

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅷ 2019 島田尚

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



# 数理手法VIII

数理・情報教育研究センター 数学基礎教育部門  
工学系研究科システム創成学専攻

島田 尚

# 1. 確率分布（頻度分布）の扱いと、 正規分布（指数分布／ポワソン）の重要性

Photo by Deutsche Bundesbank, Frankfurt am Main,  
Germany, from Wikipedia  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/  
commons/0/0d/10\\_DM\\_Serie4\\_Vorderseite.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0d/10_DM_Serie4_Vorderseite.jpg)  
Public domain



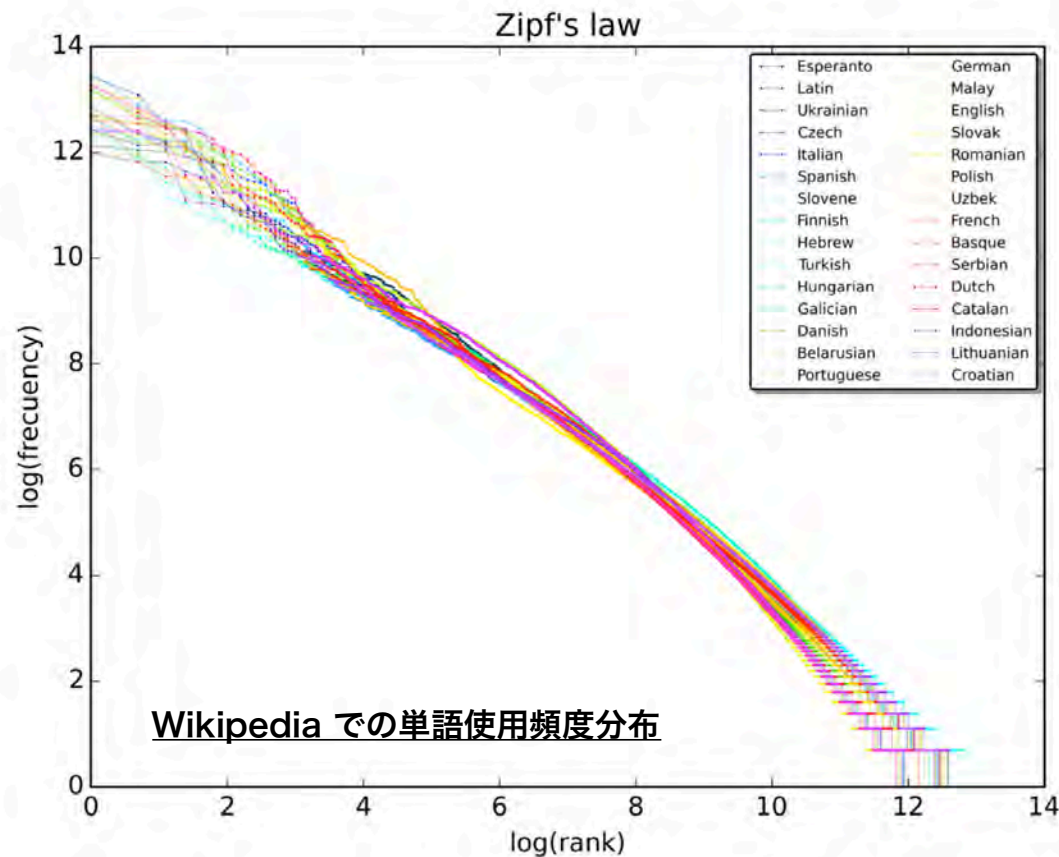
$$N(\mu, \sigma^2) : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

**中心極限定理：**

サンプル数  $n \rightarrow \infty$  につれ、

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_i \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \sim N(0,1) \left( = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

# 社会・経済系での普遍分布・ベキ分布



- ・ 情報圧縮などの最適化の結果？
- ・ 「成長し続ける系であるせい」かも (Yule-Simon 過程、BAモデル)

# 社会・経済系での普遍分布・ベキ分布

株価や売り上げの変動はガウス分布でない（「経済物理学」の端緒）

著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

Rosario N. Mantegna & H. Eugene Stanley ,

"Scaling behaviour in the dynamics of an economic index", Nature volume 376, pages 46–49 (1995) , FIG. 1

<https://www.nature.com/articles/376046a0>

株価の変動の分布

Mantagna & Stanley, Nature (1995)

著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

Michael H. R. Stanley, Luís A. N. Amaral, Sergey V. Buldyrev, Shlomo Havlin, Heiko Leschhorn, Philipp Maass, Michael A. Salinger & H. Eugene Stanley , "Scaling behaviour in the growth of companies", Nature volume 379, pages 804–806 (1996), FIG. 3

<https://www.nature.com/articles/379804a0>

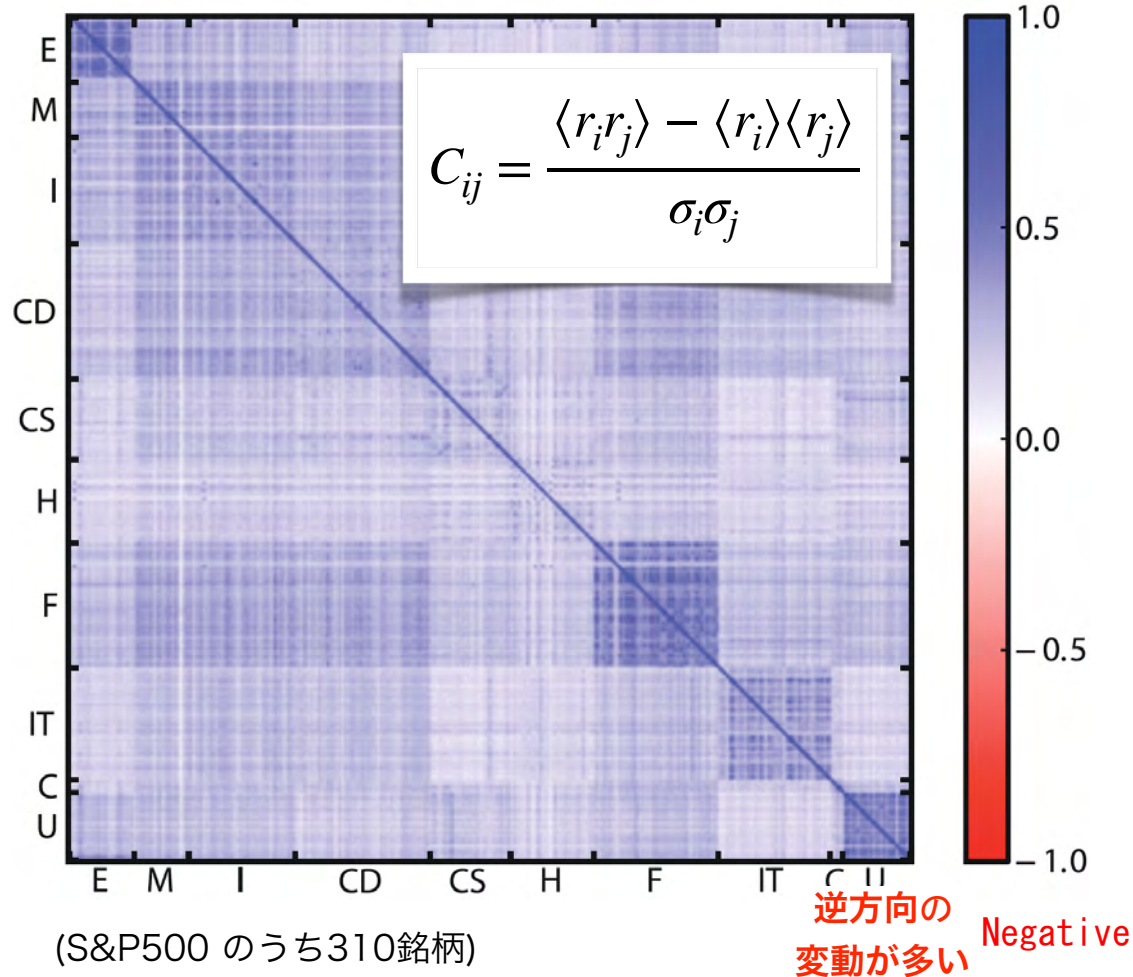
企業の成長率の分布

Stanley *et al.*, Nature (1996)

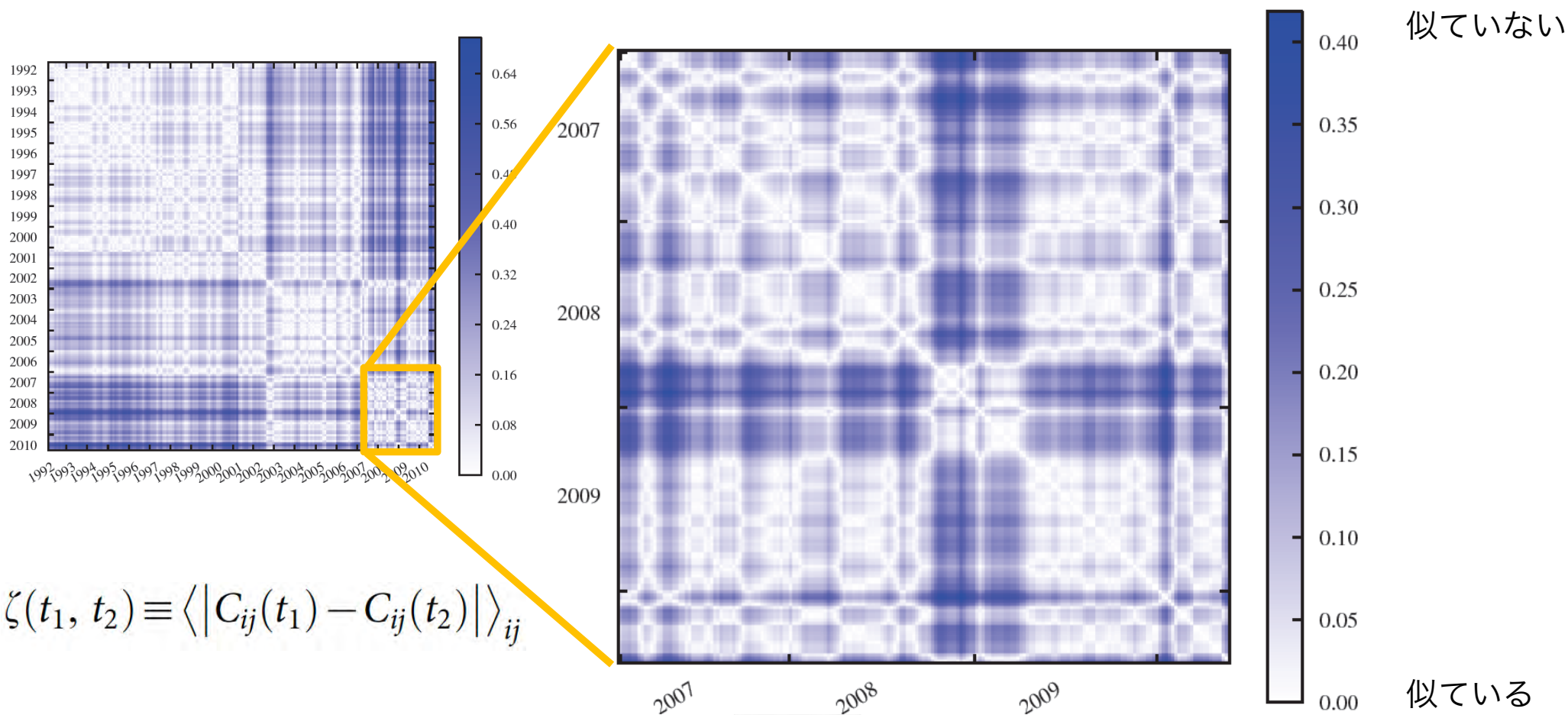
# アメリカ株価変動の相関構造

GICS sort (産業分類)

- Energy (エネルギー)
- Materials (素材)
- Industrials (資本財・サービス・輸送)
- Consumer Discretionary (一般消費財・サービス、車、衣料、etc)
- Consumer Staples (生活必需品)
- Health Care (ヘルスケア)
- Financials (金融)
- Information Technology (情報技術)
- Telecommunication Services (通信)
- Utilities (公益事業)



より細かい時間スケールで見ても変化は間欠的で急峻（自己相似的）



$$\zeta(t_1, t_2) \equiv \langle |C_{ij}(t_1) - C_{ij}(t_2)| \rangle_{ij}$$

M. C. Muniz, T. Shimada, R. Shafer, ..., & H.E. Stanley, *Scientific Reports* vol. 2 (2012) 644.

# 人間社会（と難しい自然現象）での 各つながりの活動の特徴：バースト

著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

色分けされたアクティビティの図

Márton Karsai, Kimmo Kaski, Albert-László Barabási & János Kertész,  
"Universal features of correlated bursty behaviour", Scientific Reports  
volume 2, Article number: 397 (2012) Fig. 1

<https://www.nature.com/articles/srep00397>

地震の活動

ニューロンの発火

携帯電話の通話



## 通信の頻度に関するベキ分布（バースト性）

著作権等の都合により、ここに挿入  
されていた画像を削除しました。

Barabási, A.-L. "The origin of bursts  
and heavy tails in human  
dynamics", Nature 435 207-211 2005

Fig.2. 図aおよびb

[https://www.nature.com/articles/  
nature03459](https://www.nature.com/articles/nature03459)

e-mail の送信間隔（左）と返信までの時間（右）  
の分布（Barabasi, Nature (2005)）

著作権等の都合により、ここに挿入  
されていた画像を削除しました。

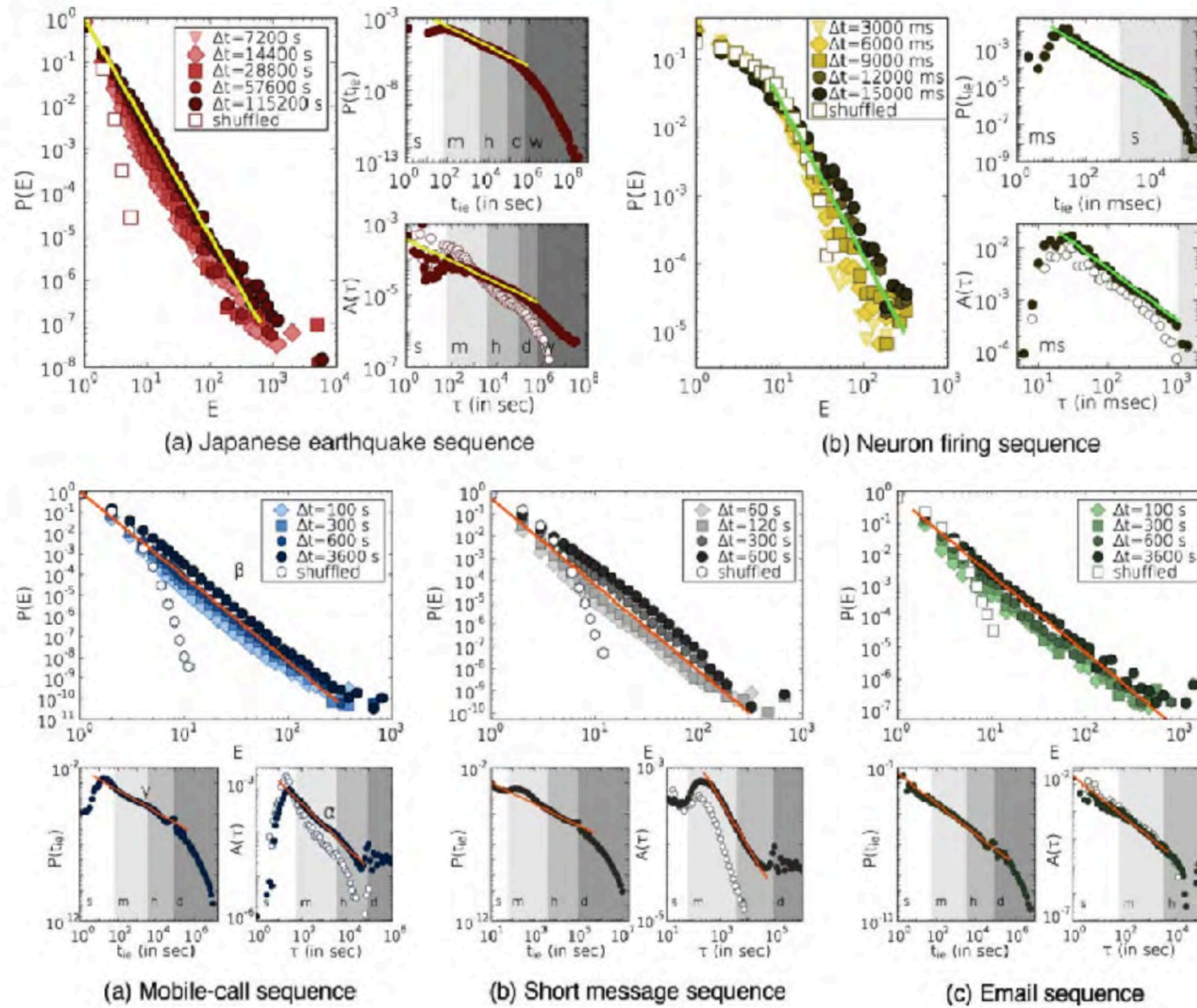
João Gama Oliveira & Albert-László  
Barabási, "Darwin and Einstein  
correspondence patterns", Nature 437,  
1251 (2005)

Figure 1

[https://www.nature.com/  
articles/4371251a?foxtrotcallback=true](https://www.nature.com/articles/4371251a?foxtrotcallback=true)

ダーウィンとアインシュタインの手紙の頻度  
（Oliveira & Barabasi, Nature (2005)）

Fig. 1.  
 Márton Karsai, Kimmo Kaski, Albert-László Barabási & János Kertész, "Universal features of correlated bursty behaviour",  
 Scientific Reports volume 2, Article number: 397 (2012)  
<https://www.nature.com/articles/srep00397>



Karsai et al., Sci. Rep. (2012)

# 採餌行動軌跡の例 (狩猟採集民)

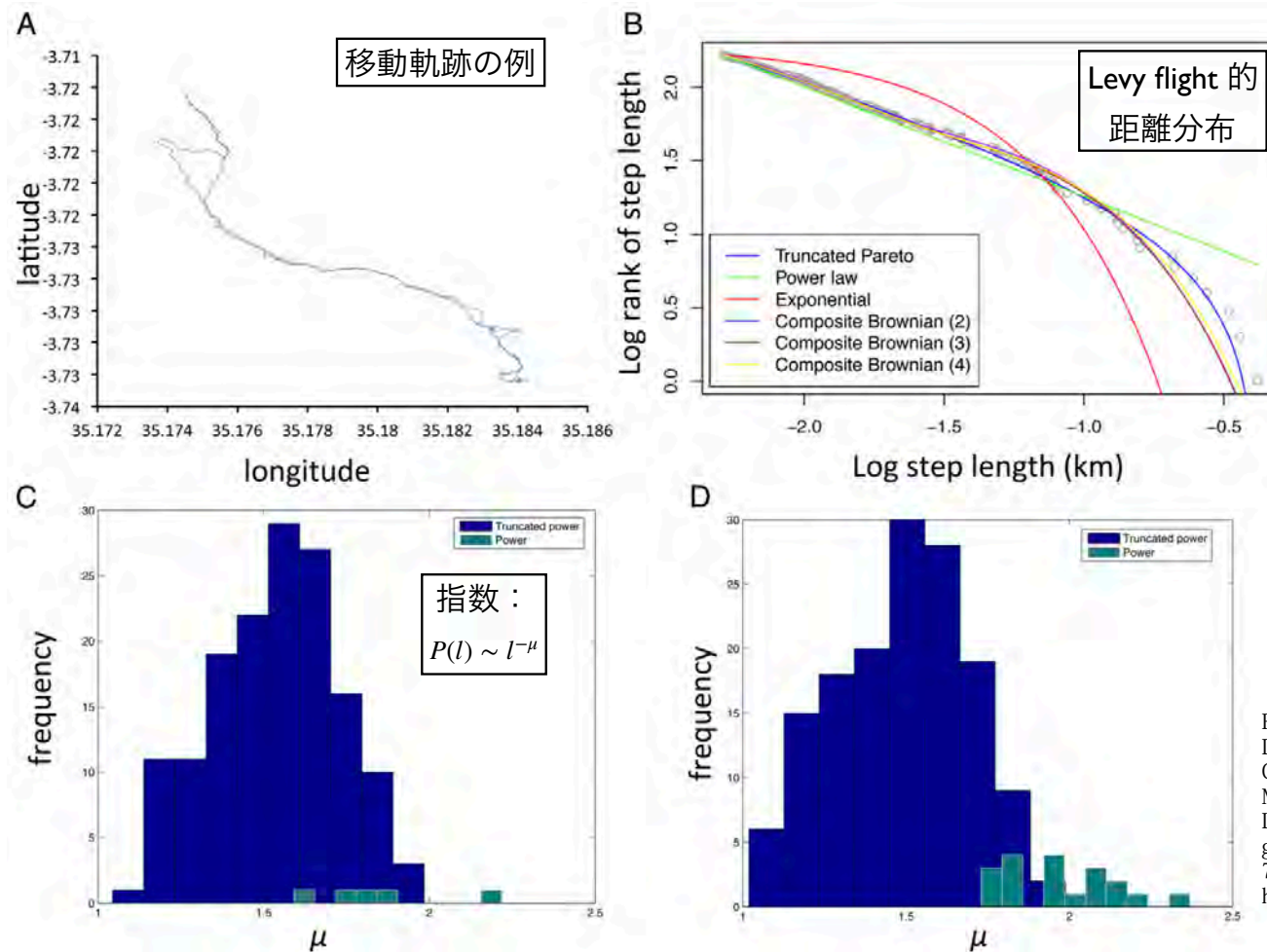


Fig.2  
David A. Raichlen, Brian M. Wood, Adam D. Gordon, Audax Z. P. Mabulla, Frank W. Marlowe, and Herman Pontzer, "Evidence of Lévy walk foraging patterns in human hunter-gatherers", PNAS January 14, 2014 111 (2) 728-733;  
<https://doi.org/10.1073/pnas.1318616111>

D.A. Raichlen et al., PNAS vol. 111 728-733 (2014)

# 社会・経済系での普遍分布・ベキ分布

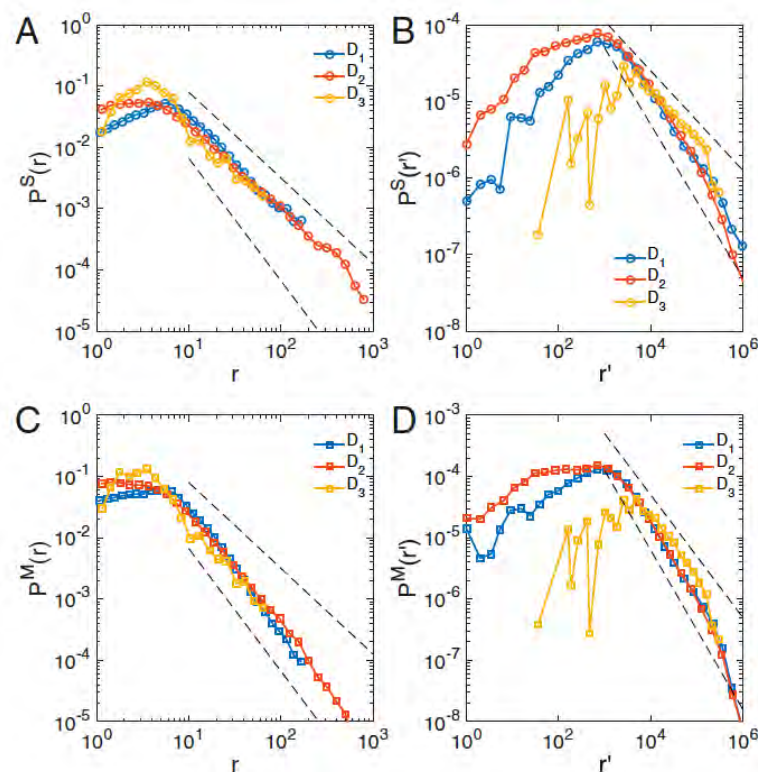


Fig. 1.  
Pierre Deville, Chaoming Song, Nathan Eagle, Vincent D. Blondel, Albert-László Barabási, and Dashun Wang, "Scaling identity connects human mobility and social interactions.", PNAS June 28, 2016 113 (26) 7047-7052 CC BY-NY-ND  
<https://doi.org/10.1073/pnas.1525443113>

(D. Wang et al., PNAS (2016))

人の通信(A)、移動(C)もレヴィ分布（昔：紙幣の拡散の研究）

## 2. 正規分布的で無い場合に何を考えるか

### $X_i$ の分布が幅広 (モーメントが発散)

1) → 各種特徴量、相関係数など解析に注意が必要

2) → その由来は？

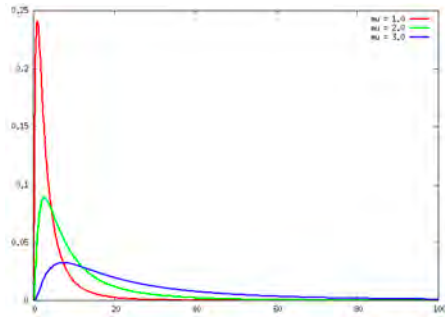
A. 乗算ノイズや成長 (Yule-Simon) 過程

B.  $\{X_i\}$  が互いに相関している (臨界現象)

C. 次元性や最適化の結果

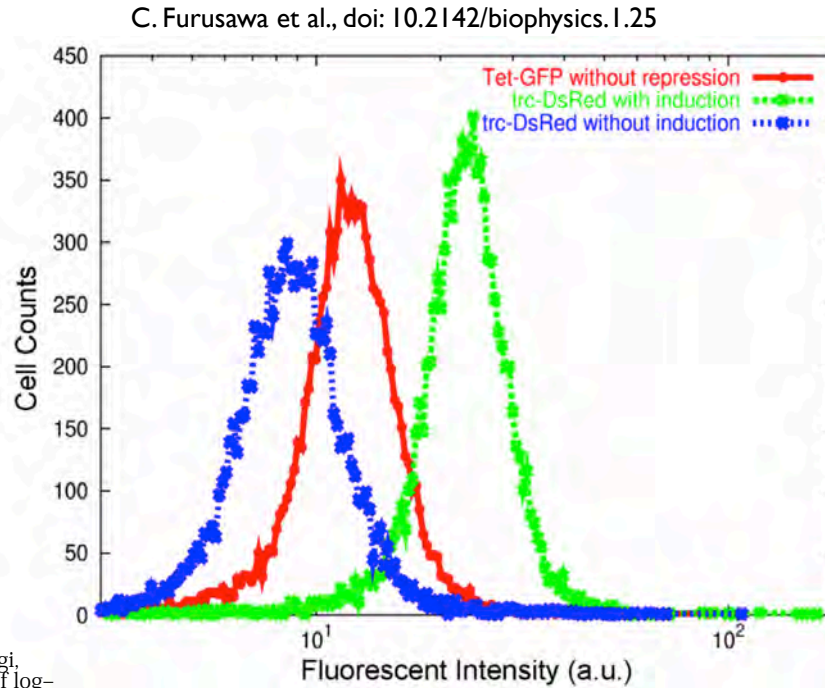
ほぼ扱わないこと：  
検定・回帰

# 対数正規分布（べき分布）の例： 遺伝子発現量



(線形プロットなら)

Chikara Furusawa, Takao Suzuki, Akiko Kashiwagi, Tetsuya Yomo and Kunihiko Kaneko, "Ubiquity of log-normal distributions in intra-cellular reaction dynamics", *biophysics* Vol.1, pp.25-31(2003) より引用 Fig.3.  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/biophysics/1/0/1\\_0\\_25/\\_article](https://www.jstage.jst.go.jp/article/biophysics/1/0/1_0_25/_article)



乗算ノイズ過程：
$$x_{t+1} = \eta_t x_t + \xi_t$$
  
 (べき分布のテールも出る)

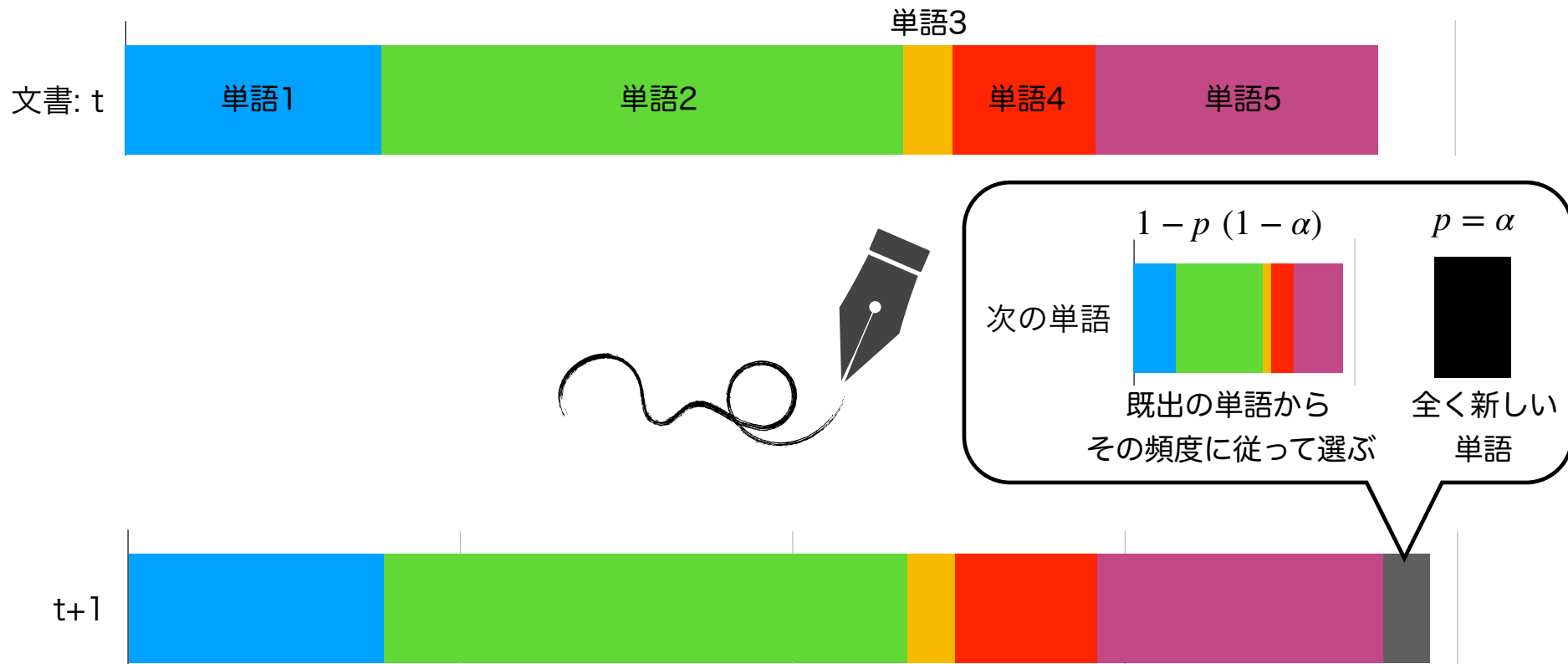
著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

ランク別遺伝子発現量グラフ

Chikara Furusawa and Kunihiko Kaneko, Zipf's Law in Gene Expression, *Physical Review Letters* 90, 088102–Published 26 February 2003 Figure 1

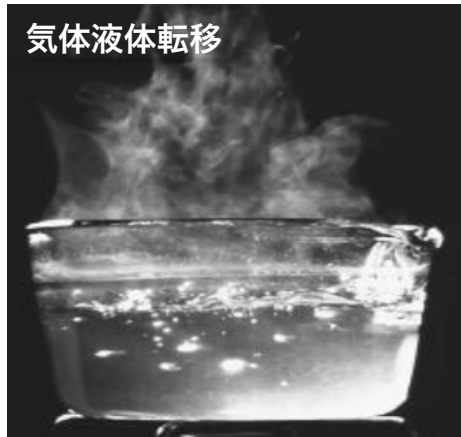
<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.90.088102>

# 成長過程の例： Yule-Simon 過程



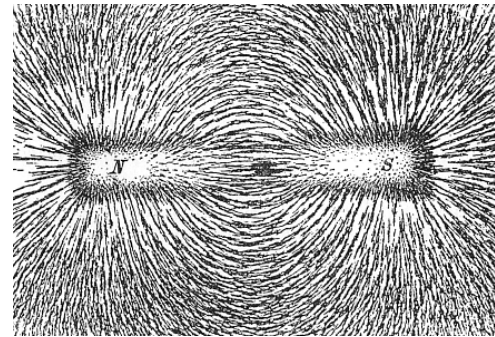
# 相転移

パラメターの小さな変化に対して巨視的な系の秩序が不連続に変わること



不連続転移  
(潜熱あり)

Photo by <https://en.uncyclopedia.co/wiki/File:Boilinghotwater3.jpg>  
CC BY-NC-SA 3.0



強磁性転移

Photo by Newton Henry Black  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Magnet#/media/File:Magnet0873.png>  
Public Domain

連続転移  
(潜熱なし)

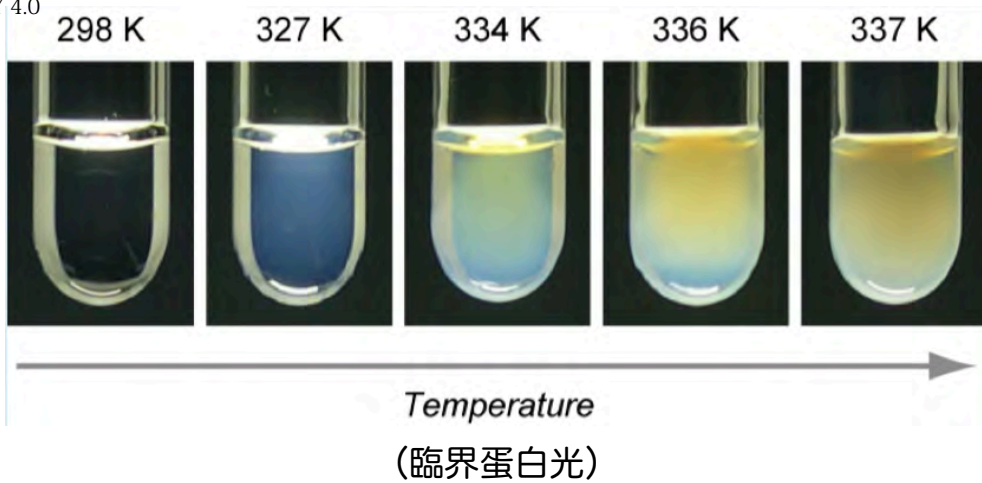


Wikipediaより転載  
[https://ja.wikipedia.org/wiki/民衆を導く自由の女神#/media/ファイル:Eugène\\_Delacroix\\_-\\_La\\_liberté\\_guidant\\_le\\_peuple.jpg](https://ja.wikipedia.org/wiki/民衆を導く自由の女神#/media/ファイル:Eugène_Delacroix_-_La_liberté_guidant_le_peuple.jpg)



# 臨界現象と臨界指数

Figure 8.  
Koichiro Sadakane and Hideki Seto, "Membrane Formation in Liquids by Adding an Antagonistic Salt", *Frontiers in Physics* 6:26 · March 2018  
[https://www.researchgate.net/publication/324054185\\_Membrane\\_Formation\\_in\\_Liquids\\_by\\_Adding\\_an\\_Antagonistic\\_Salt](https://www.researchgate.net/publication/324054185_Membrane_Formation_in_Liquids_by_Adding_an_Antagonistic_Salt)  
CC BY 4.0



相転移点の近く  $\left( t = \frac{T - T_c}{T_c} \right)$  で相関が発散する：

- 比熱の異常： $c_V \sim |t|^{-\alpha}$
- 秩序パラメーター： $m \sim (-t)^\beta$
- 磁化率の発散： $\chi \sim |t|^{-\gamma}$
- 相関長： $\xi \sim |t|^{-\nu}$

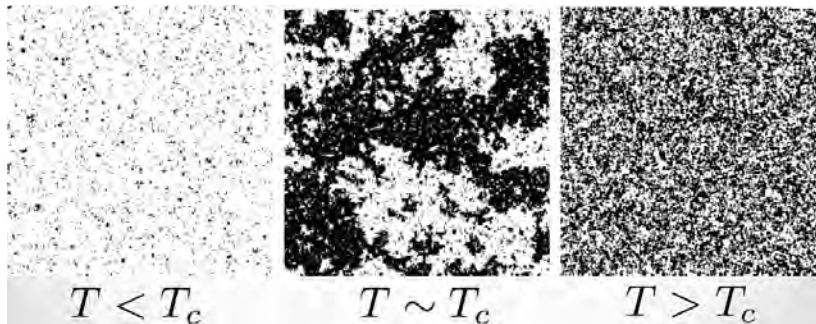
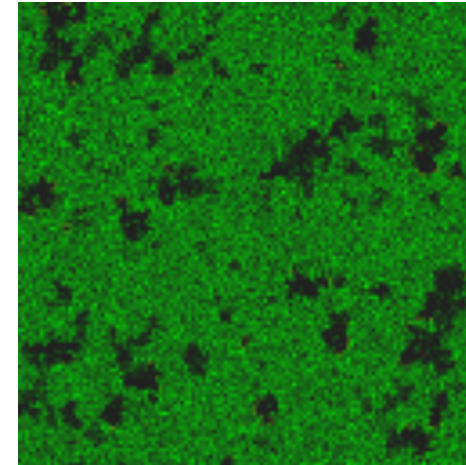


Figure 1.  
Claudio Castellano, Santo Fortunato and Vittorio Loreto, "Statistical physics of social dynamics", *Reviews of Modern Physics* 81, 591-646 (2009)  
<https://arxiv.org/abs/0710.3256>

Photo by John McColgan, from Wikipedia  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Wildfire#/media/File:Deerfire\\_high\\_res.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Wildfire#/media/File:Deerfire_high_res.jpg)  
Public domain



Photo by Claudio Rocchini, from Wikipedia  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Forest-fire\\_model#/media/File:Forest\\_fire\\_model.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/Forest-fire_model#/media/File:Forest_fire_model.gif)  
CC BY 2.5



## 森林火災

([https://en.wikipedia.org/wiki/Forest-fire\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Forest-fire_model))

(火災が起きると燃え広がる先の木が減る → 森林火災が大火災になるかどうかのギリギリ)

株価などの集団的動きの突発性は、自然界でもある  
“勝手にギリギリの状態になる現象”（自己組織的臨界性）に似ている

著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

Ole Peters & J. David Neelin, "Critical phenomena in atmospheric precipitation", Nature Physics volume 2, pages 393–396 (2006), Figure 1

<https://www.nature.com/articles/nphys314?draft=journal>

## 雨の降り方

(Nature Physics Vol. 2, 393 (2006))

著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

Ole Peters & J. David Neelin, "Critical phenomena in atmospheric precipitation", Nature Physics volume 2, pages 393–396 (2006), Figure 3

<https://www.nature.com/articles/nphys314?draft=journal>

(雨が降れば水蒸気減る → 大雨が降るか降らないかのギリギリ)

# 都市のサイズと機能のスケーリング則

著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

Tony Serino, Ph.D., Biology  
Department Misericordia  
University, Fuel Homeostasis  
General Physiology Biology  
346

<https://slideplayer.com/slide/12677525/>

(動物の代謝率のスケーリング)

Table 1. Scaling exponents for urban indicators vs. city size

Y	$\beta$	95% CI	Adj- $R^2$	Observations	Country-year
New patents	1.27	[1.25,1.29]	0.72	331	U.S. 2001
Inventors	1.25	[1.22,1.27]	0.76	331	U.S. 2001
Private R&D employment	1.34	[1.29,1.39]	0.92	266	U.S. 2002
"Supercreative" employment	1.15	[1.11,1.18]	0.89	287	U.S. 2003
R&D establishments	1.19	[1.14,1.22]	0.77	287	U.S. 1997
R&D employment	1.26	[1.18,1.43]	0.93	295	China 2002
Total wages	1.12	[1.09,1.13]	0.96	361	U.S. 2002
Total bank deposits	1.08	[1.03,1.11]	0.91	267	U.S. 1996
GDP	1.15	[1.06,1.23]	0.96	295	China 2002
GDP <b>(superlinear!)</b>	1.26	[1.09,1.46]	0.64	196	EU 1999–2003
GDP	1.13	[1.03,1.23]	0.94	37	Germany 2003
Total electrical consumption	1.07	[1.03,1.11]	0.88	392	Germany 2002
New AIDS cases	1.23	[1.18,1.29]	0.76	93	U.S. 2002–2003
Serious crimes	1.16	[1.11, 1.18]	0.89	287	U.S. 2003
Total housing	1.00	[0.99,1.01]	0.99	316	U.S. 1990
Total employment	1.01	[0.99,1.02]	0.98	331	U.S. 2001
Household electrical consumption	1.00	[0.94,1.06]	0.88	377	Germany 2002
Household electrical consumption	1.05	[0.89,1.22]	0.91	295	China 2002
Household water consumption	1.01	[0.89,1.11]	0.96	295	China 2002
Gasoline stations	0.77	[0.74,0.81]	0.93	318	U.S. 2001
Gasoline sales	0.79	[0.73,0.80]	0.94	318	U.S. 2001
Length of electrical cables	0.87	[0.82,0.92]	0.75	380	Germany 2002
Road surface	0.83	[0.74,0.92]	0.87	29	Germany 2002

Data sources are shown in *SI Text*. CI, confidence interval; Adj- $R^2$ , adjusted  $R^2$ ; GDP, gross domestic product.

(Geoffrey B. West et al., PNAS (2007))

Luis M. A. Bettencourt, José Lobo, Dirk Helbing, Christian Kühnert, and Geoffrey B. West, Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities, PNAS April 24, 2007 104 (17) 7301–7306  
<https://www.pnas.org/content/104/17/7301> Table 1.  
Copyright (2007) National Academy of Sciences