クレジット:
UTokyo Online Education 統計データ解析 I 2017 小池祐太

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

BY NC ND

統計データ解析 (I) 第 11 回

小池祐太

2017 年 12 月 13 日

1. 推定
    - 区間推定
    - 正規母集団の場合の区間推定
    - 漸近正規性による区間推定
2. 検定
    - 仮説検定の考え方
    - 正規母集団に対する検定 (1 標本)
        - 平均の検定
        - 分散の検定

推定

- これまでの講義で学習したように, 確率統計学では観測データをある確率変数たちの実現値と考えてモデル化する
- このとき, 確率変数たちの従う分布のもつなんらかの特性量 (平均や分散など) を評価したり, 分布そのものを決定することが統計解析の目標の 1 つとなるが, この作業を一般に**推定**と呼ぶ
- 以下では, 統計学で広く利用されている代表的な推定方法を説明する

推定

- 観測データが独立同分布な確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ がモデル化されている状況を考える
- この場合, X_i たちが従う共通の分布 $\mathcal{L}$ に関する推定を行うことが目標となる
- $\mathcal{L}$ としてすべての分布を考察対象とすると, 対象とする範囲が広くなりすぎて, サンプル数 n が十分大きくない限り応用上意味のある結論を導き出すことが困難
- そのため, 以下では確率分布 $\mathcal{L}$ を特徴づけるなんらかのパラメーター θ を考察対象とする
  - 例: $\mathcal{L}$ の平均・分散・歪度,・尖度など

区間推定

- 未知パラメーター θ を推定量 $\hat{\theta}$ で点推定した場合, 通常推定値は真のパラメーター値とは異なるため, 推定誤差が必ず存在する
- そのため, 推定結果の定量的な評価には, 推定誤差の評価が重要となる
- 統計学では, ある値 $\alpha \in (0, 1)$ を固定したとき,

$$P(l \le \hat{\theta} - \theta \le u) \ge 1 - \alpha$$

  が成り立つような l, u を観測データから推定することで推定誤差の評価を試みる
  - 上の式の意味するところは, 「誤差 $\hat{\theta} - \theta$ が区間 $[l, u]$ の外側にある確率が α 以下」ということ

区間推定

- 上の式を変形すると,

$$P(\hat{\theta} - u \leq \theta \leq \hat{\theta} - l) \geq 1 - \alpha$$

  となる
- 従って, ここで行っているのは, パラメーター θ が含まれているような確率が $1 - \alpha$ 以上となるような区間 $[\hat{\theta} - u, \hat{\theta} - l]$ を推定することだと言い換えられる
- このように, 未知パラメーターが含まれている確率があらかじめ決められたある値以上となるような区間を推定することを**区間推定**と呼ぶ

区間推定

- より一般には, 未知パラメーター θ とある値 $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$P(L \leq \theta \leq U) \geq 1 - \alpha$$

  が成り立つような確率変数 L, U を観測データから求めることになる
  - 区間 $[L, U]$ を $100(1-\alpha)$%**信頼区間**
  - L を $100(1-\alpha)$%**下側信頼限界**
  - U を $100(1-\alpha)$%**上側信頼限界**
  - $1-\alpha$ を**信頼係数**

  とそれぞれ呼ぶ
- 慣習として $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ とすることが多い

区間推定

- 信頼区間は幅が狭いほど真のパラメーターが取りうる値の範囲を限定することになるため, 推定精度が良いといえる
- 一方で, 信頼区間 $[L, U]$ の幅が狭いほど確率 $P(L \leq \theta \leq U)$ は小さくなるため, 最も推定精度の良い $100(1-\alpha)$%信頼区間 $[L, U]$ は,

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$$

を満たす

- そのため, 実行可能である限り, $100(1-\alpha)$%信頼区間 $[L, U]$ の構成では上の式を満たすように L, U を決定する

正規母集団の場合の区間推定: 平均

- 最も基本的な場合として, X_i たちの従う分布が平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布の場合に, μ および分散 σ^2 の区間推定をする方法を説明する
- はじめに, 分散 σ^2 がすでにわかっている場合に平均 μ の区間推定をする方法を説明する
- これには次の結果を用いる:

命題 1

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ を独立な確率変数列とし, 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して Z_i は平均 μ_i, 分散 σ_i^2 の正規分布に従うとする. このとき, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ を $(k+1)$ 個の 0 でない実数とすると, $a_0 + \sum_{i=1}^k a_i Z_i$ は平均 $a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \mu_i$, 分散 $\sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2$ の正規分布に従う.

正規母集団の場合の区間推定: 平均

- 上の命題を,

$$k = n,\ \mu_i = \mu,\ \sigma_i^2 = \sigma^2,\ a_0 = 0,\ a_i = 1/n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

  として適用すると, 標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は平均 μ, 分散 σ^2/n の正規分布に従うことがわかる
- 再び命題 1 を $k = 1$, $\mu_1 = \mu$, $\sigma_1^2 = \sigma^2/n$, $a_0 = -\sqrt{n}\mu/\sigma$, $a_1 = \sqrt{n}/\sigma$ として適用すると, 確率変数

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

  が標準正規分布に従うことがわかる

正規母集団の場合の区間推定: 平均

- 従って, $\alpha \in (0,1)$ を定めたとき, $z_{1-\alpha/2}$ を標準正規分布の $100(1-\alpha/2)\%$分位点とすれば,

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

  が成り立つことがわかる (詳細は配布資料参照)
- カッコ内を μ について解くと,

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$

正規母集団の場合の区間推定: 平均

- 従って, σ が既知であれば,

$$[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}]$$

  が平均 μ の $100(1-\alpha)$%信頼区間を与える
- 実行例 `ci-mean.r`

正規母集団の場合の区間推定: 平均

- 分散 σ^2 が既知であることは稀
- σ^2 が未知の場合, 不偏分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ で代用するのが自然な考えである
- s^2 の分布については次の結果が知られている ($n \geq 2$ とする):

命題 2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同分布な確率変数列で, 平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従うとする. このとき, $\bar{X}$ と s^2 は独立であり, 確率変数 $(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う.

正規母集団の場合の区間推定: 平均

- 上の命題と $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$ が標準正規分布に従うことから, 確率変数

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s}\left(=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}\right)$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従うことがわかる (6.3.5 節参照)

- 従って, $\alpha\in(0,1)$ を定めたとき, $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ を自由度 $n-1$ の t 分布の $100(1-\alpha/2)$%分位点とすれば,

$$P\left(-t_{1-\alpha/2}(n-1)\le\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s}\le t_{1-\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

が成り立つことがわかる

正規母集団の場合の区間推定: 平均

- カッコ内を μ について解くことで,

$$[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n}]$$

  が平均 μ の $100(1-\alpha)$%信頼区間を与えることがわかる
- 実行例 `ci-mean-unknown.r`

正規母集団の場合の区間推定: 分散

- 分散 σ^2 の区間推定には命題 2 を利用する
- すなわち, $(n-1)s^2/\sigma^2$ が自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従うので, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ をそれぞれ自由度 $n-1$ の χ^2 分布の $100\alpha/2\%$, $100(1-\alpha/2)\%$分位点とすれば,

$$P(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leq (n-1)s^2/\sigma^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha \tag{1}$$

が成り立つ (詳細は配布資料参照)

正規母集団の場合の区間推定: 分散

- (1) の左辺のカッコ内を σ^2 について解くと,

$$P\left((n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \sigma^2 \leq (n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

  が得られる
- 従って,

$$\left[(n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), (n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right]$$

  が σ^2 の $100(1-\alpha)$%信頼区間を与える
- 実行例 `ci-variance.r`

漸近正規性による区間推定

- 前節のように信頼区間を正確に計算できることは稀
- しかし, 未知パラメーター θ のある推定量 $\hat{\theta}$ について, 推定誤差 $\hat{\theta} - \theta$ の分布がある正規分布で近似できる状況はしばしばある
- このような推定量の性質を**漸近正規性**と呼ぶ
  - 中心極限定理によって, 多くのモーメントに基づく記述統計量は漸近正規性をもつ
  - 最尤推定量は広い範囲の確率分布に対して漸近正規性をもつことが知られている
- 漸近正規性をもつ推定量がある場合, 推定誤差がある区間に含まれる確率を近似的に求めることができるから, 近似的に正しい信頼区間を構成することが可能となる

漸近正規性による区間推定

- これまでの講義で確認したように, 確率分布 $\mathcal{L}$ が 2 次のモーメントを持てば, 中心極限定理より, $\mathcal{L}$ の平均 μ の推定量である標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は漸近正規性をもつ
- より正確に述べると, $\mathcal{L}$ の標準偏差を σ とすれば, 任意の $a \le b$ に対して,

$$P\left(a \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \le b\right) \to \int_a^b \phi(x)dx \quad (n \to \infty) \tag{2}$$

が成り立つ (ϕ は標準正規分布の確率密度関数)

漸近正規性による区間推定

- 従って, $\alpha \in (0,1)$ を定めたとき, $z_{1-\alpha/2}$ を標準正規分布の $100(1-\alpha/2)\%$分位点とすれば,

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \to 1-\alpha \quad (n \to \infty)$$

  が成り立つ
- カッコ内を μ について解くと,

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right) \to 1-\alpha \quad (n \to \infty)$$

  が得られる

漸近正規性による区間推定

- 従って, σ が既知であれば,

$$[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}]$$

  はサンプル数 n が十分大きい場合に近似的に正しい平均 μ の $100(1-\alpha)$%信頼区間を与える
- 通常は σ は未知であるが, 近似 (2) は σ をその一致推定量 $\hat{\sigma}$ で置き換えてもそのまま成立することが知られている

漸近正規性による区間推定

- 従って，上の式で σ を $\hat{\sigma}$ で置き換えたもの

$$[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}/\sqrt{n}]$$

  も，サンプル数 n が十分大きい場合に近似的に正しい平均 μ の $100(1-\alpha)$%信頼区間を与える
- $\hat{\sigma}$ としては例えば不偏分散の平方根

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

  を使うことができる
- 実行例 `ci-mean-asymp.r`

検定

- **(統計的仮説) 検定**
あるデータ/現象/母集団に対して仮定された命題 (仮説) の真偽を，そのデータの観測値に基づいて統計的に検証する方法
  - 例: 新しい薬の効能が古い薬よりも優れているといえるかということを，薬の治験結果から検証したい
- 推定と大きく異なるのは，母集団の分布に対して何らかの**仮説**を考えるところ
- 基本的な流れ
  1. 仮説を立てる
  2. 適当な統計量 (**検定統計量**と呼ばれる) に対して仮説が正しいときの標本分布を調べる
  3. 実際の検定統計量の値をデータから計算
  4. 計算された検定統計量の値が仮説に従う母集団から得られたと考えるに十分高い確率かどうかに基づいて仮説が正しいか否かを判断

検定

- これまで学んだように，確率統計学ではデータを確率変数の実現値とみなしてモデル化するため，統計量はデータの実現値ごとに異なる値を持ちばらつくが，そのばらつきは統計量の分布の性質によって予想できる
- データから計算された検定統計量の値がこの予想と著しく異なる場合には，最初に立てた仮説がおそらく正しくないと考えるのが妥当
- このとき検定のために立てる仮説を**帰無仮説**と呼ぶ
  - 多くの場合「この仮説を捨てて無に帰したい」ことを期待して立てられるため，「帰無」という言葉が使われる
- 帰無仮説が正しい場合の検定統計量の分布を**帰無分布**と呼ぶ
  - 帰無仮説の下で検定統計量が取りうる値の範囲を予想するのに必要

検定

- 帰無仮説から予想される検定統計量の取りうる値の範囲をあらかじめ定めて, 実際のデータから計算された検定統計量の値が予想された範囲外だった場合, 帰無仮説を信じるには根拠が薄いと考えて, 「帰無仮説を**棄却**する」というのが一般的な検定の手続き
- 逆に検定統計量からは帰無仮説を積極的に棄却することができない場合「帰無仮説を**受容**する」という
- 帰無仮説を棄却するために決める領域 (帰無仮説から予想される検定統計量の取りうる値の範囲外の領域) を**棄却域**という

検定

- 検定による判断結果については次の 4 つのパターンが考えられる:
  1. 帰無仮説が正しいときに帰無仮説を受容する
  2. 帰無仮説が正しいときに帰無仮説を棄却する
  3. 帰無仮説が誤っているときに帰無仮説を受容する
  4. 帰無仮説が誤っているときに帰無仮説を棄却する
- 上記 4 パターンのうち (1), (4) は正しい判断だが, (2), (3) は誤った判断
- (2) の判断を**第一種過誤**, (3) の判断を**第二種過誤**と呼ぶ

検定

- どちらの誤りも小さいほど良いが, 棄却域をどのように取るかを考えるときには, 一般には第一種過誤が起きる確率の上限を定めた上で, できるだけ第二種過誤を小さくするような戦略が取られる
  - 第一種過誤が起きる確率として許容する上限のことを, 検定の**有意水準**と呼ぶ
  - 第一種過誤が起きる確率を**サイズ**と呼ぶ
  - 第二種過誤が起きない確率を**検出力**と呼ぶ
- 上で述べたことは, サイズを有意水準以下に抑えた上で, 可能な限り検出力を大きくするように棄却域をとるのが一般的な戦略であると言い換えられる

検定

- 第二種過誤が起きる確率は，「帰無仮説が誤っているときに起こりうるシナリオ」が何かによって変わってくる
- そのため, 検出力を計算するためには，「帰無仮説が誤っているときに起こりうるシナリオ」を想定する必要があり, このシナリオを**対立仮説**と呼ぶ
  - 慣習として, 帰無仮説を H_0, 対立仮説を H_1 で表すことが多い

検定

- 上の例では, 帰無仮説は,

$$H_0\text{: 新しい薬も古い薬も効能は同じ}$$

となり, 対立仮説としては例えば

$$H_1\text{: 新しい薬と古い薬の効能は異なる}$$

をとれる
- 対立仮説のとり方は別にある. 例えば, いまの場合, 新しい薬の効能は古い薬より良いことを期待しているので, 対立仮説として

$$H_1\text{: 新しい薬の方が古い薬より効能が高い}$$

をとるほうが妥当だと考えられる

検定

- 数式でまとめると, 棄却域は以下のようにして構成する
- 検定統計量を T, 有意水準を α とすれば, 上に述べたことから, 棄却域 R_α は, 帰無仮説が正しい場合に

$$P(T \text{ が棄却域 } R_\alpha \text{ に含まれる}) \leq \alpha \tag{3}$$

  が成立するという制約の下で, 対立仮説が正しい場合に, 確率

$$P(T \text{ が棄却域 } R_\alpha \text{ に含まれない})$$

  ができる限り大きくなるように定めるということ
- 帰無仮説のみによって棄却域が決まるのではなく, 対立仮説の立て方によって棄却域の形は変わり得ることに注意

検定

- 上記のように最初に有意水準を決めて棄却域を定める場合もあるが，データから計算された検定統計量の値に対して，その値が棄却域に含まれるような有意水準の最小値に基づいて検定を行う場合もある
- この値のことを p **値**という
- 数式で表すと，

$$\min\{\alpha \in (0,1) | T \text{ が } R_\alpha \text{に含まれる}\}$$

で与えられる (厳密には下限を考える)
- この場合，検定の p 値が有意水準未満のときに帰無仮説を棄却することとなる

検定

- 注 帰無仮説の受容について
  - 検定における帰無仮説の受容は, 帰無仮説が正しいと仮定しても矛盾は生じないということを意味しているだけであり, 帰無仮説の正しさを積極的に支持する結果ではないことに注意が必要
  - 数学的には, 検定においては, 一般に第二種過誤の起こる確率が満たすべき定量的制約は何も仮定されないため, 第二種過誤の起こる確率は非常に大きい可能性があるという点で理解される

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- 観測データ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従う独立同分布な確率変数列としてモデル化されている場合に, μ および分散 σ^2 に対する検定を行う方法を説明する
- まず, μ_0 を既知の定数として, 平均 μ が μ_0 であるか否かを検定する問題を考える
- 検定の用語を使って述べると, 帰無仮説を $\mu = \mu_0$, 対立仮説を $\mu \neq \mu_0$ とする検定を考える
- これはしばしば次の記号で表される:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0. \tag{4}$$

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- この仮説に対する検定は標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ が μ_0 からどの程度離れているかを検証することで行われる
- より具体的には，$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ を不偏分散とし，検定統計量として

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{s}$$

  を考える
- 仮に帰無仮説 H_0 が正しいとすると，t は自由度 $n-1$ の t 分布に従う (配布資料 8.4.2 節参照)

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- 従って, $\alpha \in (0,1)$ に対して, 自由度 $n-1$ の t 分布の $100(1-\alpha/2)\%$ 分位点を $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ とすれば, H_0 の下では

$$P(|t| > t_{1-\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

  が成り立つ (配布資料 8.4.2 節参照)
- 以上より, 有意水準を α とする場合, 棄却域を

$$(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup (t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$$

  と設定すれば, 第一種過誤の上限が α となる

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- 具体的な検定の手順としては，データから検定統計量 t の値を計算し，

$$|t| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

であった場合には帰無仮説を棄却する
- もしくは，上で述べたように，検定の p 値を計算して，p 値が α 未満の場合に帰無仮説を棄却するという手順をとってもよい
- いまの場合の検定の p 値は，$f(x)$ を自由度 $n-1$ の t 分布の確率密度関数として，

$$2\int_{|t|}^{\infty} f(x)dx \tag{5}$$

によって与えられる

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- $$|t| > t_{1-\alpha/2}(n-1) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{|t|} f(x)dx > 1-\alpha/2 \Leftrightarrow 2\int_{|t|}^{\infty} f(x)dx < \alpha$$
  が成り立つから, 検定統計量が棄却域に入ることと p 値が有意水準未満となることは同じ意味である
- (5) に現れる積分は関数 `pt()` のオプション `df` に自由度を, オプション `lower.tail` に `FALSE` を指定することで計算できるが, いまの場合は上の検定を実行するための関数 `t.test()` が p 値も計算してくれる

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- なお, この検定のように, 帰無分布が t 分布となるような検定を **t 検定**と呼ぶ
- 上の検定は **Student の t 検定**と呼ばれることがある
- 実行例 `test-mean.r`

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- 前節で述べたように, 対立仮説の立て方によって棄却域の形は変わりうる
- 例えば, 前節で述べた例に対応して, 観測データ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が新しい薬の効能を確認するためにその薬を n 人の被験者に投与した際の治験結果であったとする
  - 例えばその薬が睡眠薬であれば, データは睡眠時間の伸び具合に対応
- このとき, 母集団分布の平均 μ は新薬の「真の」, もしくは「平均的な」効能に対応するから, μ が古い薬の効能 μ_0 と比較して大きいと言えるのかどうかを考えるのが自然

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- すなわち, 帰無仮説として $\mu = \mu_0$, 対立仮説として $\mu > \mu_0$ を設定した検定

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \mu > \mu_0.$$

を考えるのが自然

- この場合, 帰無仮説は検定 (4) と同一なので, 検定統計量としても同一のもの t が利用出来る (帰無分布が計算可能であるため)
- 他方, 対立仮説の下では検定統計量 t の値が正の方向に大きくなると期待される
- 従って, 棄却域としては, c をある正の数として, "$t > c$" という形のものを考えるのが自然

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- いま, $\alpha \in (0,1)$ に対して, 自由度 $n-1$ の t 分布の $100(1-\alpha)$%分位点を $t_{1-\alpha}(n-1)$ とすれば, H_0 の下で

$$P(t > t_{1-\alpha}(n-1)) = \alpha$$

が成り立つ

- 以上より, 棄却域を

$$(t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$$

と設定すれば, 第一種過誤の上限が α となる

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- 具体的な検定の手順としては, データから検定統計量 t の値を計算し,

$$t > t_{1-\alpha}(n-1)$$

であった場合には帰無仮説を棄却する

- もしくは, $f(x)$ を自由度 $n-1$ の t 分布の確率密度関数として, p 値

$$\int_t^\infty f(x)dx$$

が α 未満であった場合に帰無仮説を棄却するという手順をとっても同等

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- 一般に, 棄却域がある定数 a によって (a, ∞) と書けるような検定を**右片側検定**と呼び, $(-\infty, a)$ と書けるような検定を**左片側検定**と呼ぶ. 右片側検定と左片側検定を合わせて**片側検定**と呼ぶ
- 一方で, 棄却域がある定数 $a < b$ によって $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ と書けるような検定を**両側検定**と呼ぶ
- いまの場合, 対立仮説を $H_1 : \mu \neq \mu_0$ にとった場合は両側検定となり, 対立仮説を $H_1 : \mu > \mu_0$ にとった場合は右片側検定となる

正規母集団に対する検定 (1 標本): 平均の検定

- 反対向きの対立仮説 $\mu < \mu_0$ を考えた検定

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \mu < \mu_0.$$

の場合は，自由度 $n-1$ の t 分布の $100\alpha\%$分位点を $t_\alpha(n-1)$ として，

$$t < t_\alpha(n-1)$$

であった場合に帰無仮説を棄却すれば良い (左片側検定)

- これは，p 値

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

が α 未満であった場合に帰無仮説を棄却するということと同じである

- 実行例 `one-sided.r`

正規母集団に対する検定 (1 標本): 分散の検定

- 次に, σ_0^2 を既知の定数として, 分散 σ^2 が σ_0^2 であるか否かを検定する問題を考える
- 検定の用語を使って述べると, 帰無仮説を $\sigma^2 = \sigma_0^2$, 対立仮説を $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ とする検定

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

を考える

- $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ を不偏分散とする

正規母集団に対する検定 (1 標本): 分散の検定

- 仮に帰無仮説 H_0 が正しいとすると, 統計量

$$\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma_0^2$$

は帰無仮説 H_0 の下で自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う (配布資料 8 章命題 8.2 参照)

- 従って, $\alpha \in (0,1)$ に対して, 自由度 $n-1$ の χ^2 分布の $100\alpha/2\%$分位点, $100(1-\alpha/2)\%$分位点をそれぞれ $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ とすれば, H_0 の下では

$$P(\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \text{ または } \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

が成り立つ (配布資料 8.4.3 節参照)

正規母集団に対する検定 (1 標本): 分散の検定

- 以上より, 有意水準を α とする場合, 棄却域を
$$(-\infty, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)) \cup (\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \infty)$$
と設定すれば, 第一種過誤の上限が α となる
- 具体的な検定の手順としては, データから検定統計量 χ^2 の値を計算し,
$$\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \text{ または } \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$
であった場合には帰無仮説を棄却する

正規母集団に対する検定 (1 標本): 分散の検定

- もしくは, この場合の p 値は, 自由度 $n-1$ の χ^2 分布の確率密度関数を $f(x)$ とすると

$$2\min\left\{\int_0^{\chi^2} f(x)dx, \int_{\chi^2}^{\infty} f(x)dx\right\}$$

で与えられるので, この値が α 未満の場合に帰無仮説を棄却するというのと同じ

正規母集団に対する検定 (1 標本): 分散の検定

- 対立仮説が片側の場合

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

を考えたときも, 前と同様の議論によって検定を構成できる

- すなわち, 自由度 $n-1$ の χ^2 分布の $100(1-\alpha)$%分位点を $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ として,

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

であった場合に帰無仮説を棄却すれば良い

正規母集団に対する検定 (1 標本): 分散の検定

- 検定の p 値は
$$\int_{\chi^2}^{\infty} f(x)dx$$
で与えられるので, この値が α 未満の場合に帰無仮説を棄却するとしても同じ
- 左側対立仮説 $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ の場合も同様
- なお, この検定のように, 帰無分布が χ^2 分布となるような検定を χ^2 **検定**と呼ぶ
- 実行例 `test-variance.r`