi} z^m z^{-n} f(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(m-n)\omega} f(\omega) d\omega = v_{m-n}$$

直交多項式:

$$A_p(z) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i z^{p-i}$$

Gábor Szegő (1895–1985)


Gábor Szegő：直交多項式理論、Toeplitz 行列、...

Born: 20 Jan 1895 in Kunhegyes, Hungary
Died: 7 Aug 1985 in Palo Alto, California USA

線形予測係数とPARCOR係数の関係

- 相互変換可能: $\{\alpha_i\}$ と $\{k_i\}$ は等価なパラメータセット
  - 線形予測係数→PARCOR係数

For $n = p,\ p-1, \cdots, 1$

$$k_n = -\alpha_n^{(n)}$$

$$\alpha_i^{(n-1)} = \frac{\alpha_i^{(n)} + k_n \alpha_{n-i}^{(n)}}{1 - k_n^2}$$

  - PARCOR係数→線形予測係数

Initialize: $\alpha_1^{(1)} = -k_1$

For $n = 2,\ 3, \cdots, p$:

$$\alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n-1)} + k_n \alpha_{n-i}^{(n-1)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\alpha_n^{(n)} = -k_n$$

- k_i の性質
  - 全極型フィルタの安定性条件(最小位相条件): $-1 < k_i < 1$
  - k_i は次数によらない。→ 任意の次数で切捨て可(Cf. α_i は次数に依存)
  - 量子化、伝送、蓄積に適する。

偏相関係数の概念

■ 偏相関係数(partial correlation coefficient) とは:

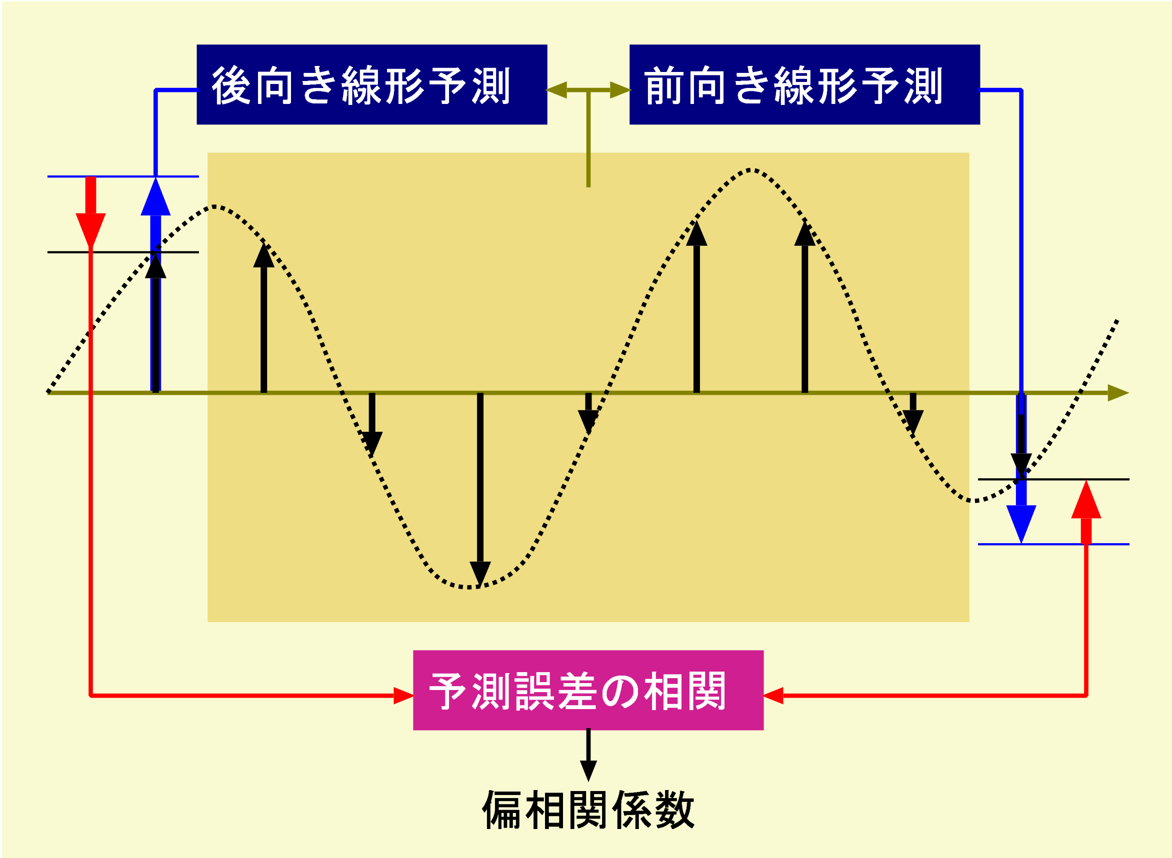


図1. 多変量解析分野で他のサンプル値との相関を通して生じる見掛けの相関を除いた「純粋な」相関係数を偏相関係数と呼ぶ。ここでは間のサンプルから線形予測できる分を差し引いて、その予測誤差の間の相関係数を考える。

偏自己相関係数定式化 (板倉 1969)

- Cf. x_t と x_{t-n} の相関係数(correlation coefficient): $\rho_n = \dfrac{v_n}{v_0}$
- x_t と x_{t-n} の偏相関係数(partial correlation coefficient): k_n
  - 前向き n 次線形予測誤差: $\varepsilon_t^{(n+)} = x_t - \hat{x}_t^{(n+)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} x_{t-i} = A_n(D) \cdot x_t$
  - 後向き n 次線形予測誤差: $\varepsilon_{t-(n+1)}^{(n-)} = x_{t-(n+1)} - \hat{x}_{t-(n+1)}^{(n-)} = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i^{(n)} x_{t-i} = B_n(D) \cdot x_t$
  - 両方向予測誤差の相関係数: $k_{n+1} = \dfrac{(\varepsilon_t^{(n+)},\ \varepsilon_{t-(n+1)}^{(n-)})}{||\varepsilon_t^{(n+)}|| \cdot ||\varepsilon_{t-(n+1)}^{(n-)}||}$
- 漸化式 (板倉 1969) (D は単位時間遅れ演算子)

$$\begin{aligned} A_{n+1}(D) &= A_n(D) - k_{n+1} B_n(D), & A_0(D) = 1 \\ B_{n+1}(D) &= D\{B_n(D) - k_{n+1} A_n(D)\}, & B_0(D) = D \end{aligned}$$

PARCOR 格子型適応的分析フィルタ (1969)

PARCOR 漸化式

$$
\begin{aligned}
A_{n+1}(D) &= \quad A_n(D) - k_{n+1} B_n(D), & A_0(D) = 1 \\
B_{n+1}(D) &= D\{B_n(D) - k_{n+1} A_n(D)\}, & B_0(D) = D
\end{aligned}
$$

に対応するディジタル回路:

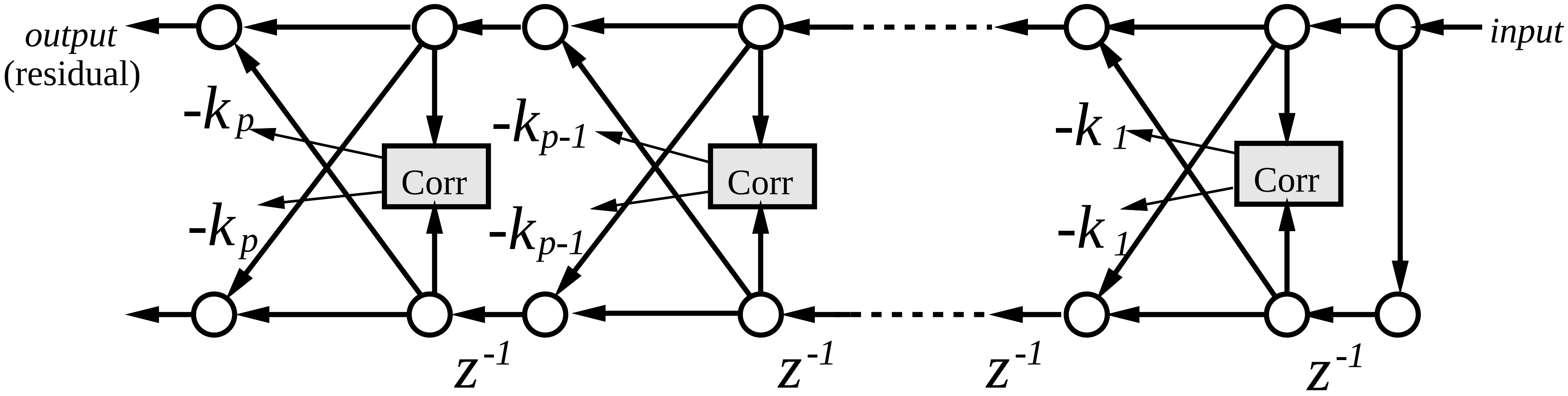


図2. PARCOR Lattice Filter (板倉・斎藤 1969)

PARCOR 格子型 全極フィルタ

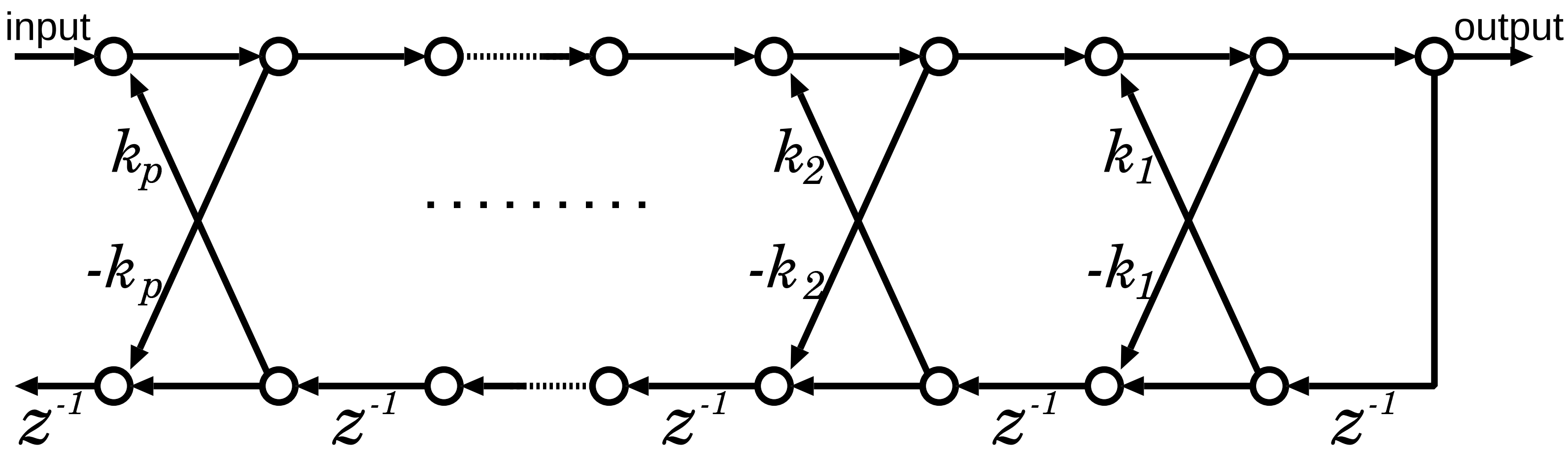
■ PARCOR漸化式

$$\begin{aligned} A_{n+1}(D) &= \quad A_n(D) - k_{n+1}B_n(D), & A_0(D) &= 1 \\ B_{n+1}(D) &= D\{A_n(D) - k_{n+1}A_n(D)\}, & B_0(D) &= D \end{aligned}$$

から、第1式を変形して(時間の向きを逆にして)

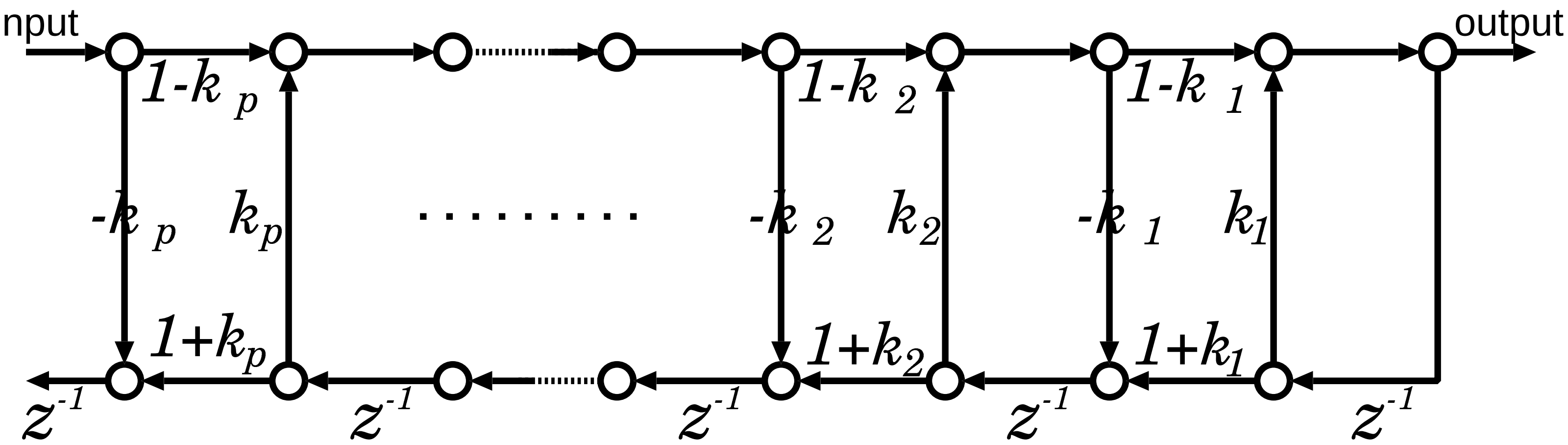
$$\begin{aligned} A_n(D) &= \quad A_{n+1}(D) + k_{n+1}B_n(D), & A_0(D) &= 1 \\ B_{n+1}(D) &= D^{-1}\{B_n(D) - k_{n+1}A_n(D)\}, & B_0(D) &= D \end{aligned}$$

■ 2乗算型 Lattice Filter: 分析フィルタの逆フィルタ

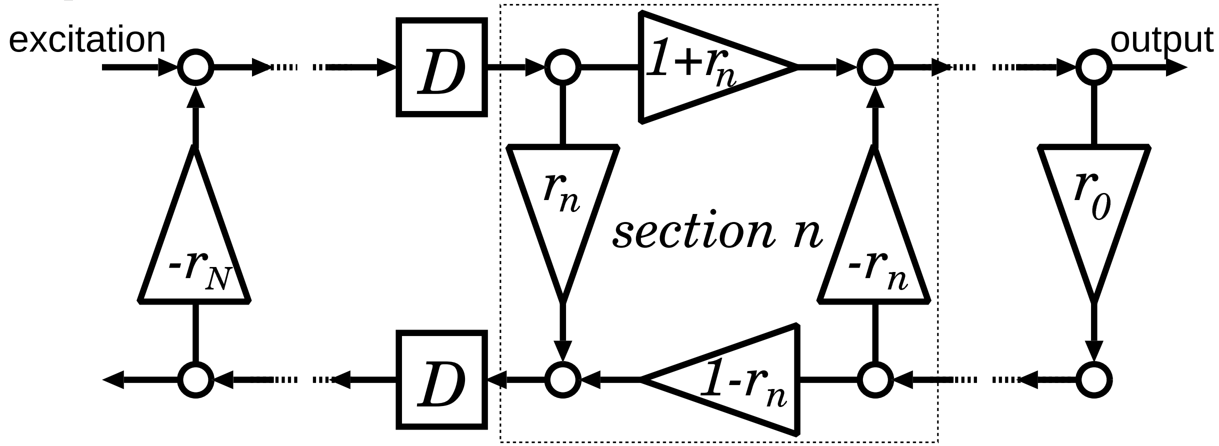


PARCOR 格子型 全極フィルタ

- **4乗算型 Lattice Filter: 2乗算型の等価変換**



- **声道モデル (Kelly 1962) →** $k_i = \dfrac{S_i - S_{i-1}}{S_i + S_{i-1}}$ **(S_i: 声道断面積関数)**



$$r_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n + S_{n-1}}$$

等価音響管(声道モデル)の例

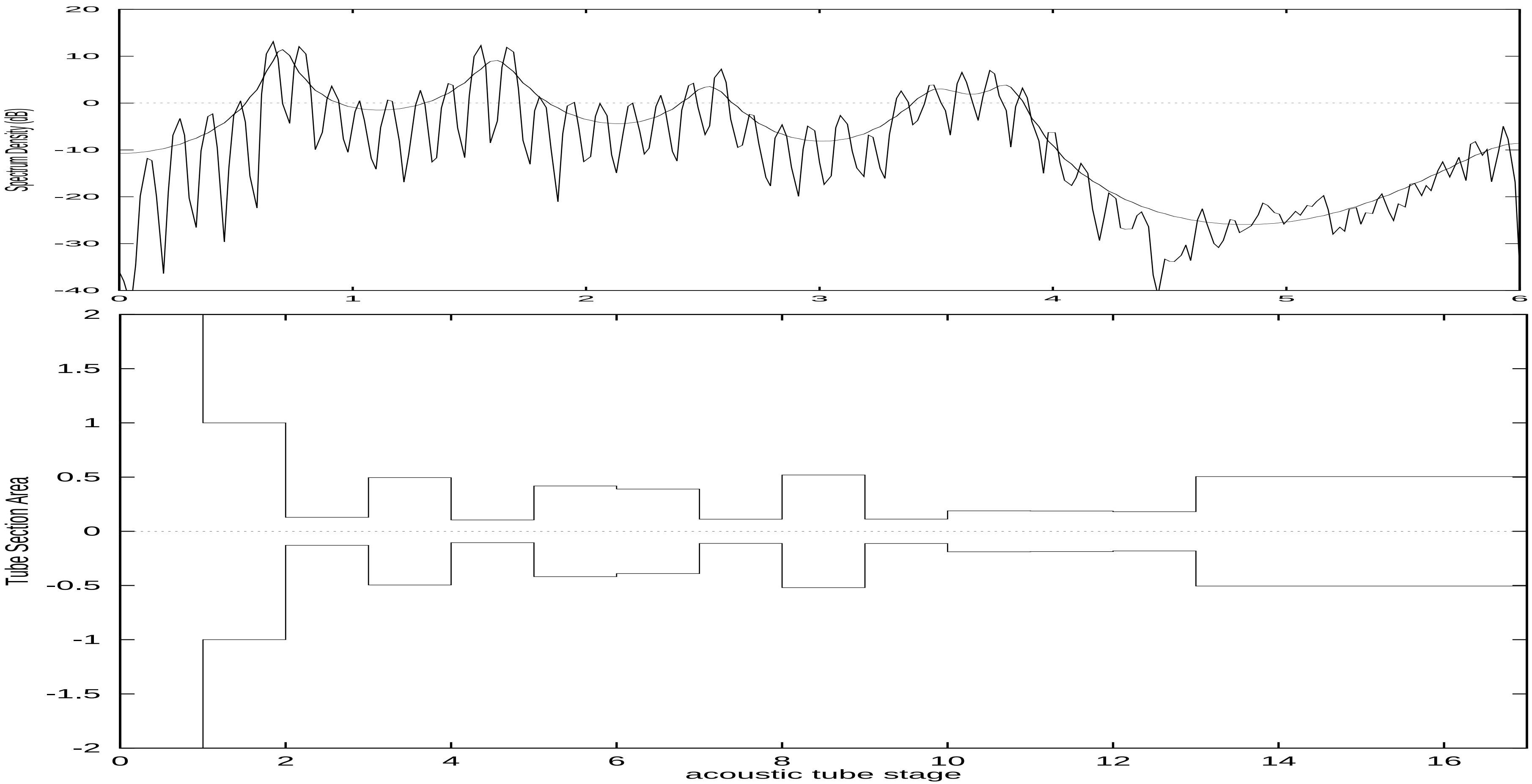


図: 音声のスペクトルと LPC 推定例 (男声 /a/) - 左端が口，右端が声門に相当

PARCOR 音声分析合成方式

原音声 x_t $\longrightarrow$ PARCOR 格子分析フィルタ $A(z)$ $\longrightarrow$ PARCOR 係数 $\{k_i\}$ / 駆動音源 ε_t $\longrightarrow$ PARCOR 格子合成フィルタ $G(z)$ $\longrightarrow$ 復元音声 x_t

- **全極型ディジタルフィルタ (最小位相推移)**
- **量子化特性:**
  - **フィルタの安定性の必要十分条件:** $|\,k_i\,| < 1, \quad i = 1, 2, \cdots, p$
  - **非直線量子化: tanh 変換など**
  - **不均一情報量割り当ての例: ($p = 10$)**
    k_1**: 9 bits,** k_2**: 7 bits,** k_3, k_4**: 各 6 bits,** $k_5, \cdots, k_{10}$**: 各 5 bits**

PARCOR 係数の時間パターン例

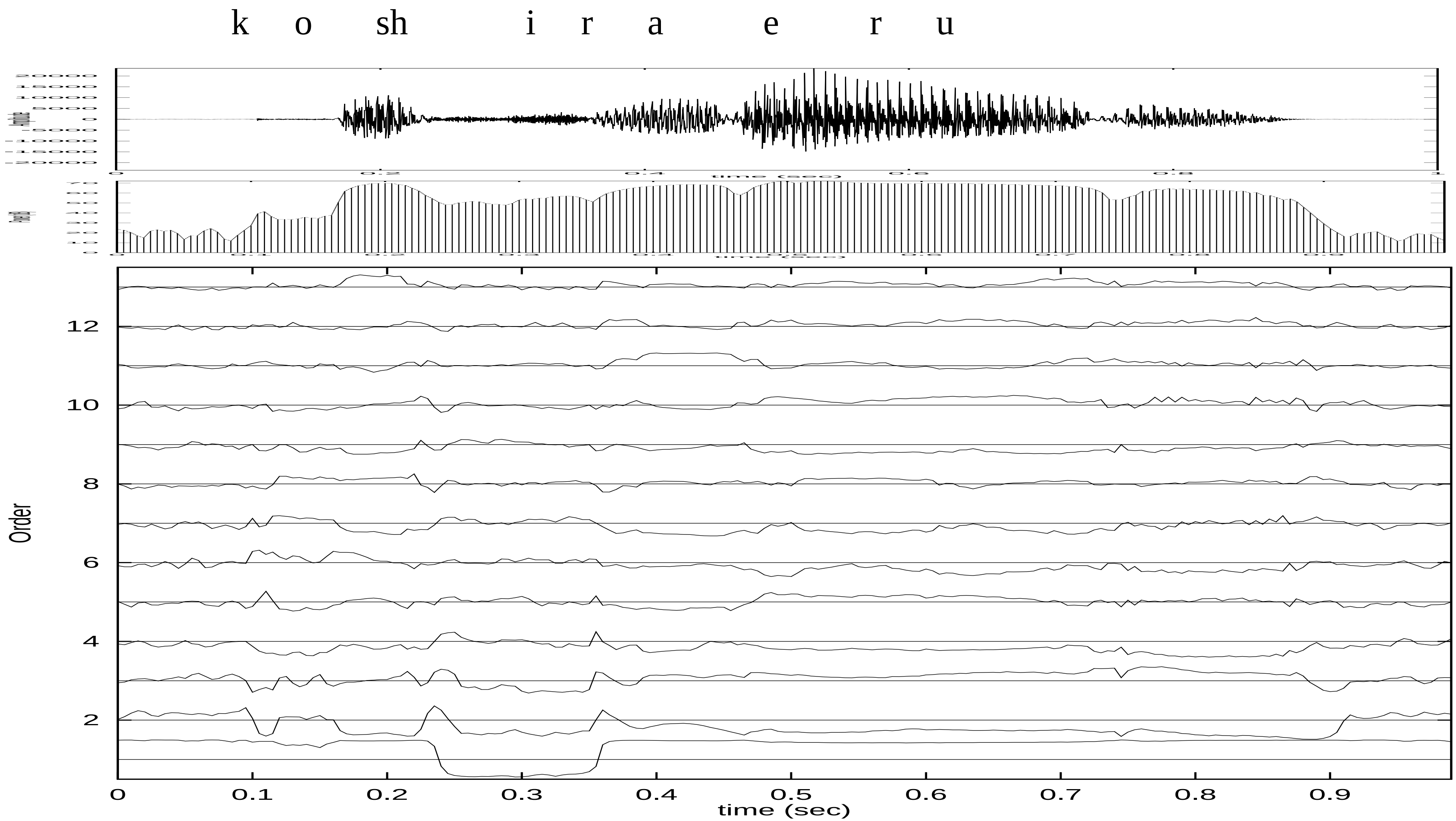


図: 音声の PARCOR 係数の時間パターン例 (「こしらえる」)