

クレジット:

UTokyo Online Education 数値解析 2017 松尾宇泰

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



固有値問題の解法

■ べき乗法

べき乗法

```

 $x_0$ : given
for  $k := 0, 1, 2, \dots$  {
     $y_{k+1} := Ax_k$ 
     $x_{k+1} := y_{k+1} / \|y_{k+1}\|$ 
}
    
```

べき乗法バリエーション： 逆反復

```

 $x_0$ : given,  $PA = LU$ 
for  $k := 0, 1, 2, \dots$  {
     $y_{k+1} := A^{-1}x_k$ 
     $x_{k+1} := y_{k+1} / \|y_{k+1}\|$ 
}
    
```

べき乗法バリエーション： シフト付き逆反復

```

 $x_0$ : given,  $\mu$ : given,  $P(A - \mu I) = LU$ 
for  $k := 0, 1, 2, \dots$  {
     $y_{k+1} := (A - \mu I)^{-1}x_k$ 
     $x_{k+1} := y_{k+1} / \|y_{k+1}\|$ 
}
    
```

■ QR 法

QR 分解 :  $m \times n$  の行列  $A$  は,  $m$  次ユニタリ行列  $Q$  と  $m \times n$  の上三角行列  $R$  を用いて,  $A = QR$  と書ける. (この表現は  $Q$  (および  $R$ ) の列 (行) の符号を除いて一意). また QR 分解は本質的に Gram-Schmidt の直交化に等しい ( $Q$  に直交化された列ベクトル,  $R$  に直交化に要した係数が並ぶ).

Hessenberg 形 : 任意の  $n$  次行列は  $O(n^3)$  の (有限回の) 手順で次の形 (Hessenberg 形) にユニタリ変換できる. (つまり  $a_{ij} = 0 (i > j + 1)$ ).

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ * & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & * & * \end{pmatrix}$$

QR 法

```
A0: given Hessenberg matrix
for k := 0, 1, 2, ... {
  Ak := QkRk (※ QR 分解)
  Ak+1 := RkQk
}
```

(注意) 記号 “:=” の行では, 左辺を QR 分解して右辺を得る, という操作を表している.