クレジット:
UTokyo Online Education 数値解析 2017 松尾宇泰

固有値問題の解法

■ べき乗法

べき乗法

$\boldsymbol{x}_0$: given
for $k := 0, 1, 2, \ldots$ {
　$\boldsymbol{y}_{k+1} := A\boldsymbol{x}_k$
　$\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{y}_{k+1}/\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|$
}

べき乗法バリエーション：　逆反復

$\boldsymbol{x}_0$: given,　$PA = LU$
for $k := 0, 1, 2, \ldots$ {
　$\boldsymbol{y}_{k+1} := A^{-1}\boldsymbol{x}_k$
　$\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{y}_{k+1}/\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|$
}

べき乗法バリエーション：　シフト付き逆反復

$\boldsymbol{x}_0$: given,　μ: given, $P(A - \mu I) = LU$
for $k := 0, 1, 2, \ldots$ {
　$\boldsymbol{y}_{k+1} := (A - \mu I)^{-1}\boldsymbol{x}_k$
　$\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{y}_{k+1}/\|\boldsymbol{y}_{k+1}\|$
}

■ QR 法

QR 分解：$m \times n$ の行列 A は，m 次ユニタリ行列 Q と $m \times n$ の上三角行列 R を用いて，$A = QR$ と書ける.（この表現は Q（および R）の列（行）の符号を除いて一意）．また QR 分解は本質的に Gram–Schmidt の直交化に等しい（Q に直交化された列ベクトル，R に直交化に要した係数が並ぶ）.

Hessenberg 形： 任意の n 次行列は $O(n^3)$ の（有限回の）手間で次の形（Hessenberg 形）にユニタリ変換できる.（つまり $a_{ij} = 0$ $(i > j+1)$).

$$
\begin{pmatrix}
* & \cdots & \cdots & * \\
* & \ddots & & \vdots \\
& \ddots & \ddots & \vdots \\
& & * & *
\end{pmatrix}
$$

QR 法

A_0: given Hessenberg matrix
for $k := 0, 1, 2, \ldots$ {
  $A_k =: Q_k R_k$ (※ QR 分解)
  $A_{k+1} := R_k Q_k$
}

（注意）記号 “=:” の行では，左辺を QR 分解して右辺を得る，という操作を表している.