

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅷ 2019 島田尚

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



# 数理手法VIII

数理・情報教育研究センター 数学基礎教育部門  
工学系研究科システム創成学専攻

島田 尚

# 特異値分解

対角行列のような行列  $\Sigma$  と直交行列  $U, V$  により、

行列を  $C = U\Sigma V^T$  の形に分解 (cf. 対角化):

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c} | & & & | & \\ \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_i & \cdots & \vec{u}_n \\ | & & & & | \end{array} \right) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\vec{v}_1^* - \\ \vdots \\ -\vec{v}_j^* - \\ \vdots \\ -\vec{v}_m^* - \end{pmatrix}$$

ポイント:

- $C^T C$  は対称行列なのでこの行列の(直交)固有ベクトルを用いる
- $V$  は  $C^T C$  の正規化した固有列ベクトルを並べたもの
- $U$  は  $CV$  の各列を正規化したもの

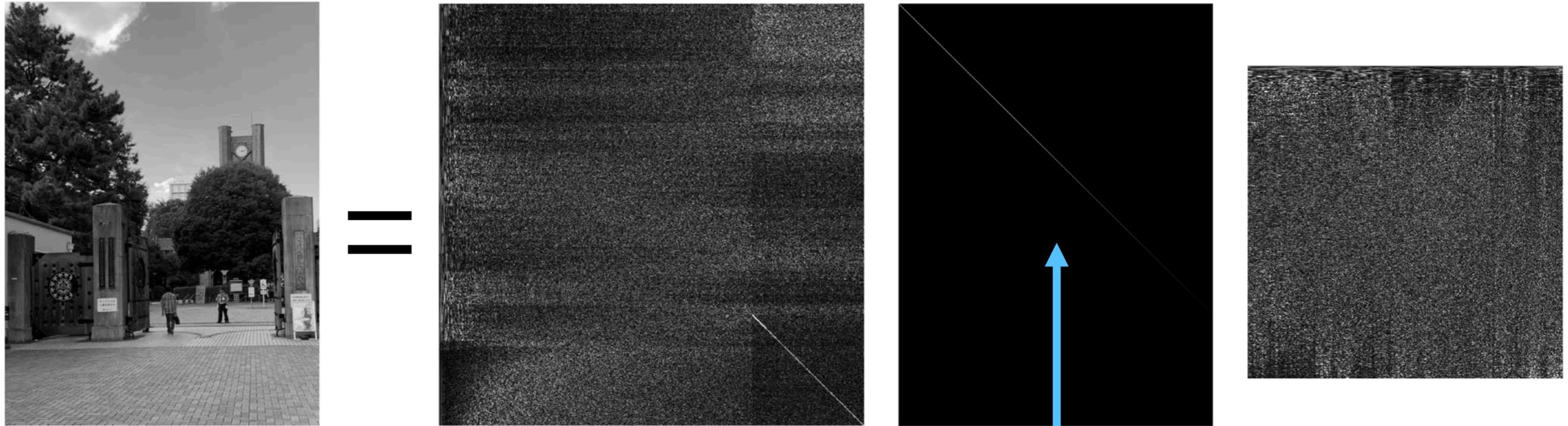
# 画像(ピクセル値)の特異値分解



=

233	232	231	229	227	225	225	225	221	195	181	186	152
233	232	231	229	228	227	227	227	215	172	150	161	138
234	233	231	230	229	229	229	229	216	159	134	108	76
235	234	232	229	229	230	230	228	215	174	149	111	63
235	234	231	229	229	230	228	225	203	184	150	134	84
235	234	231	228	228	229	226	221	190	177	160	136	99
234	233	231	228	228	228	224	218	164	148	147	117	98
233	233	230	227	228	228	224	217	172	144	114	100	93
231	232	228	228	228	225	221	211	172	164	120	76	80
231	231	227	227	227	225	216	196	162	128	120	88	67
229	229	227	228	228	227	213	181	156	120	99	102	82
227	227	228	229	226	227	211	173	144	129	79	99	104
226	228	228	226	221	224	214	181	158	145	107	94	105
224	226	225	223	219	224	223	203	181	160	133	95	95
219	223	223	222	219	221	222	212	180	158	126	92	88
216	222	222	221	217	212	210	203	182	162	131	93	88
215	215	219	220	212	211	201	168	162	151	138	81	80
213	223	220	209	201	200	191	167	155	141	103	54	51
213	218	211	208	205	191	177	167	157	131	79	46	51
204	210	208	207	198	181	179	183	168	141	91	49	47
190	198	202	203	196	191	187	175	165	150	119	76	57
185	187	192	198	191	182	178	167	142	114	95	76	54
175	181	185	187	167	141	149	172	142	97	87	66	49
157	172	173	174	162	132	123	139	128	103	123	78	63
160	165	168	170	158	151	141	109	72	97	128	141	82
156	159	163	166	156	151	148	128	77	72	117	161	113
160	157	155	156	155	157	153	135	91	79	105	147	139
155	158	156	150	149	153	151	138	125	142	120	117	144
156	152	147	144	148	147	138	132	151	151	147	146	135
159	148	140	137	135	122	111	121	147	139	133	135	136
153	152	144	124	104	84	82	109	135	111	104	101	117

# 画像の特異値分解

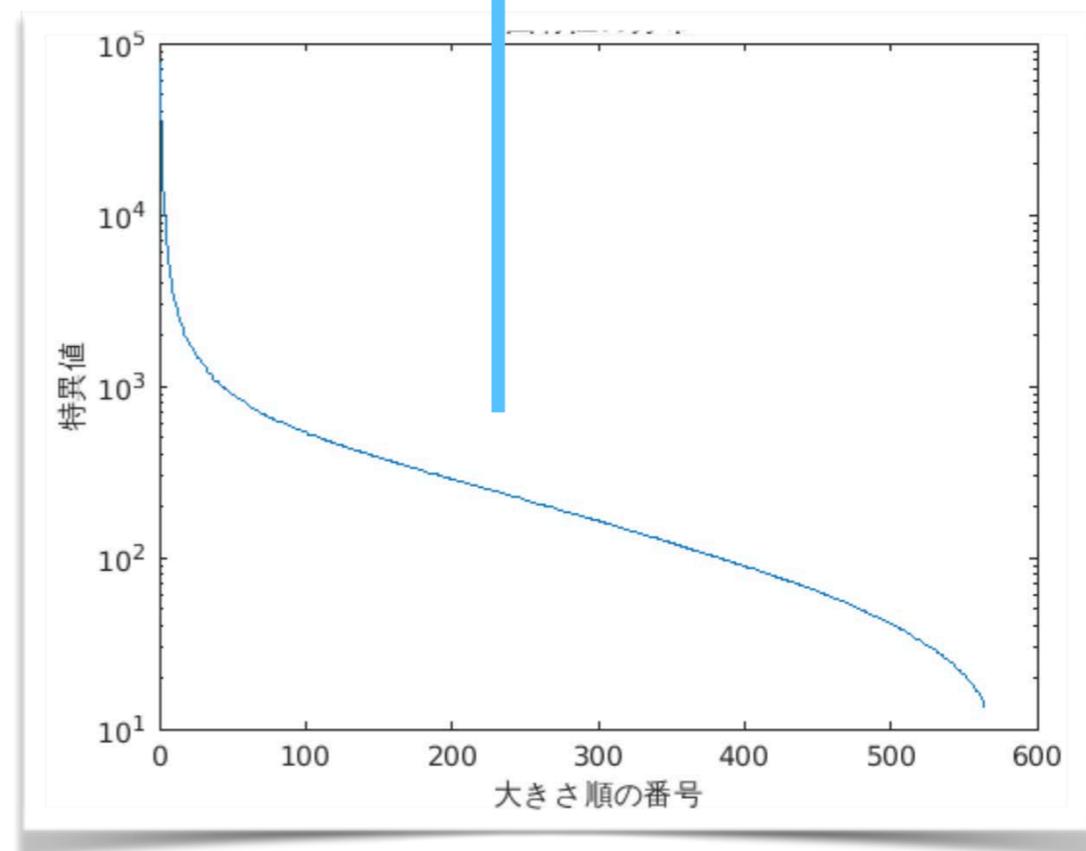


(要素の絶対値で表示)

フルランクの特異値をとらなくても、  
結構良い再構成ができるのでは？



画像の圧縮  
(特異値分解の低ランク近似)

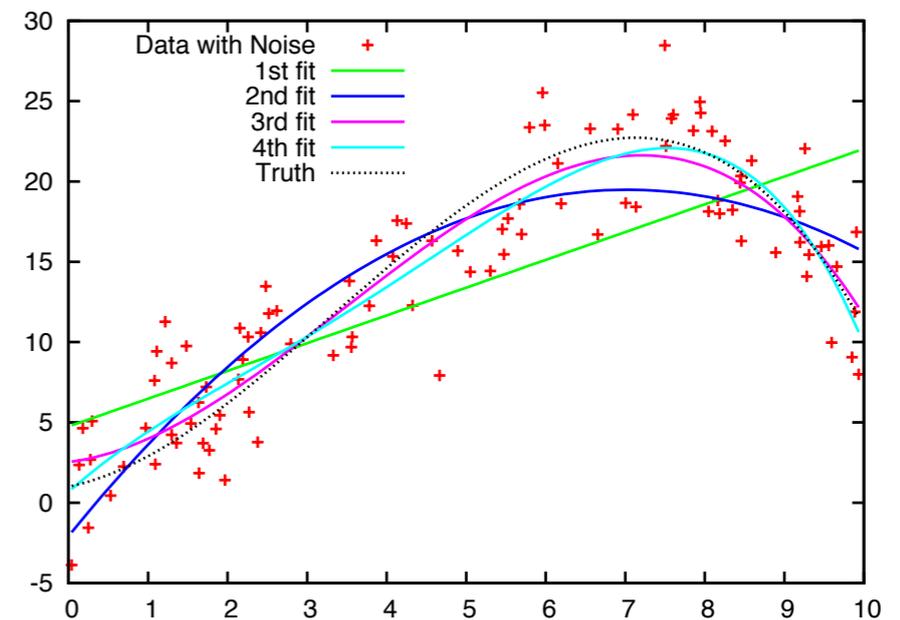


# 統計解析とデータの縮約

- 関数フィッティング (線形回帰) と最小2乗問題

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\xi}$$

$$\min \left( \|y - X\vec{\beta}\|_2^2 \right)$$



- 主成分分析

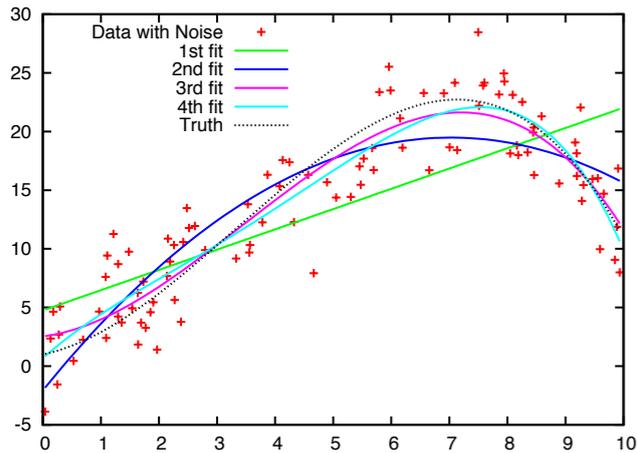
- 高次元データの(自動的)縮約  
→ データサイエンス、機械学習

著作権等の都合により、ここに挿入されていた画像を削除しました。

70000羽のムクドリの写真

<https://www.maxitendance.com/2016/02/etourneaux-oiseaux-ballet-ciel-angleterre-bbc.html>

# スパースモデリング



- 線形回帰と最小2乗問題

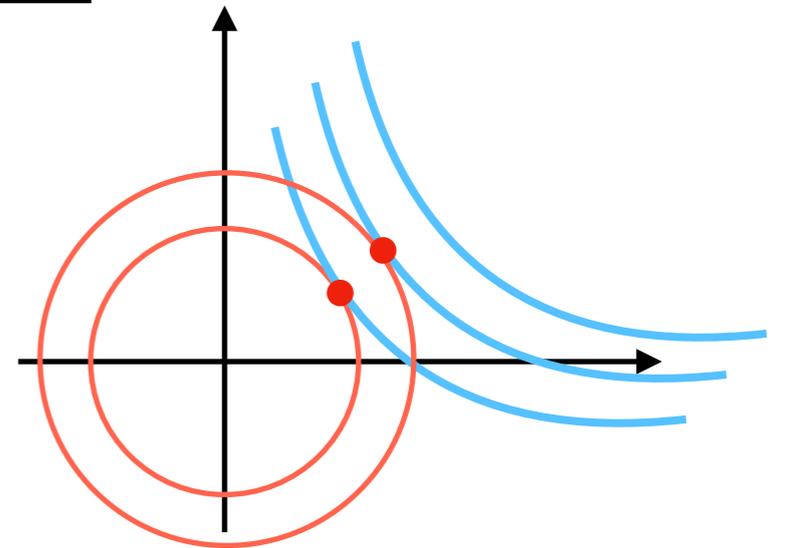
$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\xi} \quad \min \left( \|y - X\vec{\beta}\|_2^2 \right)$$

説明変数( $\beta$ )は少ない方が良い!



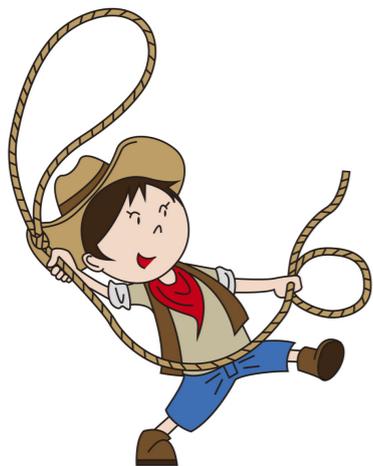
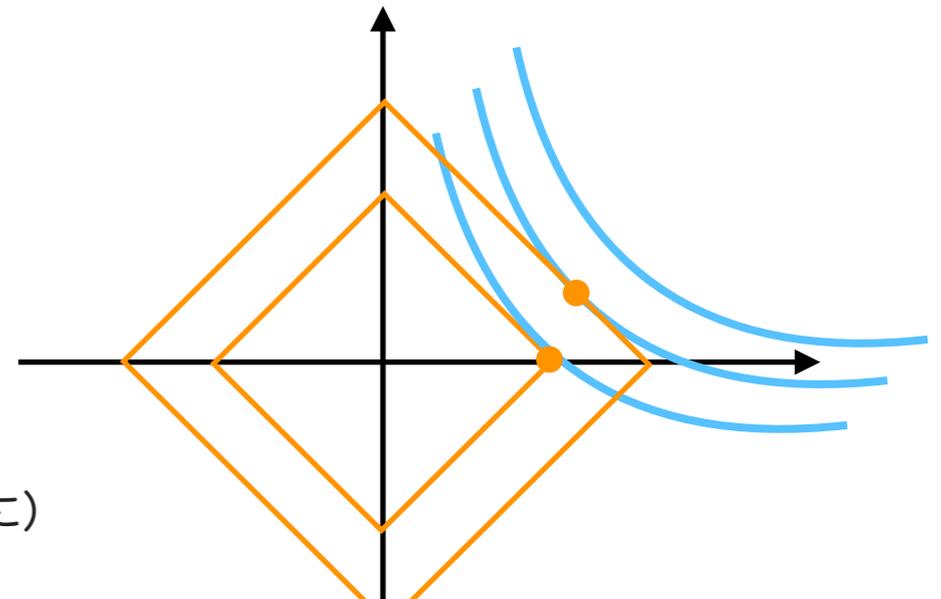
- Ridge

$$\min \left( \|y - X\vec{\beta}\|_2^2 + \lambda \|\vec{\beta}\|_2^2 \right)$$



- LASSO

$$\min \left( \|y - X\vec{\beta}\|_2^2 + \lambda \|\vec{\beta}\|_1 \right)$$



hrukyさんによるイラスト ACからのイラスト

(Tibshirani, Robert (1996) 以降ポピュラーに)