

12/10 計算法 II . 変数変換 . ([高・加] p.156, [金子]II 7.3 p.84, [小平]II §7.3 c) p.371)

1 変数の場合。

平面の座標変換。極座標。

対応 $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ により, $r\theta$ 平面の部分 E と xy 平面の部分 D の間に 1 対 1 対応があるとすると,

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

単位球の体積

$$\begin{aligned} 2 \int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= 2 \int_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \sqrt{1-r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2} r d\theta = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = 4\pi \left[-\frac{1}{3} \sqrt{1-r^2}^3 \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$