

5/14 講義予定

Taylor の定理 ([1] p.40 定理 11, [2] p.83-84, [3] p.132 定理 3.14)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \\ + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

をみたま t が a と x の間にある。

証明 $x \geq a$ の場合を考える。

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \right)$$

とおく。 $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ だから、平均値の定理の一般化を繰り返し適用すると、

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F'(x_1)}{(n+1)(x_1-a)^n} = \frac{F^{(2)}(x_2)}{(n+1)n(x_2-a)^{n-2}} = \dots \\ = \frac{F^{(n)}(x_n)}{(n+1)!(x_n-a)} = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

をみたま $x \geq x_1 \geq x_2 \dots x_{n+1} = t \geq a$ がある。

最後に行く前に $x \rightarrow a$ の極限をとると

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

が得られる。 $n+1$ を n とおき直すと、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \right)}{(x-a)^n} = 0$$

例

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right)}{x^4} = 0$$

これを

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = o(x^4)$$

とも表す。

Taylor の公式の解釈。

$f(x)$: 真の値

$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$: 近似値

$f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$: 誤差

例

$$e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{e^t}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

復習

$$\begin{aligned} e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - 1/(n+2)} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

積分型の剰余項 ([2] p.85)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) - [(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) - \left[\frac{(x-t)^2}{2} f^{(2)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt \\ &\quad \dots \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$