

クレジット:

UTokyo Online Education 数値解析 2017 松尾宇泰

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



### ■ 非線形方程式の解法

与えられた関数  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  に対して、方程式  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  を満たす  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  を求める問題を考える。一般に有限回手順では解けない。

更新式：

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

により解を反復的に更新し、何らかの停止則、たとえば

$$\|f(\mathbf{x}^{(k+1)})\| \leq \varepsilon_{\text{tol}}$$

により反復を停止する ( $\varepsilon_{\text{tol}}$  は丸め誤差限界を考慮して定める「許容誤差」)。ここで  $\|\cdot\|$  は  $\mathbb{R}^d$  の何らかのノルム (例えば最大ノルムやユークリッドノルム)。更新量  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  には様々な定め方がある。

### ■ 縮小写像の原理

定理.  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  を閉集合とする。また  $g: D \rightarrow D$  を縮小写像、すなわち、ある  $L$  ( $0 < L < 1$ ) が存在して、任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  に対して

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

を満たす写像とする。このとき  $g$  の不動点 ( $g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$  を満たす  $\mathbf{x}^*$ ) が  $D$  の中にただ一つ存在し、任意の  $\mathbf{x} \in D$  に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*.$$

ただし  $g^k$  は写像  $g$  を  $k$  回合成した写像を表す。

### ■ Newton 法

$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  を解くための Newton 法

```

 $\mathbf{x}^{(0)}$ : given
for  $k = 0, 1, 2, \dots$  {
     $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)} - J(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} f(\mathbf{x}^{(k)})$ 
}
    
```

ただし  $J(\mathbf{x}) = (\partial f_i / \partial x_j)$  は  $f$  の Jacobi 行列。

定理 (Newton 法の 2 次収束性)  $f(\mathbf{x})$  が真の解  $\mathbf{x}^*$  の近傍  $D$  で  $C^2$  級で、 $J(\mathbf{x}^*)$  が正則ならば、 $\mathbf{x}^*$  から十分近い初期値から出発する Newton 法の近似解は  $\mathbf{x}^*$  に 2 次収束する：

$$\exists C > 0, \quad \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\| \leq C\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

(注)  $J(\mathbf{x}^*)$  が正則でない場合の振る舞いは一般に複雑。ただし 1 次元のときは「重根ならば 1 次収束」が成り立つ。

(注) 最適化における「Newton 法」( $\min g(\mathbf{x})$  を求めるための Newton 法) と混同しないこと。