

クレジット:

UTokyo Online Education 数値解析 2017 松尾宇泰

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



■浮動小数点数 (floating point number)

現在最も普及している表現形式「IEEE754」の概略:

$$x_f = \pm \left(\frac{1}{2^0} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{2^{n-1}} \right) \times 2^m.$$

- 単精度 (single precision)=4byte=1+23+8bit : $n = 23 + 1, -126 \leq m \leq 127$.
表現できる最小の正数 = $2^{-126} \simeq 1.175 \times 10^{-38}$, 最大の正数 $\simeq 2^{127} \times 2 \simeq 3.403 \times 10^{38}$.
有効数字桁数 : $2^{24} = 10^{7.224}$.
- 倍精度 (double precision)=8byte=1+52+11bit : $n = 52 + 1, -1022 \leq m \leq 1023$.
表現できる最小の正数 = $2^{-1022} \simeq 2.225 \times 10^{-308}$, 最大の正数 $\simeq 2^{127} \times 2 \simeq 1.798 \times 10^{308}$.
有効数字桁数 : $2^{53} = 10^{15.95}$.

(注) 実際にはもっと複雑. たとえば指数部の空き 2 (例: $2^8 = 256 = (127 - (-126) + 1) + 2$) は, 0 や特殊な数の表現に予約されている.

■丸め (rounding)

浮動小数点数で表現可能な区間内の数 x に対して,

$$x_f = x(1 + \epsilon_x), \quad |\epsilon_x| \leq \epsilon_M \quad \text{「マシンイブシロン」.}$$

$\epsilon_M \sim 10^{-7}$ (単精度), $\sim 10^{-16}$ (倍精度).

■誤差 (error) の種類

- 丸め誤差 (rounding error): あらゆる演算で発生
- 桁落ち: 近い数の引き算で発生
- 情報落ち (積み残し): 級数の計算などで発生

■区間演算 (interval arithmetic)

浮動小数点数をひとつ持つ代わりに, その含まれる区間

$$x_f \in X = [\underline{x}, \bar{x}]$$

を持ち, 区間同士の演算を定義する. 例: $X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$.

参考: 「精度保証付き数値計算」=浮動小数点演算で通常の数値計算をしつつ, 同時にその含まれる区間も計算して, 数値計算結果の精度を保証する.