クレジット：
UTokyo Online Education 数値解析 2017 松尾宇泰

数値解析（松尾）　配付資料　　2017 年 12 月 4 日

■ 常微分方程式の数値解法

初期値 $y(0)$ が与えられているとして，初期値問題：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = f(x,y), \qquad x > 0$$

を考える.「格子」$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,「近似解」$y_n \simeq y(x_n)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ とおく．以下では簡単のため,「格子幅」$x_{n+1} - x_n = h$ は一定とする.

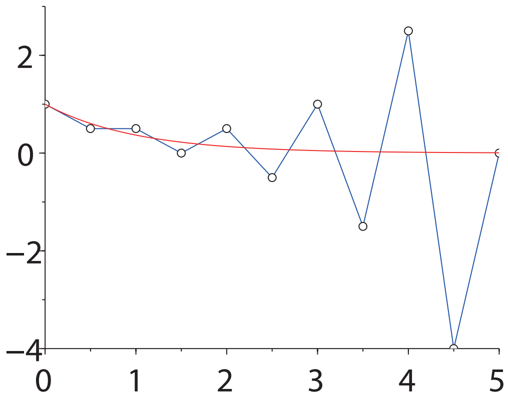
[一段法]

- 陽的 Euler 法（１次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$.
- 陰的 Euler 法（１次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$.
- 台形則（２次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)}{2}$.
- （標準的な４次）Runge–Kutta 法：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{1}{6}k_1 + \dfrac{1}{3}k_2 + \dfrac{1}{3}k_3 + \dfrac{1}{6}k_4$.
  ただし，$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$.

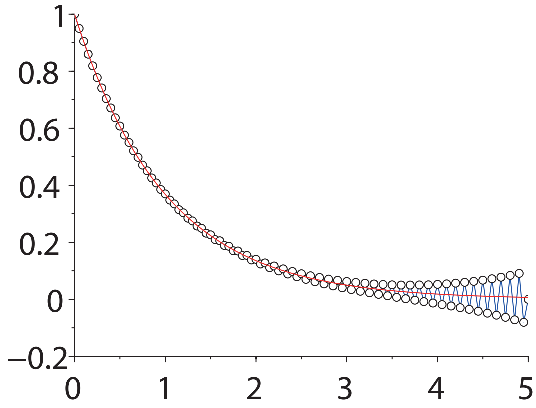
[多段法]　ここでは $f_n = f(x_n, y_n)$ と略記する.

- 中点則（２次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = f_n$.
- 陽的 Adams 法：
  - １次：陽的 Euler 法と一致.
  - ２次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{3}{2}f_n - \dfrac{1}{2}f_{n-1}$.
  - ３次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{23}{12}f_n - \dfrac{16}{12}f_{n-1} + \dfrac{5}{12}f_{n-2}$.
- 陰的 Adams 法：
  - １次：陰的 Euler 法と一致.
  - ２次：台形則と一致.
  - ３次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{5}{12}f_{n+1} + \dfrac{8}{12}f_n - \dfrac{1}{12}f_{n-1}$.

中点則の不安定現象



$\Delta t = 0.5$



$\Delta t = 0.05$

Runge–Kutta 法の安定領域