

クレジット:

UTokyo Online Education 数値解析 2017 松尾宇泰

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



■ 補間型数値積分公式

(1) 積分  $I = \int_a^b f(x)dx$  に対し,  $f(x)$  の Lagrange 補間に基づく積分近似:

$$I_n = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k), \quad w_k = \int_a^b l_k(x)dx.$$

定理. 上の公式は,  $f(x)$  が高々  $n-1$  次多項式のとき, (丸め誤差を除いて) 正確な積分値を与える.

[Newton-Cotes 公式]  $x_k$  を積分区間の  $m$  等分点に選んだもの. 特に  $m=1$  のとき「台形則」,  $m=2$  のとき「Simpson 則」と呼ぶ. 全体の積分区間を小区間に等分割し, 各小区間に台形則を用いた「複合台形則」がよく使われる: 区間  $[a, b]$  を  $N$  等分し,  $\Delta x = (b-a)/(N-1)$  とおくと,

$$I \simeq \left( \frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-2} f(a+k\Delta x) + \frac{f(b)}{2} \right) \Delta x.$$

(2) 積分  $I = \int_a^b f(x)w(x)dx$  ( $w(x)$ : 区間内で有限個の点を除いて正値な連続関数) に対し,

$$I_n = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k), \quad w_k = \int_a^b l_k(x)w(x)dx.$$

[Gauss 型公式]  $x_k$  を積分区間上の直交多項式の零点に選んだもの.

定理. Gauss 型公式は,  $f(x)$  が高々  $2n-1$  次多項式のとき, (丸め誤差を除いて) 正確な積分値を与える.

【参考】直交多項式

$(f, g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$  とおく. このとき

$$(R_m, R_n)_w = 0 \quad (m \neq n); \quad \deg R_n = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となる多項式の列  $\{R_n\}$  を, 区間  $(a, b)$  における重み  $w$  に関する直交多項式系と呼ぶ.

区間	重み	名称	記号	適用例
$(-1, 1)$	1	Legendre	$P_n(x)$	電気双極子 (電磁気)
$(-1, 1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$	Chebyshev	$T_n$	補間 (数値解析)
$(0, \infty)$	$\exp(-x)$	Laguerre	$L_n$	水素原子 (量子力学)
$(-\infty, \infty)$	$\exp(-x^2)$	Hermite	$H_n$	調和振動子 (量子力学)

表 1: 代表的な直交多項式系

定理.  $R_n(x)$  のすべての零点は, 区間  $(a, b)$  内にある実数で単根.

定理.  $n \geq 1$  とする.  $p(x)$  を  $n-1$  次以下の任意の多項式とすると,  $(R_n, p)_w = 0$ .

注意. 直交多項式は, 列  $1, x, x^2, x^3, \dots$  を内積  $(\cdot, \cdot)_w$  に関して (Gram-Schmidt) 直交化すると得られる.

注意. 上記の他にも直交多項式系は豊富な数学的性質を持つ. 詳細については『物理のための応用数学』(小野寺, 裳華房), 『数値計算法の数理』(杉原・室田, 岩波) 等を参照のこと.

## ■ 変数変換型数値積分公式

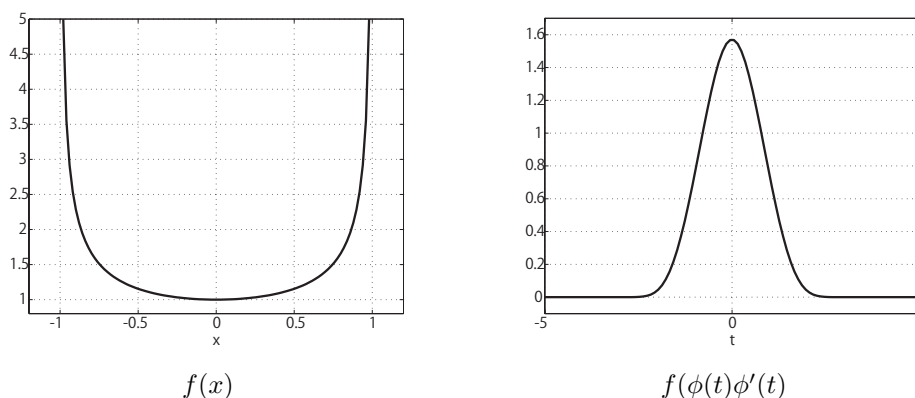
[二重指数関数型公式] 例えば区間  $(-1, 1)$  上の積分の場合,

$$\phi(t) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(t)\right) \quad \text{として複合台形則を適用: } h \sum_{-N_1}^{N_2} f(\phi(kh))\phi'(kh).$$

ただし  $h, N_1, N_2$  は被積分関数に応じて適切に定める. 通常の補間型公式は被積分関数の特異性に弱い, 変数変換型公式は端点に特異性があっても頑健.

(例)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f(\phi(t))\phi'(t) = \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(t)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(t)\right)}.$$



Gauss 公式と DE 公式の適用結果 :

