

クレジット:

UTokyo Online Education 数値解析 2017 松尾宇泰

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



■ Lagrange 補間

Lagrange 補間：「標本点」 x_k ($k = 1, \dots, n$)，および標本点における関数値 $f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$) が与えられているとき， $n - 1$ 次多項式 $p(x)$ で $p(x_k) = f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$) を満たすもの。

(表現 1)

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j.$$

ただし a_j ($j = 0, \dots, n - 1$) は補間になるよう適切に定める。

(表現 2)

$$l_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} \quad (k = 1, \dots, n)$$

とおくとき，

$$p(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x).$$

(表現 3)

$$R_j(x) = \prod_{i=1}^j (x - x_i) \quad (j = 0, \dots, n - 1)$$

とおくとき，

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j R_j(x).$$

ただし， c_j は次で定まる「差分商」：

$$c_0 = f[x_1] = f(x_1), \quad c_1 = f[x_2, x_1] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}, \quad c_2 = f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}, \dots,$$

$$c_{n-1} = f[x_n, \dots, x_1] = \frac{f[x_n, \dots, x_2] - f[x_{n-1}, \dots, x_1]}{x_n - x_1}.$$

Lagrange 補間の「近似度」： $f \in C[-1, 1]$ とする．各 n に対して，標本点の組 $-1 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1$ を決めると，作用素 $L_n : f \mapsto p \in C[-1, 1]$ が 1 つ定まる．

定理．任意の L_n ($n \geq 3$) に対して， $\|L_n\|_\infty \geq \frac{2}{\pi} \log n + \frac{1}{2}$ ．

定理．任意の作用素列 $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，ある $f \in C[-1, 1]$ が存在して， $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n f\|_\infty = \infty$ ．

定理．任意の $f \in C[-1, 1]$ に対して，ある作用素列 $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して， $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n f\|_\infty = 0$ ．

定理．標本点を「Chebychev 点」： $x_k = \cos((2k - 1)\pi/(2n))$ ($k = 1, \dots, n$) にとるとき，

$$\frac{2}{\pi} \log n + \frac{2}{\pi} \log \frac{4}{\pi} \leq \|L_n\|_\infty \leq \frac{2}{\pi} \log n + \frac{2}{\pi} \log 2 + 2.$$

出典：『数値計算法の数理』（杉原正顕・室田一雄著，岩波書店）

■ スプライン補間

区間 $[a, b]$ 上に標本点を $a = x_1 < \dots < x_n = b$ と置く. このとき

- 各小区間 $[x_k, x_{k+1}]$ ($i = 1, \dots, n-1$) で m 次多項式,
- 全区間 $[a, b]$ で C^{m-1} 級

となる「区分的 m 次多項式」を「 m 次スプライン」と呼ぶ. 自由度: $(n-1)(m+1) - m(n-2) = n+m-1$.
さらに,

- 標本点上で $S(x_k) = f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$)

を満たす m 次スプライン $S(x)$ を「 m 次スプライン補間」と呼ぶ. 自由度: $m-1$.

応用上は 3 次スプライン補間がよく使われる. 自由度 2 は,

(i) $S'(x_1+0) = f'(x_1+0)$, $S'(x_n-0) = f'(x_n-0)$, もしくは

(ii) $S''(x_1+0) = S''(x_n-0) = 0$

で補う.

3 次スプライン補間の近似度: $h_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 2, \dots, n$), $\bar{h} = \max_k h_k$ とおく.

定理. $f \in C^4[a, b]$ に対して 3 次スプライン補間 $S(x)$ を上の (i) で決定するとき, $\|f - S\|_\infty \leq \frac{5}{384} \|f\|_\infty \bar{h}^4$.

出典: 『数値計算法の数理』 (杉原正顯・室田一雄著, 岩波書店)