

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅶ 2019 北川源四郎

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



時系列解析 (7)

－局所定常ARモデル－

東京大学 数理・情報教育研究センター

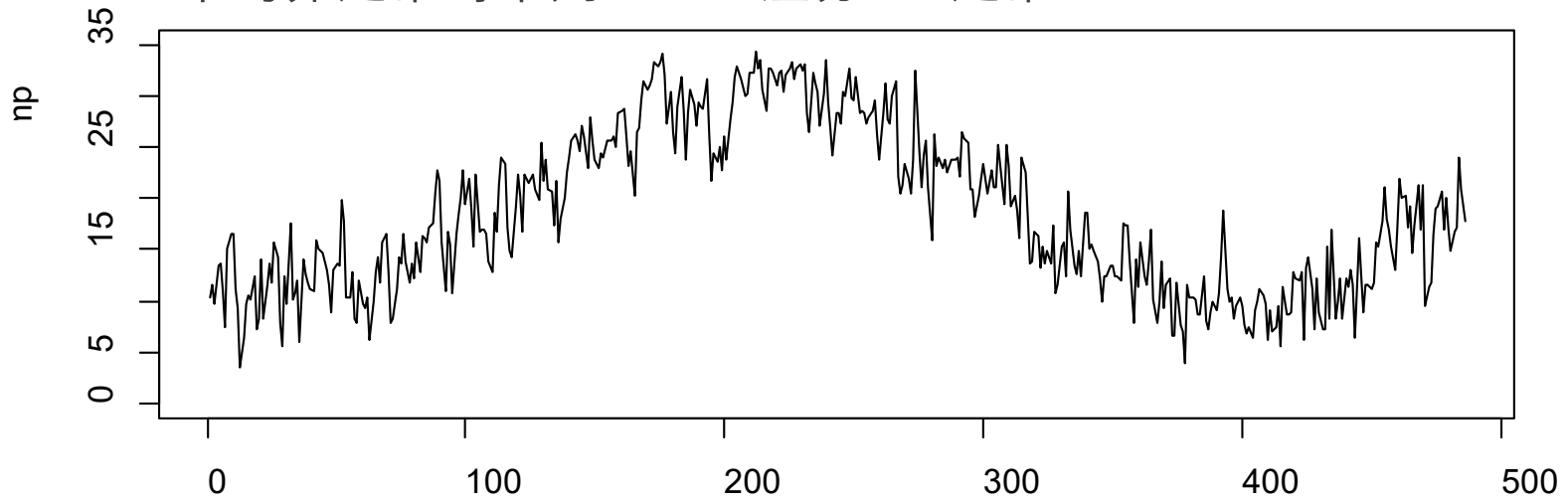
北川 源四郎

区分的定常モデル：非定常時系列モデルへの第1歩

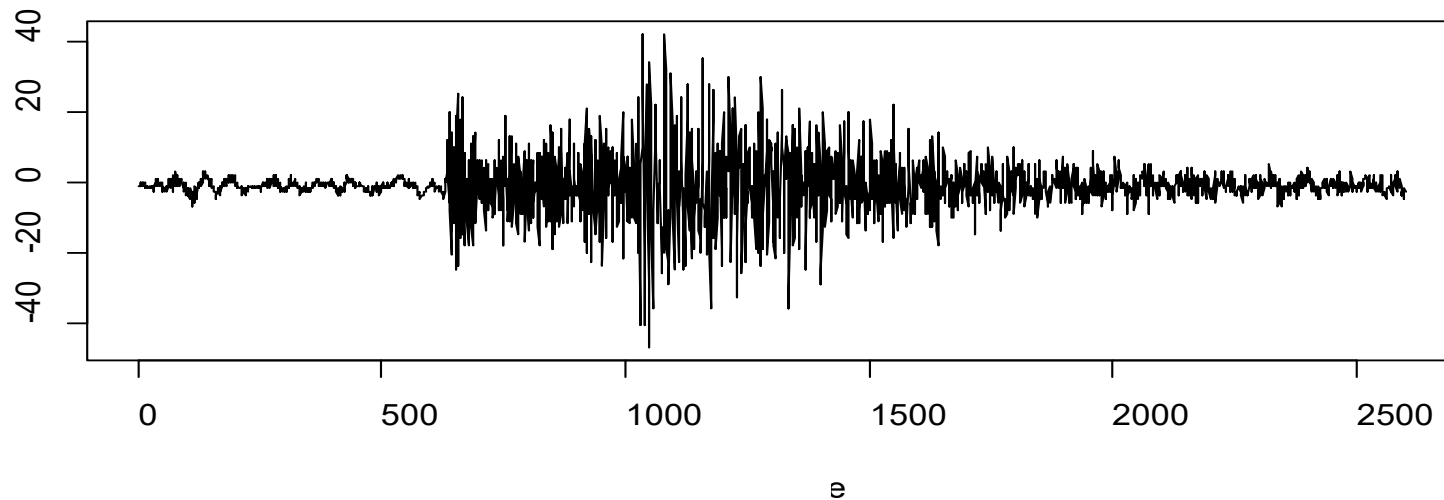
1. レベルシフトの検出
2. 局所定常ARモデル
 - (1) 任意の区間への自動分割
 - (2) 変化時点の精密な推定
 - (3) 変化時点の事後確率
3. 統計的制御
 - (1) 線形二次評価制御問題
 - (2) 船舶のオートパイロット
 - (3) 局所定常ARモデルに基づく外乱適応型自動制御

定常モデルで非定常時系列を分析する

平均非定常時系列 → 差分 + 定常モデル



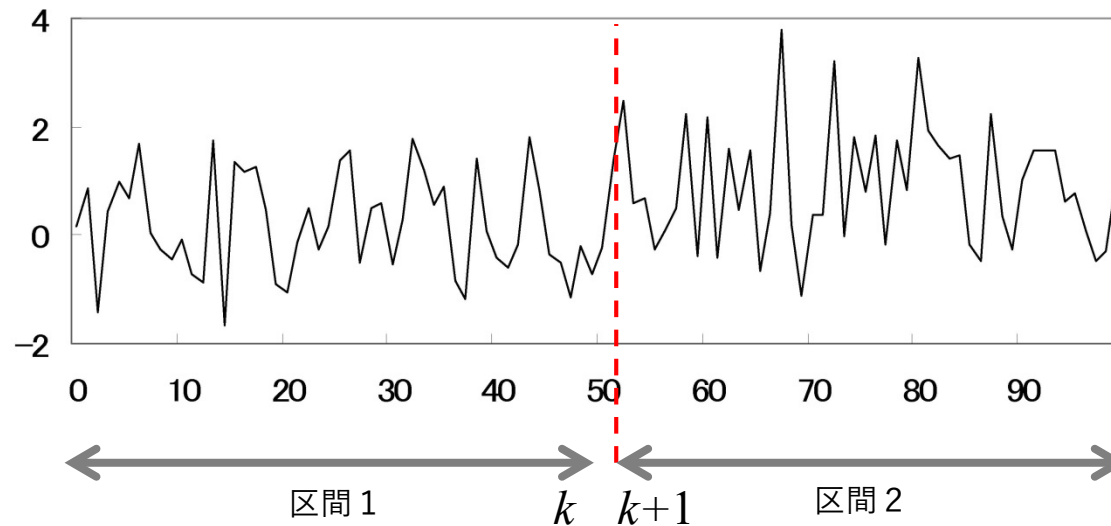
分散・共分散非定常時系列 \xrightarrow{e} 区分化 + 定常モデル



非定常時系列のモデリング

- ✓ ARIMAモデル
平均非定常 定常化 ARMAモデル
- レベルシフトモデル
平均非定常 区分的定常
- 局所定常ARモデル
平均・分散・共分散非定常 区分的定常
- ✓ 状態空間モデル
平均・分散・共分散非定常 直接モデル化（次回以降）

レベルシフトの検出



$$y_n \sim N(\mu_n, \sigma^2) \quad p(y_n | \mu_n, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y_n - \mu_n)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$k+1$: 変化点

$$\mu_n = \begin{cases} \theta_1 & n \leq k \\ \theta_2 & n > k \end{cases}$$

y_1, \dots, y_N データ

変化点を $k+1$ と仮定したモデルの尤度

$$L(\theta_1, \theta_2, \sigma_k^2) = \prod_{n=1}^k p(y_n | \theta_1, \sigma_k^2) \prod_{n=k+1}^N p(y_n | \theta_2, \sigma_k^2)$$

レベルシフトの検出

尤度
$$L(\theta_1, \theta_2, \sigma_k^2) = \prod_{n=1}^k p(y_n | \theta_1, \sigma_k^2) \prod_{n=k+1}^N p(y_n | \theta_2, \sigma_k^2)$$

対数尤度
$$\ell(\theta_1, \theta_2, \sigma_k^2) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_k^2) - \frac{1}{2\sigma_k^2} \left\{ \sum_{n=1}^k (y_n - \theta_1)^2 + \sum_{n=k+1}^N (y_n - \theta_2)^2 \right\}$$

最尤推定値
$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k y_n, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N y_n$$
$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=1}^k (y_n - \hat{\theta}_1)^2 + \sum_{n=k+1}^N (y_n - \hat{\theta}_2)^2 \right\}$$

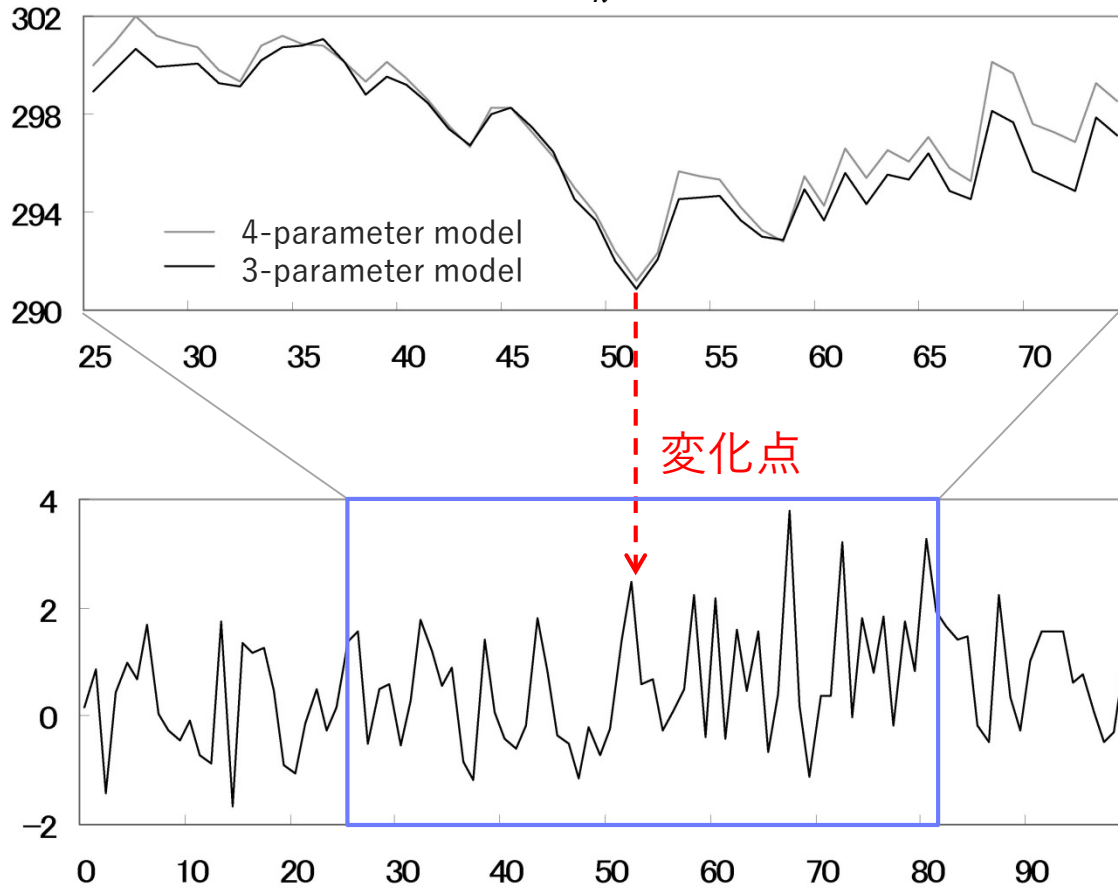
最大対数尤度
$$\ell(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\sigma}_k^2) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\hat{\sigma}_k^2) - \frac{N}{2}$$

パラメータ数 = 3

$$\text{AIC}_k = N \log(2\pi\hat{\sigma}_k^2) + N + 2 \times 3$$

変化点の検出

AIC_k の変化



3パラメータモデル

$$y_n \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma^2) & n \leq k \\ N(\mu_2, \sigma^2) & n > k \end{cases}$$

● レベルシフトなし

$$y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

● 拡張

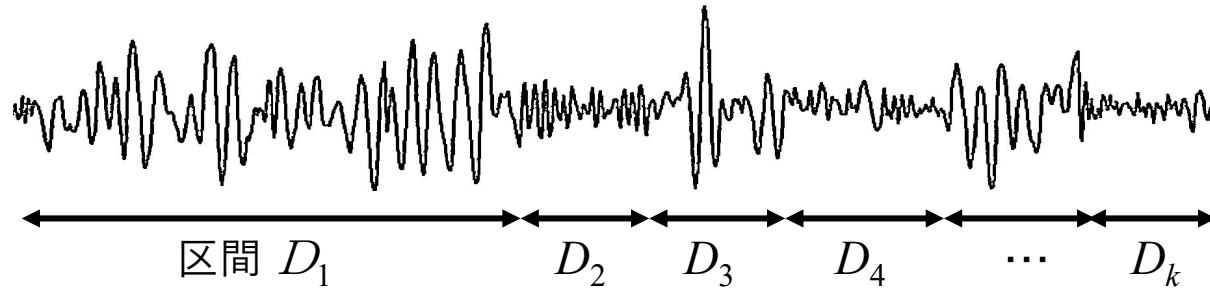
4パラメータモデル

$$y_n \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma_1^2) & n \leq k \\ N(\mu_2, \sigma_2^2) & n > k \end{cases}$$

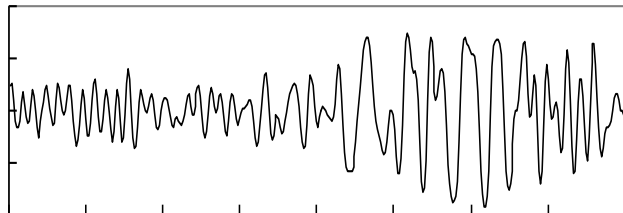
● さらなる拡張

正規分布 → 時系列モデル

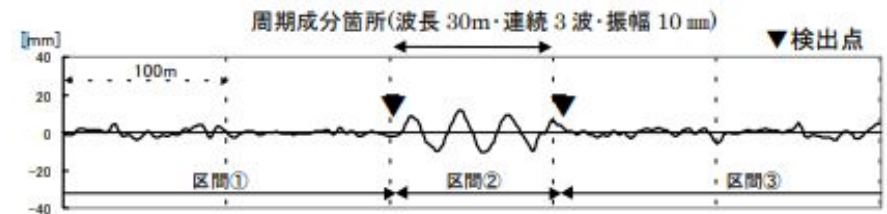
区分的に性質が変化する時系列



地震波： 常微動， P波， S波， . . .



新幹線・周期的軌道狂いの検出



鉄道総合技術研究所 元好, 古川, 神山 (2004) 「局所定常ARモデルを用いた周期的な軌道狂いの検出」より許可を得て転載

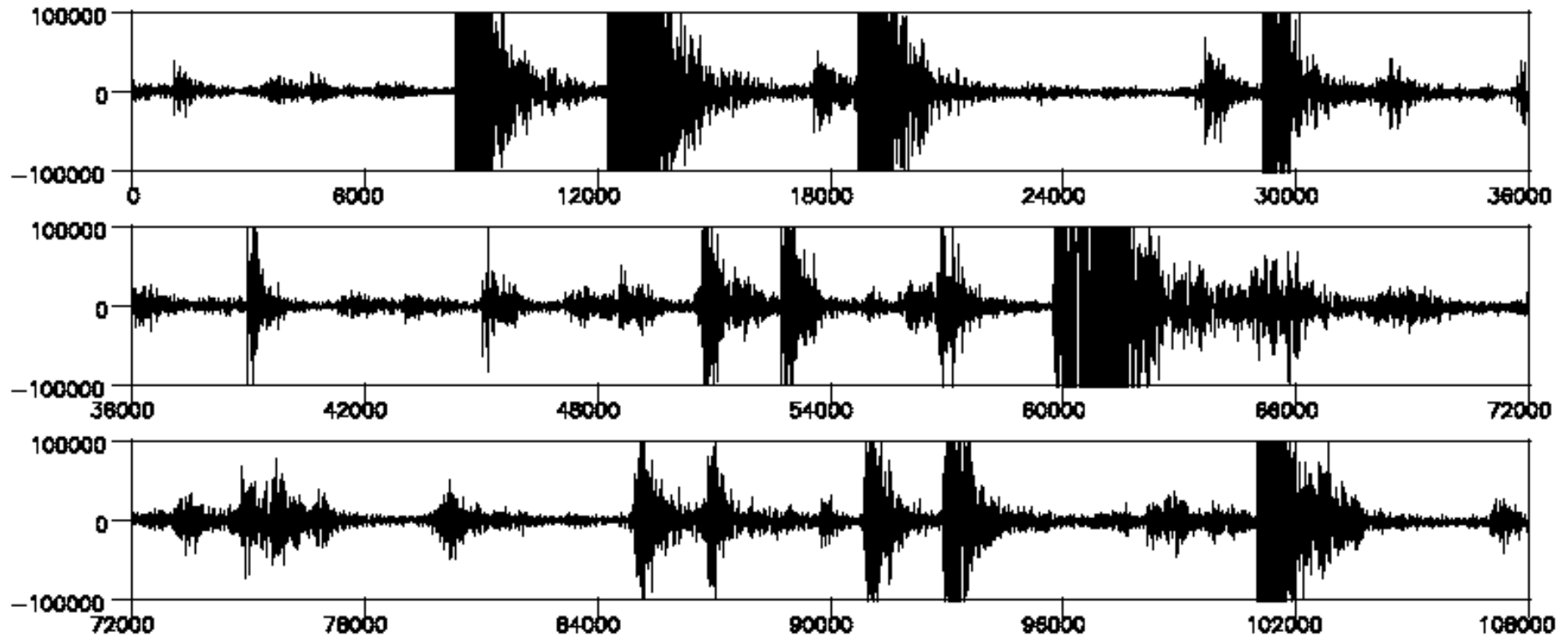
脳波： 覚醒時と睡眠時

	周波数帯域	出現する状況
α 波	8-14Hz	瞑想時
β 波	14-30Hz	緊張時
θ 波	4-8Hz	まどろみ時
δ 波	1-4Hz	深い睡眠時



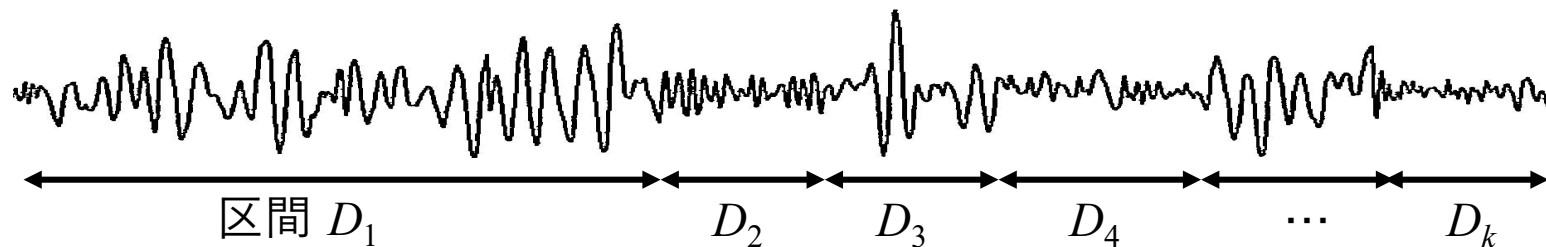
引用元 Railstation.net

火山性微動（有珠山）



Hokkaido, Japan March 31, 2000 13:07-
提供：北海道大学地震火山研究観測センター 西村裕一

局所定常 AR モデル



- 各区間 D_j では定常と仮定
- D_j の定常時系列を $AR(m_j)$ モデルで表現 ($m_j \leq M$)

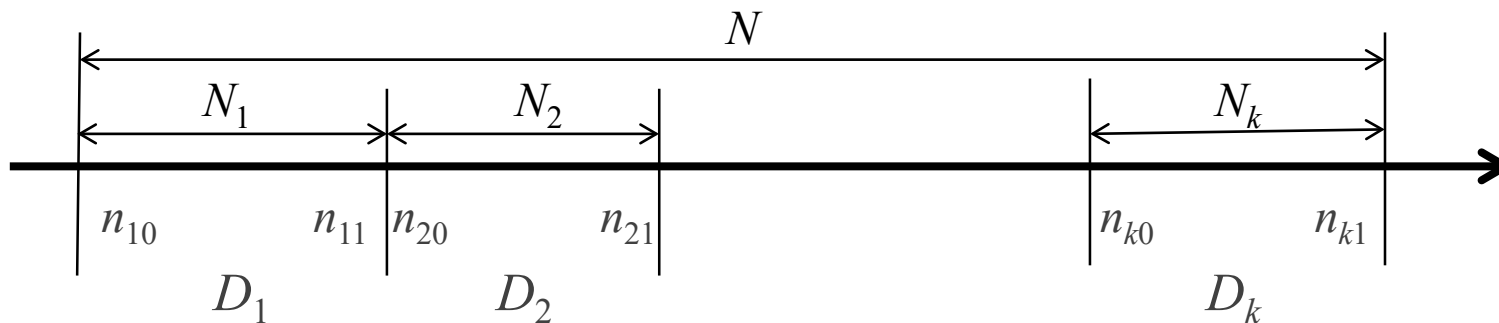
$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ij} y_{n-i} + v_{nj}, \quad v_{nj} \sim N(0, \sigma_j^2), \quad n \in D_j$$

- 平均値の変化
- 分散の変化
- スペクトル・共分散構造（波形）の変化
- 任意時点での構造変化
- AICによる自動推定

局所定常ARモデル

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k \quad \text{時間領域の分割}$$

$$D_i = [n_{i0}, n_{i1}] \quad n_{i0} = \sum_{j=1}^{i-1} N_j + 1, \quad n_{i1} = \sum_{j=1}^i N_j$$



$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} + v_{nj}, \quad v_{nj} \sim N(0, \sigma_j^2), \quad n \in D_j$$

$$\theta = (k, N_j, m_j, (a_{ji}, i = 1, \dots, m_j), \sigma_j^2; j = 1, \dots, k)^T$$

$$L(\theta) = p(y_1, \dots, y_N | \theta) = \prod_{j=1}^k \prod_{n=n_{j0}}^{n_{j1}} p(y_n | y_1, \dots, y_{n-1}, \theta)$$

$$\cong \prod_{j=1}^k (2\pi\sigma_j^2)^{-\frac{N_j}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{n=n_{j0}}^{n_{j1}} \left(y_n - \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} \right)^2 \right\}$$

局所定常ARモデル

$$\begin{aligned} \ell(k, N_j, m_j, (a_{ji}, i = 1, \dots, m_j), \sigma_j^2; j = 1, \dots, k) \\ = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left\{ N_j \log 2\pi\sigma_j^2 + \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{n=n_{j0}}^{n_{j1}} \left(y_n - \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} \right)^2 \right\} \\ \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{n=n_{j0}}^{n_{j1}} \left(y_n - \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} y_{n-i} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(k, N_j, m_j, (a_{ji}, i = 1, \dots, m_j), \hat{\sigma}_j^2; j = 1, \dots, k) \\ = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left\{ N_j \log 2\pi\hat{\sigma}_j^2 + N_j \right\} \\ = -\frac{N-m}{2} (\log 2\pi + 1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k N_j \log \hat{\sigma}_j^2 \end{aligned}$$

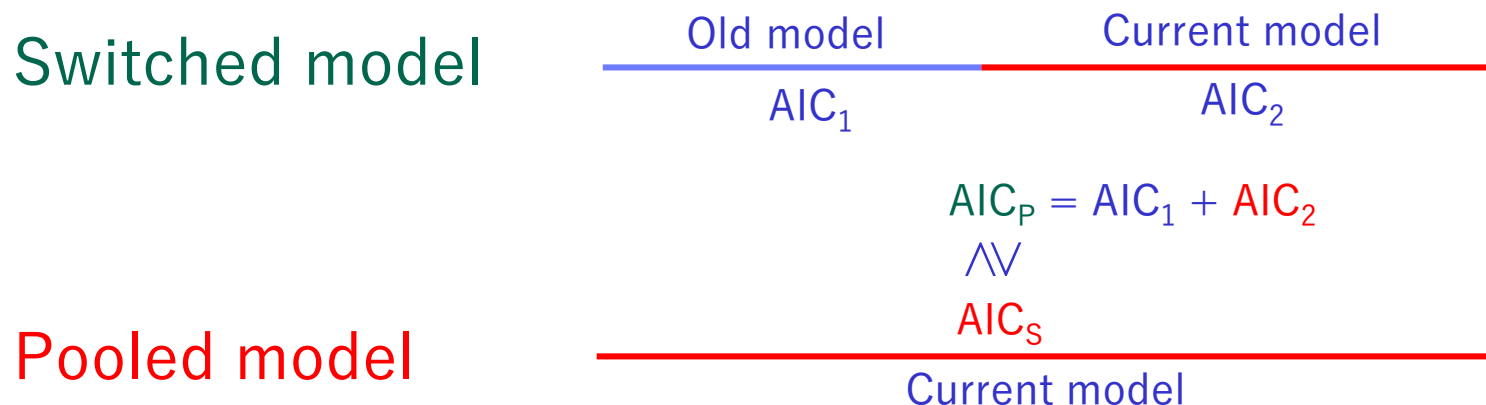
$$\text{AIC} = (N-m)(\log 2\pi + 1) + \sum_{j=1}^k N_j \log \hat{\sigma}_j^2 + 2 \sum_{j=1}^k (m_j + 1)$$

2 種類の実装

- すべての区分数(k)および区間長(N_1, \dots, N_k)の候補を比較し、最良の局所定常ARモデルを求めるのは非現実的
 1. 任意個の区間への自動分割 大まかに分割
 2. 変化点の精密推定 1か所を精密に推定

任意個の区間への自動分割

- (1) 定常性を仮定する小区間の長さ L , ARの最大次数 M を決める
- (2) 新しい長さ L のデータが得られる度に



を比較し, AICが小さい方をCurrent Modelとして選択する

$$N_j = c_j L$$

m

D_j 区間の長さ

AR次数の最大

c_j は整数

初期モデル (D_1 のモデル)

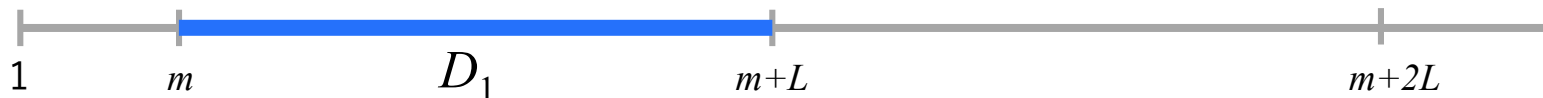
$$X_0 = [Z | y] = \begin{bmatrix} y_m & \cdots & y_1 & y_{m+1} \\ y_{m+1} & \cdots & y_2 & y_{m+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{m+L-1} & \cdots & y_L & y_{m+L} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad HX = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m+1,m+1} \\ O \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2(j) = \frac{1}{L} \sum_{i=j+1}^{m+1} s_{i,m+1}^2$$

$$\text{AIC}_0(j) = L \log \hat{\sigma}_0^2(j) + 2(j+1)$$

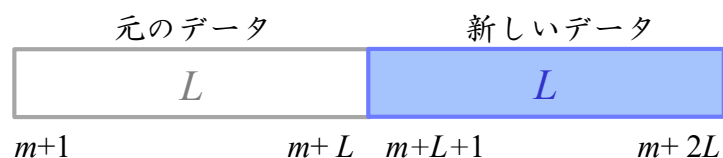
$$\text{AIC}_0 \equiv \min_j \text{AIC}_0(j)$$

初期モデル



新しいデータのモデル

$$X_1 = \begin{bmatrix} y_{m+L} & \cdots & y_{L+1} & y_{m+L+1} \\ y_{m+L+1} & \cdots & y_{L+2} & y_{m+L+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{m+2L-1} & \cdots & y_{2L} & y_{m+2L} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad H_1 X_1 = \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m+1,m+1} \\ O \end{bmatrix}$$



$$\hat{\sigma}_1^2(j) = \frac{1}{L} \sum_{i=j+1}^{m+1} r_{i,m+1}^2$$

$$\text{AIC}_1(j) = L \log \hat{\sigma}_1^2(j) + 2(j+1)$$

$$\text{AIC}_1 \equiv \min_j \text{AIC}_1(j)$$

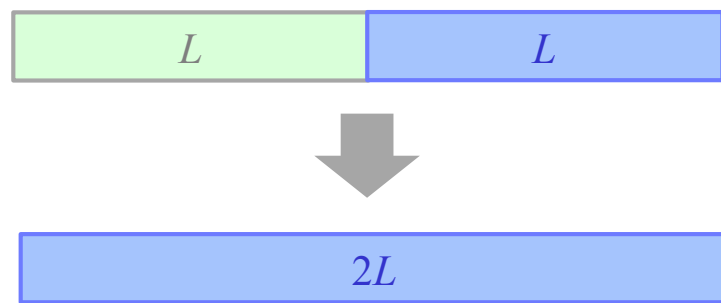
構造変化したと仮定するモデルのAIC (Switched model)

$$\text{AIC}_S \equiv \text{AIC}_0 + \text{AIC}_1 = \min_j \text{AIC}_0(j) + \min_j \text{AIC}_1(j)$$

データ併合したモデル

$$X_2 = \begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ & & s_{1,m+1} \\ r_{11} & \cdots & r_{1,m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ & & r_{1,m+1} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad H_2 X_2 = \begin{bmatrix} T \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1,m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ & & t_{m+1,m+1} \\ O & & \end{bmatrix}$$

構造変化なしと仮定するモデルのAIC (Pooled model)



$$\hat{\sigma}_P^2(j) = \frac{1}{2L} \sum_{i=j+1}^{m+1} t_{i,m+1}^2$$

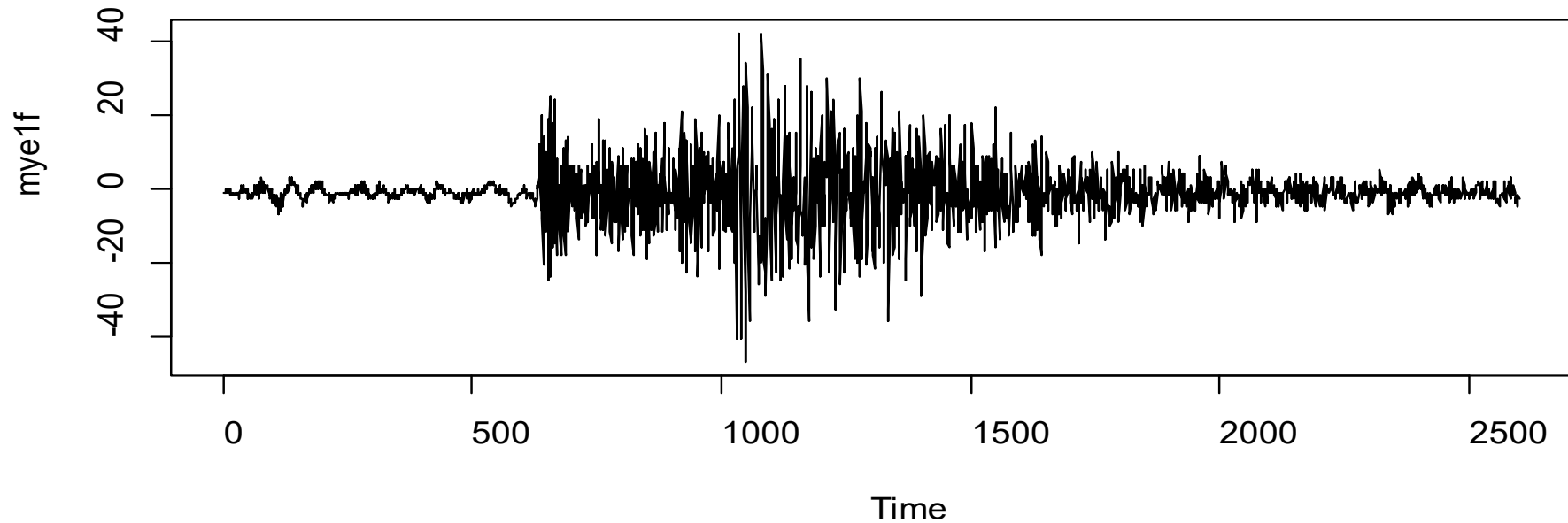
$$\text{AIC}_P(j) = 2L \log \hat{\sigma}_P^2(j) + 2(j+1)$$

$$\text{AIC}_P \equiv \min_j \text{AIC}_P(j)$$

MYE1F(地震波東西方向)データ

data(MYE1F)

lsar (MYE1F, max.arorder = 10, ns0=200)



$\Delta t = 0.02$ 秒, $N=2600$

$M = 10$ 最大AR次数

$L = 200$ 基本区間長

局所定常 AR モデル (推定結果)

x <- lsar (MYE1F, max.arorder=10, ns0=200)

x

<<< new data (n = 11 --- 210) >>>

initial model : NS = 200

ms = 9 sds = 9.533019e-01 aics = 578.011

<<< new data (n = 211 --- 410) >>>

switched model : (nf = 200, ns = 200)

ms = 8 sds = 7.571863e-01 aics = 1107.957

pooled model : (np = 400)

mp = 9 sdp = 8.775778e-01 aicp = 1102.915

*** pooled model accepted ***

<<< new data (n = 411 --- 610) >>>

switched model : (nf = 400, ns = 200)

ms = 8 sds = 7.353224e-01 aics = 1627.001

pooled model : (np = 600)

mp = 9 sdp = 8.567912e-01 aicp = 1629.990

*** switched model accepted ***

<<< new data (n = 611 --- 810) >>>

switched model : (nf = 200, ns = 200)

ms = 4 sds = 2.372409e+01 aics = 1734.960

pooled model : (np = 400)

mp = 10 sdp = 1.255320e+01 aicp = 2169.141

*** switched model accepted ***

<<< new data (n = 811 --- 1010) >>>

switched model : (nf = 200, ns = 200)

ms = 4 sds = 2.701266e+01 aics = 2447.710

pooled model : (np = 400)

mp = 10 sdp = 2.468140e+01 aicp = 2439.571

*** pooled model accepted ***

<<< new data (n = 1011 --- 1210) >>>

switched model : (nf = 400, ns = 200)

ms = 9 sds = 4.807289e+01 aics = 3801.690

pooled model : (np = 600)

mp = 10 sdp = 3.864933e+01 aicp = 3917.444

*** switched model accepted ***

<<< new data (n = 1211 --- 1410) >>>

switched model : (nf = 200, ns = 200)

ms = 9 sds = 3.470873e+01 aics = 2659.093

pooled model : (np = 400)

mp = 8 sdp = 4.308581e+01 aicp = 2658.428

*** pooled model accepted ***

<<< new data (n = 1411 --- 1610) >>>

switched model : (nf = 400, ns = 200)

ms = 10 sds = 1.764112e+01 aics = 3822.050

pooled model : (np = 600)

mp = 8 sdp = 3.582855e+01 aicp = 3867.973

*** switched model accepted ***

<<< new data (n = 1611 --- 1810) >>>

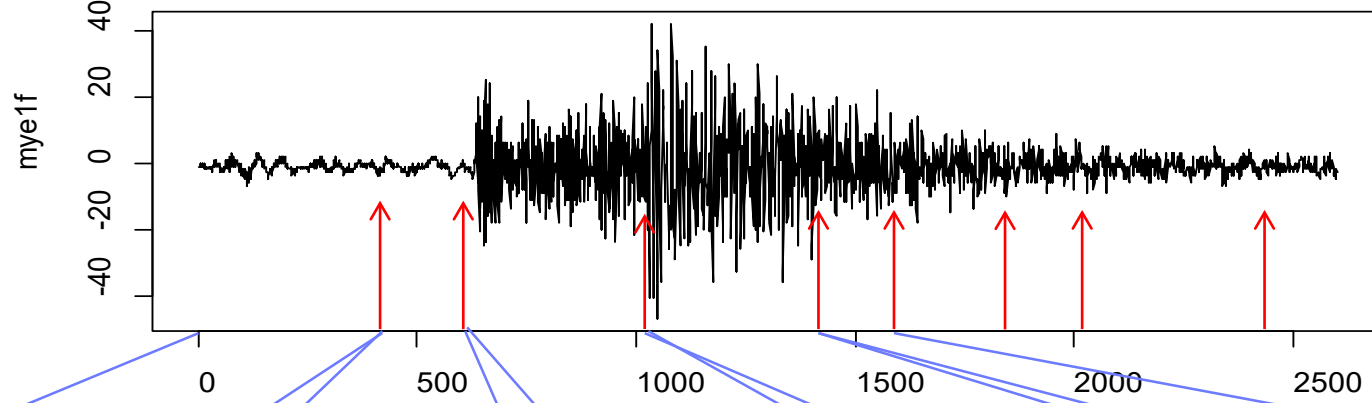
switched model : (nf = 200, ns = 200)

ms = 9 sds = 1.032457e+01 aics = 2218.103

pooled model : (np = 400)

mp = 10 sdp = 1.447380e+01 aicp = 2226.087

*** switched model accepted ***



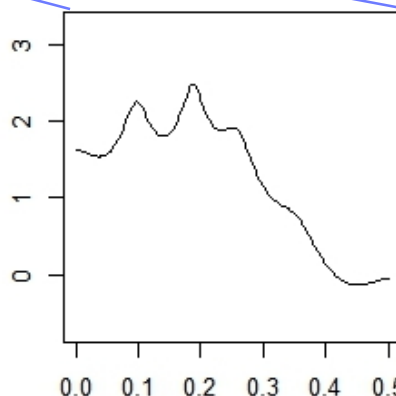
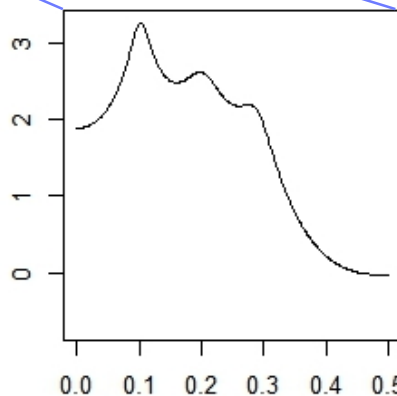
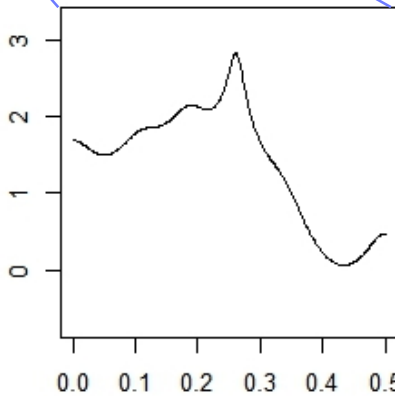
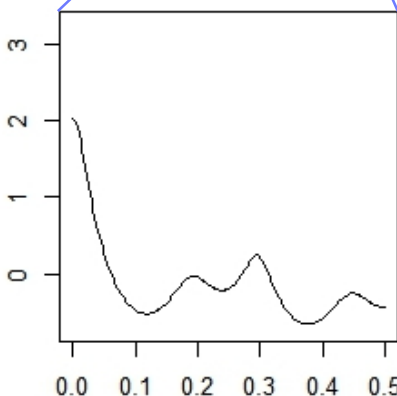
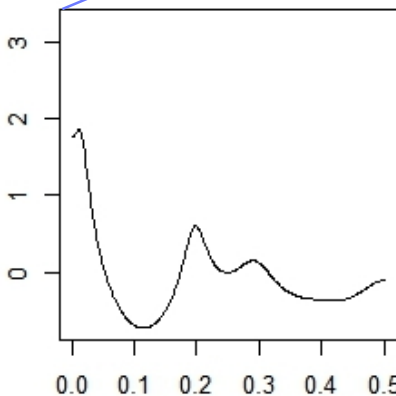
11 - 410

411 - 610

611 - 1010

1011 - 1410

1411 - 1610

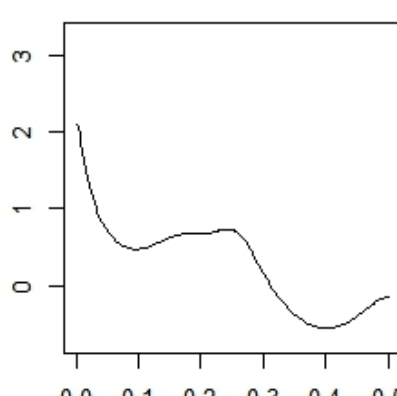
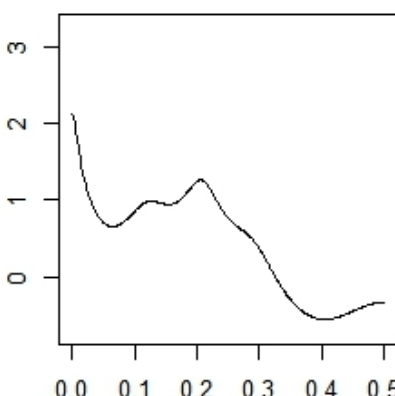
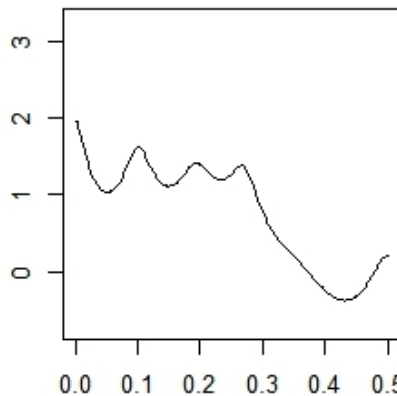
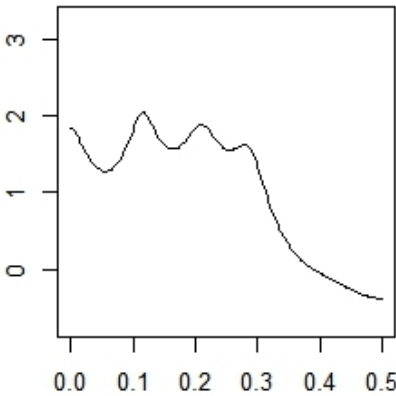


1611 - 1810

1811 - 2010

2011 - 2410

2411 - 2600



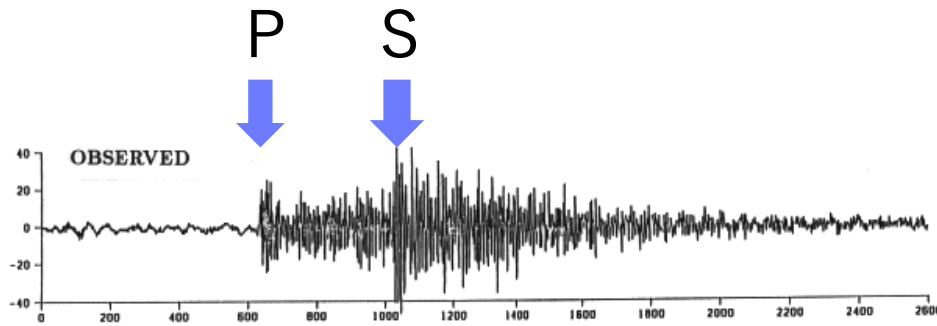
data(MYE1F)

lsar (MYE1F,max.arorder=10, ns0=200)

MYE1Fデータ(解析結果まとめ)

- P波, S波の到着を適切に検出している. AICの違いも大きい
 - P波到着時($n=611$) $\Delta AIC=434.1$, $AIC_s=1735.0$, $AIC_p=2169.1$
 - S波到着時($n=1011$) $\Delta AIC=115.7$, $AIC_s=3801.7$, $AIC_p=3917.4$
- $N=411$ は誤検出かもしれないが, P波のスペクトルが多少増加している可能性もある. $\Delta AIC=3.0$ と小さい.
- 長周期($f=0$ 付近)のパワーはほぼ $p(f)=2.0$ で一貫している.
- S波到着後, パワーの減少に伴ってモデルが頻繁に変更されている. $f(0)$ は一定の一方, $f=0.1\sim 0.3$ のパワーが段々減少しているので, 一定のモデルと見なすにはモデルの工夫が必要.

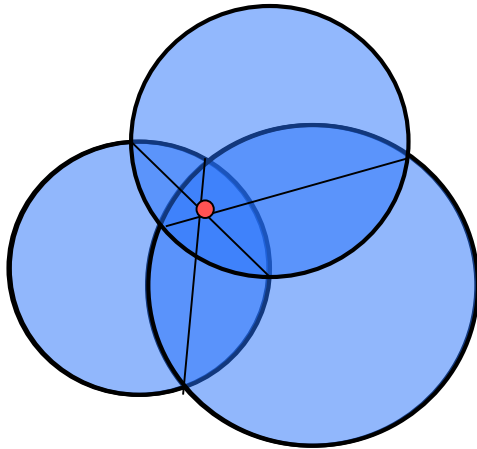
地震波到着時刻の推定



到着時刻の推定

$\Delta T = 0.01 \text{ sec.}$

震源の推定



津波の予測・地震警報

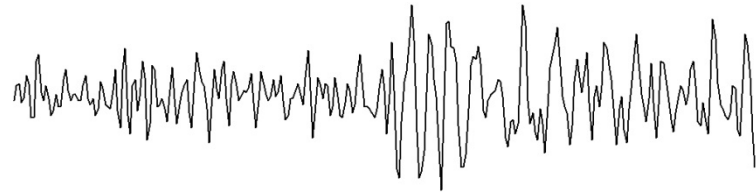
自動・高速アルゴリズム

局所定常 AR モデル

+

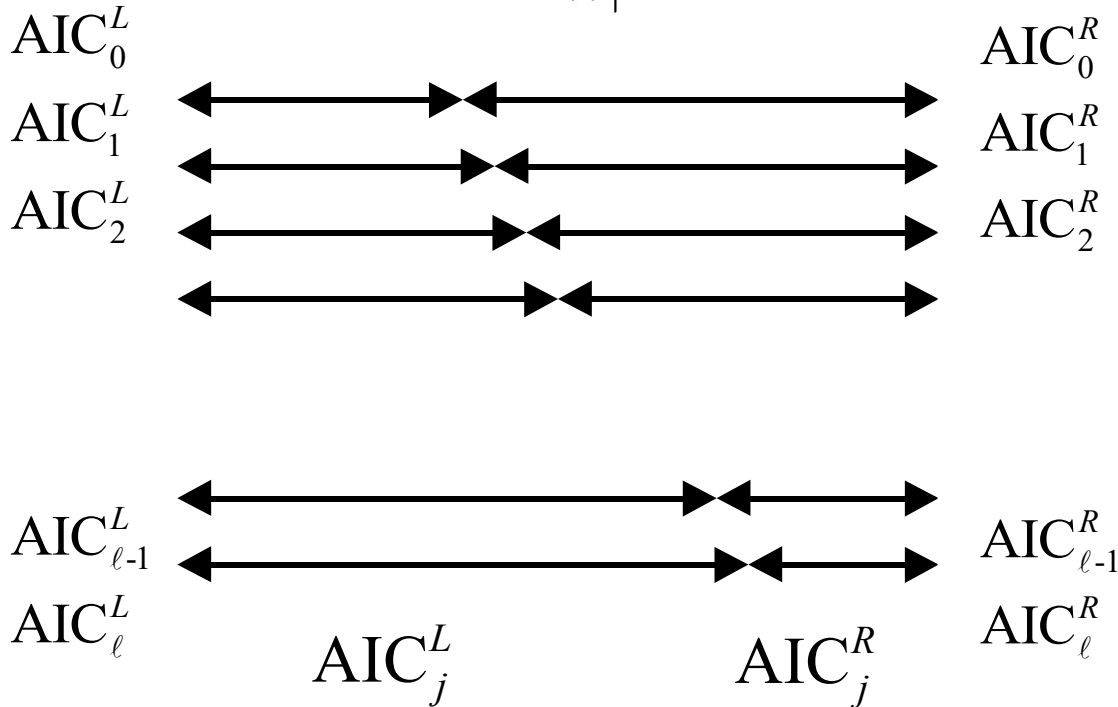
情報量規準AICによる
自動的モデリング

変化時点の精密な推定

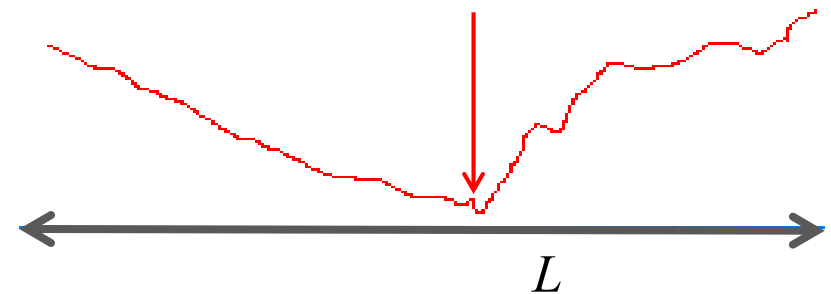


全体のモデルのAIC

$$AIC_j = AIC_j^L + AIC_j^R$$



変化時点の最小AIC 推定値



$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ij} y_{n-i} + v_{nj}$$

$$v_{nj} \sim N(0, \sigma_j^2)$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{\ell_j} b_{ij} y_{n-i} + u_{nj}$$

$$u_{nj} \sim N(0, \tau_j^2)$$

前半のモデルのAIC

$$\text{AIC}_j^L = \min_m \left\{ j \log(2\pi\hat{\tau}_j^2) + j + 2(m+1) \right\}$$

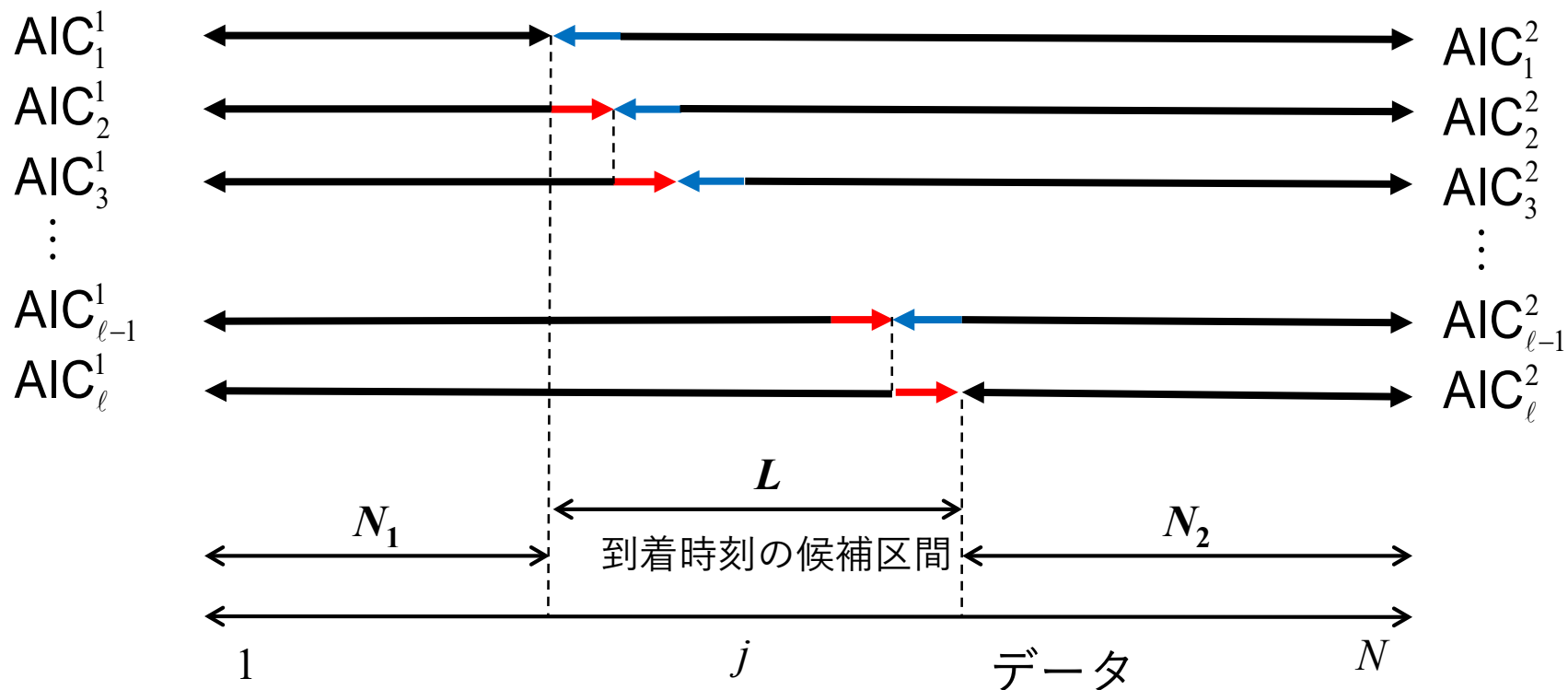
後半のモデルのAIC

$$\text{AIC}_j^R = \min_\ell \left\{ (N-j) \log(2\pi\hat{\sigma}_j^2) + (N-j) + 2(\ell+1) \right\}$$

全体の局所定常ARモデルのAIC

$$\begin{aligned} \text{AIC}_j &= \text{AIC}_j^L + \text{AIC}_j^R \\ &= \min_{m,\ell} \left\{ j \log(2\pi\hat{\tau}_j^2) + (N-j) \log(2\pi\hat{\sigma}_j^2) + N + 2(m+\ell+2) \right\} \end{aligned}$$

データの逐次追加



$$N = N_1 + L + N_2$$

$$AIC_j = AIC_j^1 + AIC_j^2$$

データの逐次追加

2m個のARモデルをL回推定
 $2mL$ ($m=10\sim 20, L=100\sim 500$)



自動処理のための高速化

$$X_{10} = [Z | y] = \begin{bmatrix} y_m & \cdots & y_1 & y_{m+1} \\ y_{m+1} & \cdots & y_2 & y_{m+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{N_1-1} & \cdots & y_{N_1-m} & y_{N_1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad HX_{10} = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & & s_{m+1,m+1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_1^2(j) = \frac{1}{N_1 - m} \sum_{i=j+1}^{m+1} s_{i,m+1}^2$$

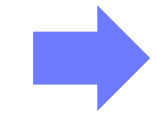
$$\text{AIC}_1(j) = (N_1 - m) \log \hat{\sigma}_1^2(j) + 2(j+1)$$

$$\text{AIC}_1^1 \equiv \min_j \text{AIC}_1(j)$$

計算量は加減, 乗除
それぞれ $N_1 m^2$ 程度

データの逐次追加

$$X_{11} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,m} & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & s_{m,m} & s_{m,m+1} \\ & & & s_{m+1,m+1} \\ \hline y_{N_1} & \cdots & y_{N_1-m+1} & y_{N_1+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{N_1+p-1} & \cdots & y_{N_1-m+p} & y_{N_1+p} \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} H_1 X_{11} = \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1,m} & r_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & r_{m,m} & r_{m,m+1} \\ & & & r_{m+1,m+1} \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$



↑
 p
↓

p は1でもよい

$$\hat{\sigma}_1^2(j) = \frac{1}{N_1 - m + p} \sum_{i=j+1}^{m+1} r_{i,m+1}^2$$

$$AIC_1(j) = (N_1 - m + p) \log \hat{\sigma}_1^2(j) + 2(j+1)$$

$$AIC_1^1 \equiv \min_j AIC_1(j)$$

計算量は加減, 乗除
それぞれ $2m^2$ 程度
($p=1$) の場合

これを繰り返して $AIC_0^1 \Rightarrow AIC_1^1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow AIC_{L/p}^1$

データの逐次追加 (後半のモデル)

$$X_{20} = [Z | y] = \begin{bmatrix} y_{N-1} & \cdots & y_{N-m} & y_N \\ y_{N-2} & \cdots & y_{N-m-1} & y_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{N-N_2} & \cdots & y_{N-N_2-m+1} & y_{N-N_2+1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_{20} X_{20} = \begin{bmatrix} T \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m+1,m+1} \\ O \end{bmatrix}$$

$$X_{21} = \begin{bmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,m} & t_{1,m+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & t_{m,m} & t_{m,m+1} \\ & & & t_{m+1,m+1} \\ y_{N-N_2-1} & \cdots & y_{N-N_2-m} & y_{N-N_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{N-N_2-p} & \cdots & y_{N-N_2-m+p-1} & y_{N-N_2-p+1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_{21} X_{21} = \begin{bmatrix} Z \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1,m} & z_{1,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{m,m} & & z_{m,m+1} \\ z_{m+1,m+1} \\ O \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_2^2(j) = \frac{1}{N_2 - m + p} \sum_{i=j+1}^{m+1} z_{i,m+1}^2$$

$$\text{AIC}_2(j) = (N_2 - m + p) \log \hat{\sigma}_2^2(j) + 2(j+1)$$

$$\text{AIC}_{L/p-1}^2 \equiv \min_j \text{AIC}_2(j)$$

$$\text{AIC}_{L/p}^2 \Rightarrow \text{AIC}_{L/p-1}^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \text{AIC}_1^2$$

- Householder法の単純適用

N 行 m 列の行列の変換 $\sim m^2N$

一つのLSARモデル $\sim m^2(N_1+j)+m^2(N_2+L-j) = m^2N$

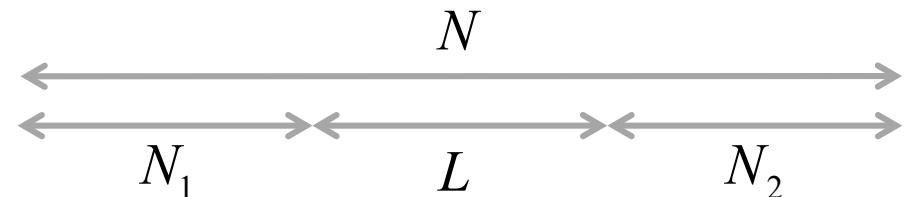
L 個のLSARモデル $\sim m^2NL$

- Householder法による逐次追加

初期モデル $\sim m^2N_1 + m^2N_2$

データ1個の追加 $\sim 2m^2$

合計 $\sim m^2N_1 + m^2N_2 + 2Lm^2 = m^2N + Lm^2$



(例) $N = 1000$, $m = 10$, $L = 100$ のとき

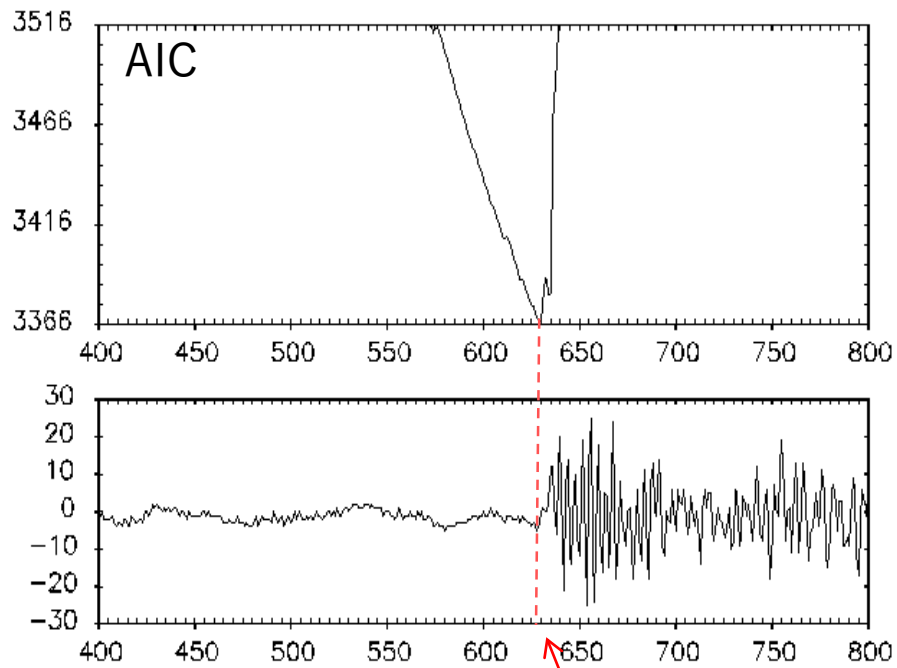
$$m^2NL = 10^7$$

$$m^2N + Lm^2 = 10^5 + 10^4$$

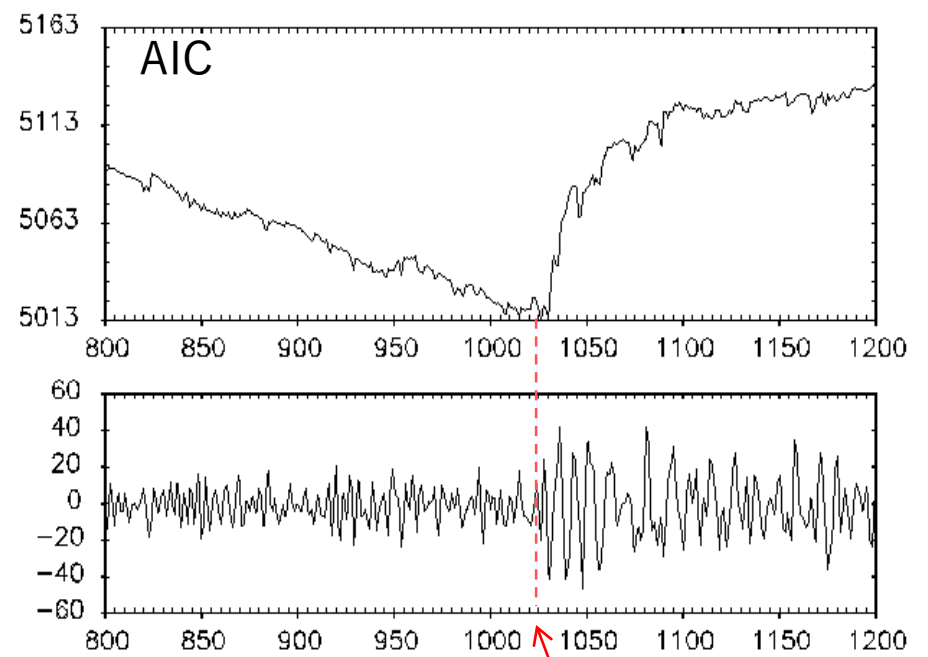
地震波到着時刻の推定

常微動 → P波

P波 → S波

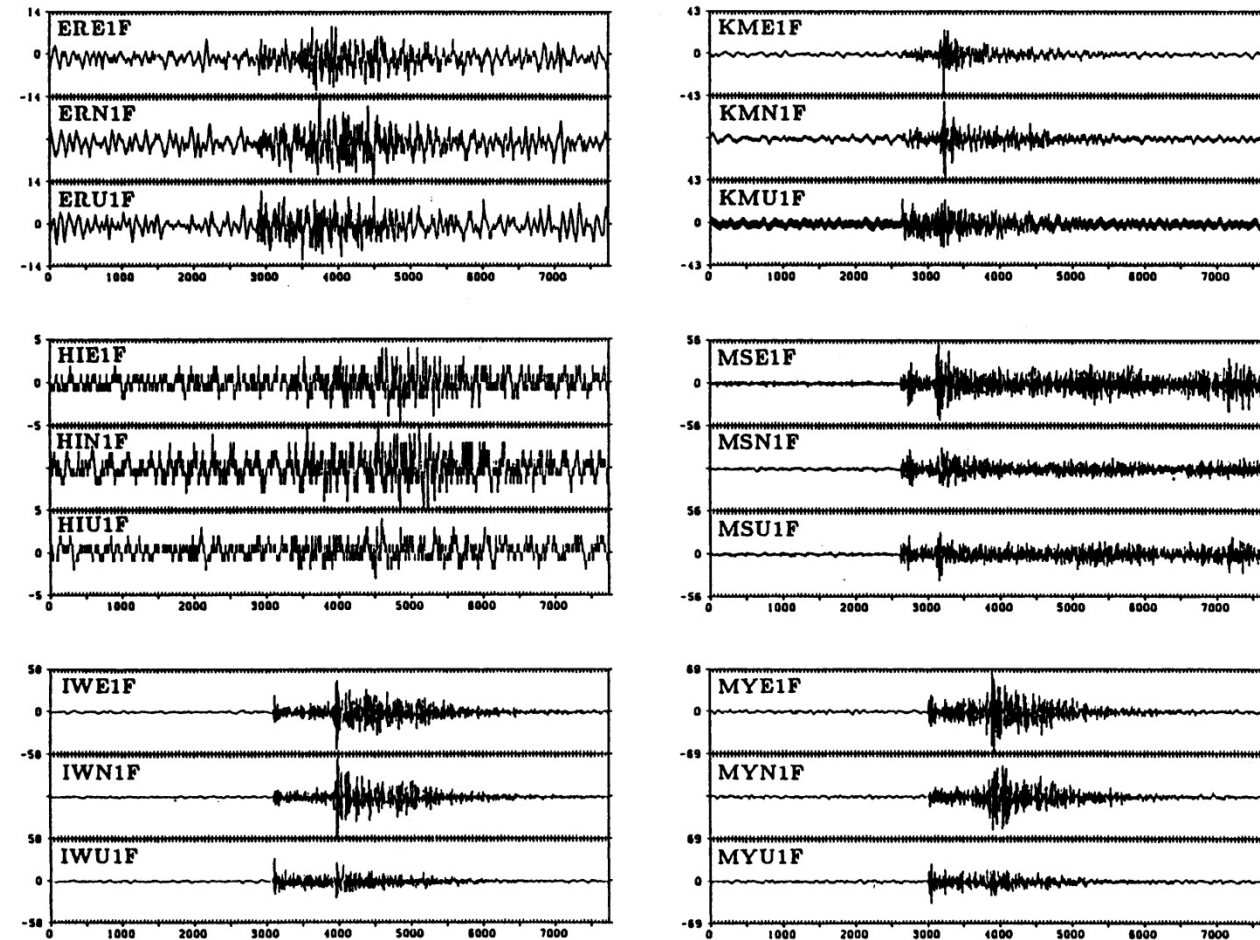


到着時刻



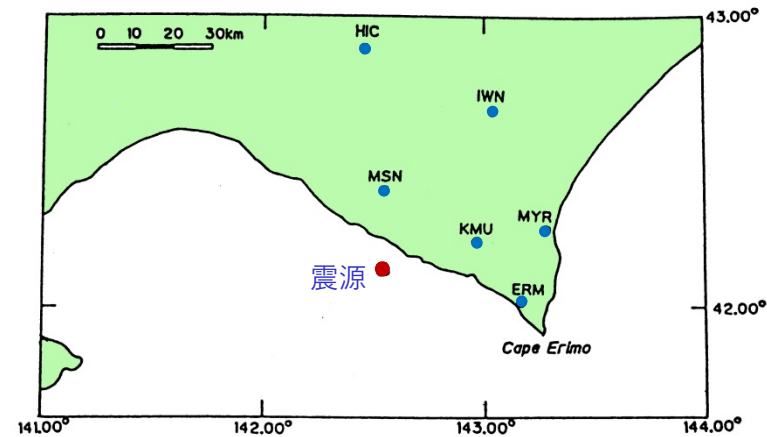
到着時刻

地震3成分データ (えりも付近)



ER えりも
 HI 日高
 IW 岩内
 KM 上杵臼
 MS 御園
 MY 茂寄

E E-W成分
 N N-S成分
 U U-D成分



多変量LSARモデル

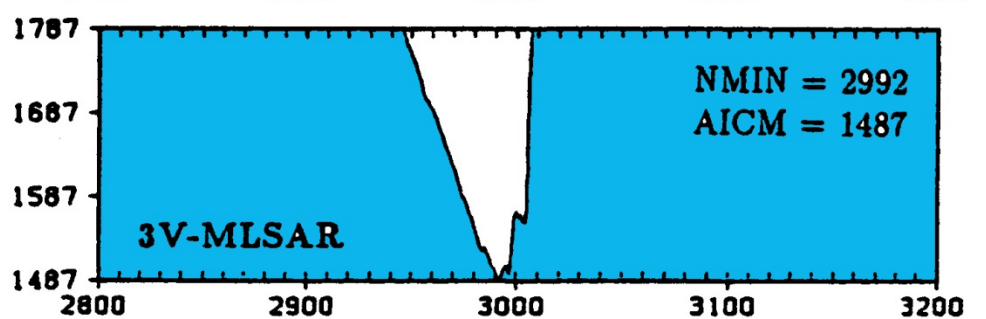
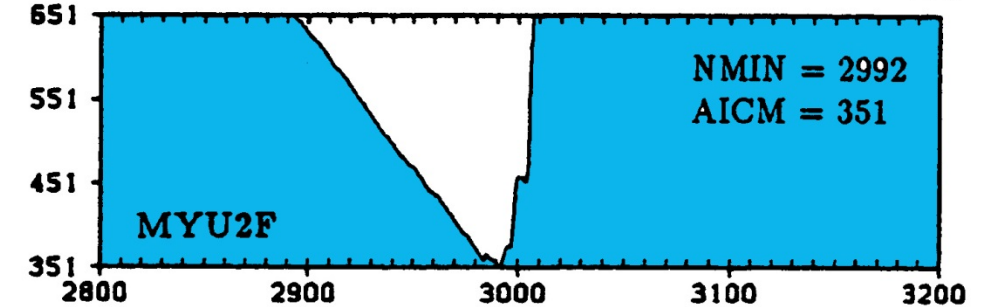
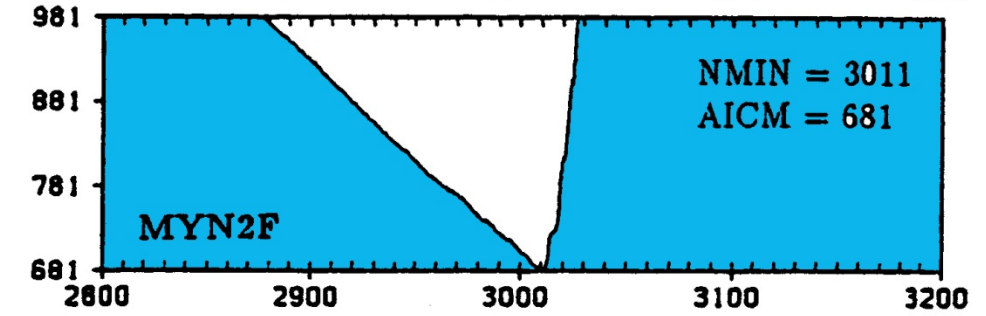
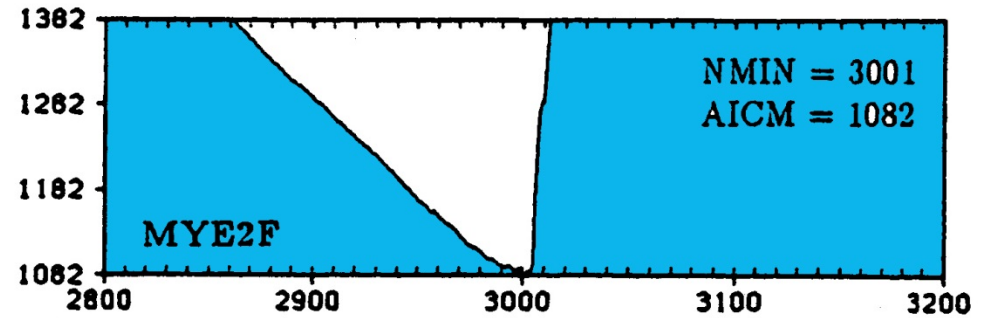
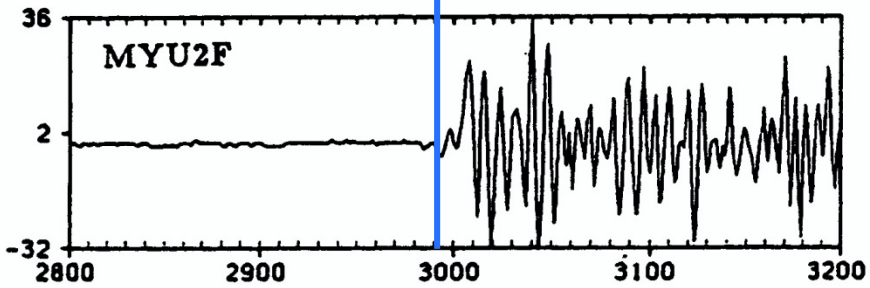
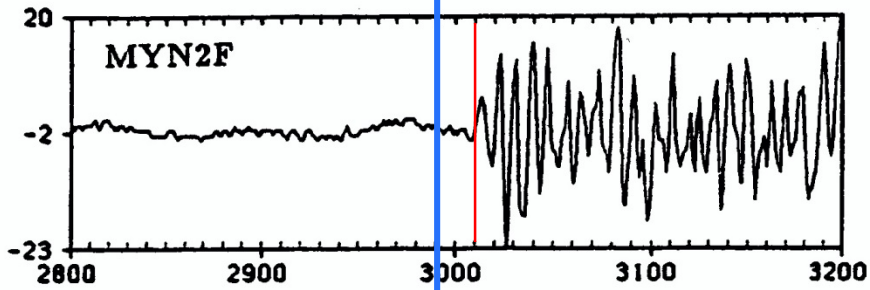
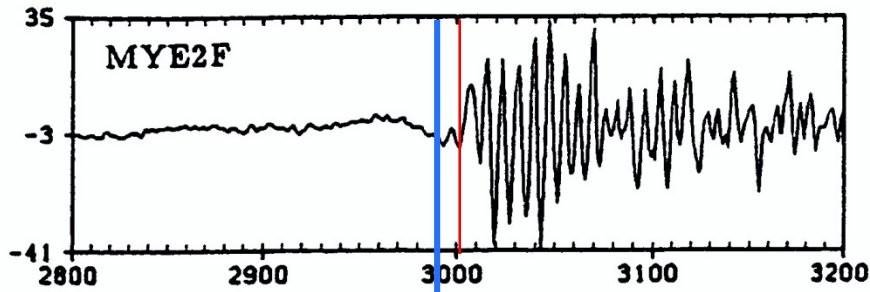
$$y_n = \begin{bmatrix} y_n^{EW} \\ y_n^{EW} \\ y_n^{EW} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{東西成分} \\ \text{南北成分} \\ \text{上下成分} \end{array}$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{m_j} A_{ij} y_{n-i} + v_{nj}, \quad v_{nj} \sim N(0, \Sigma_{1j}) \quad \text{前半のMARモデル}$$

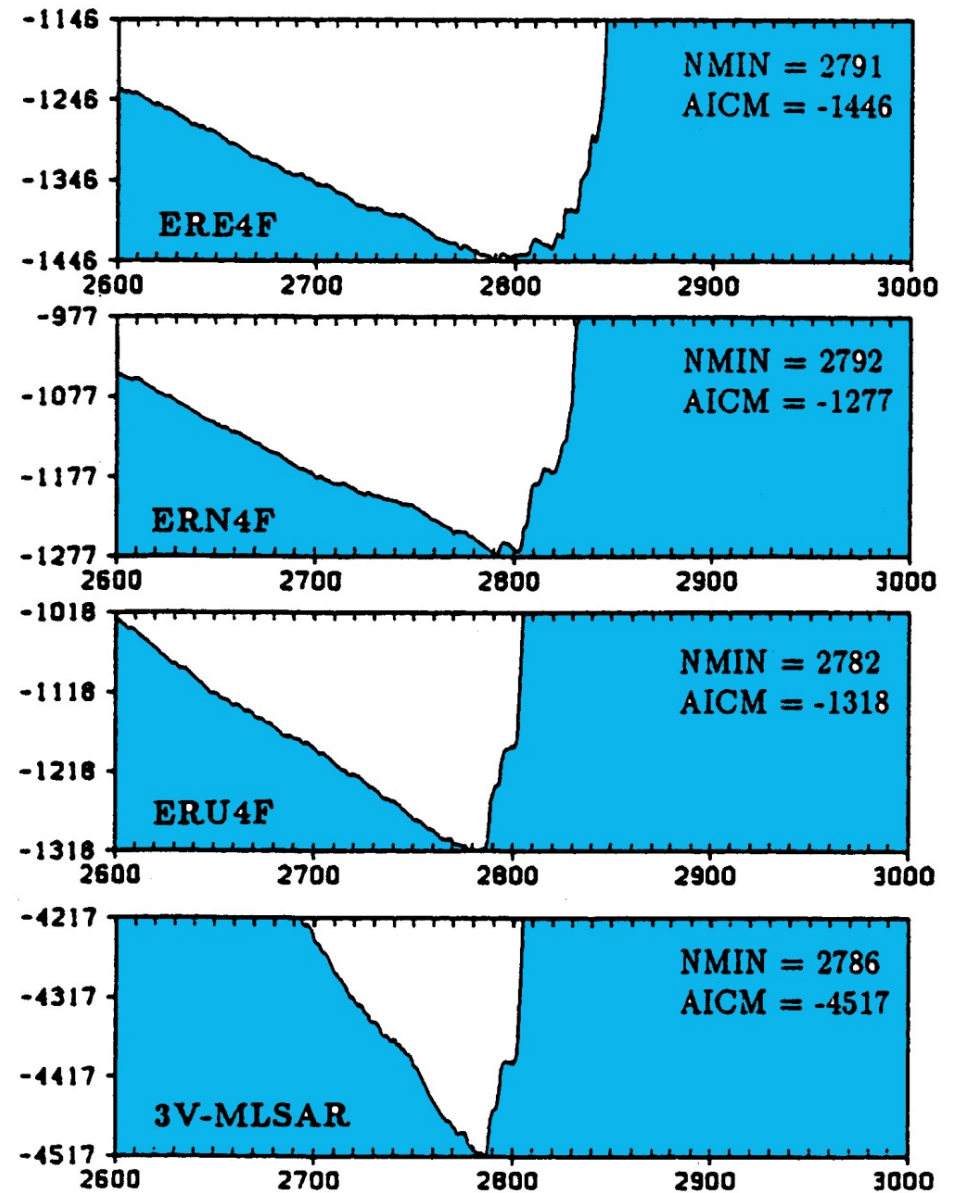
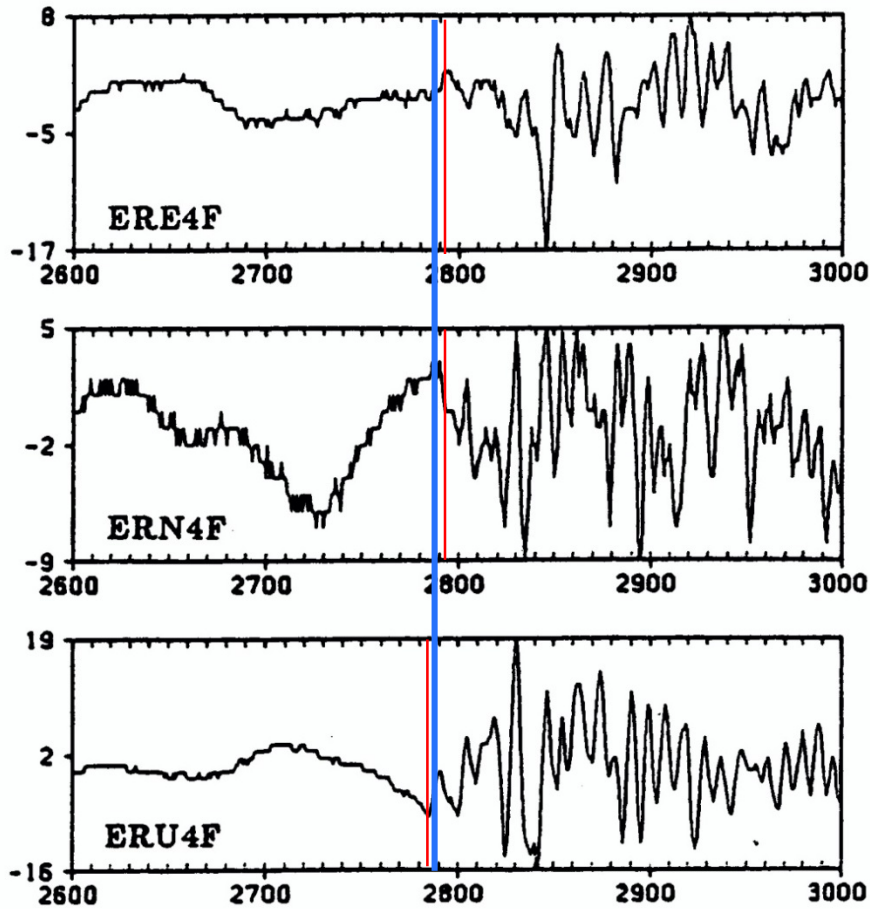
$$y_n = \sum_{i=1}^{\ell_j} B_{ij} y_{n-i} + u_{nj}, \quad u_{nj} \sim N(0, \Sigma_{2j}) \quad \text{後半のMARモデル}$$

$$\begin{aligned} \text{AIC}_j &= \text{AIC}_j^N + \text{AIC}_j^S \\ &= \ell N \log 2\pi + (N - j) \log |\Sigma_{1j}| + j \log |\Sigma_{2j}| \\ &\quad + \sum_{n=1}^j v_{nj}^T \Sigma_{1j}^{-1} v_{nj} + \sum_{n=j+1}^N u_{nj}^T \Sigma_{2j}^{-1} u_{nj} \end{aligned}$$

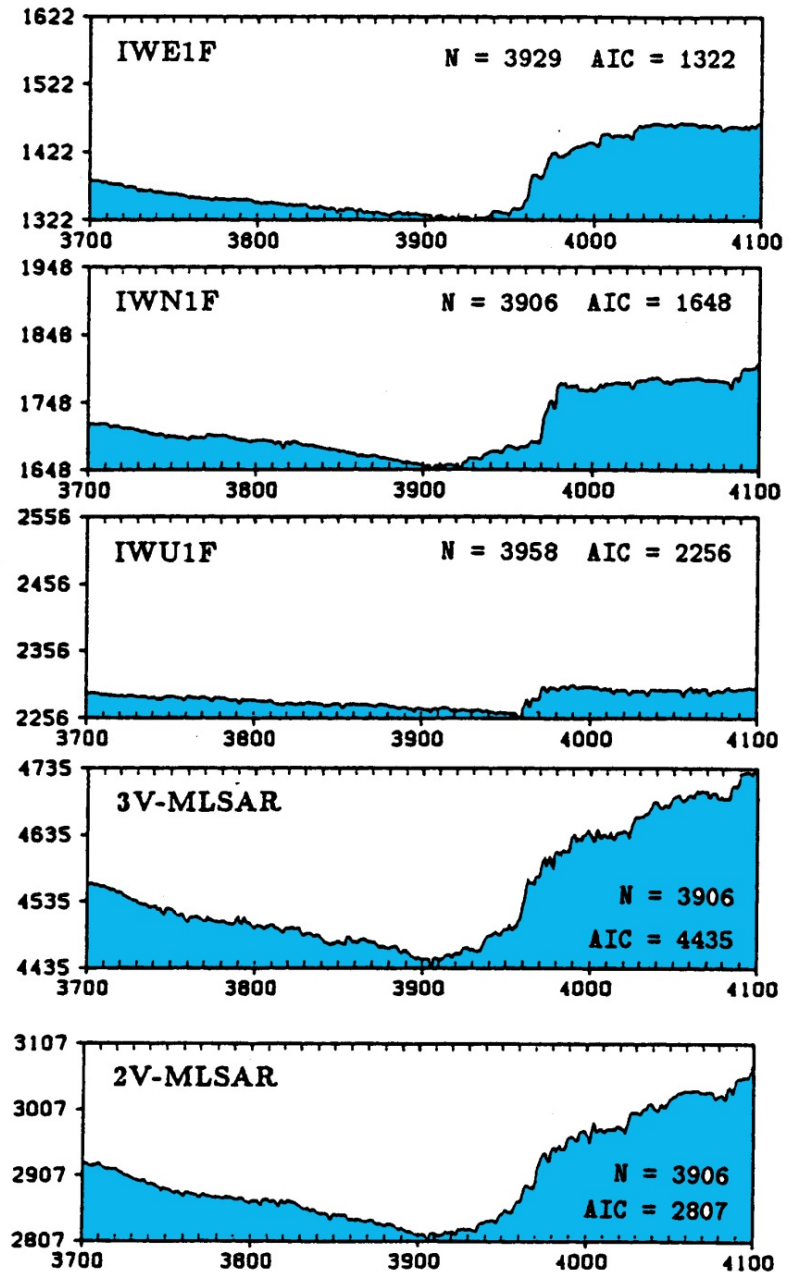
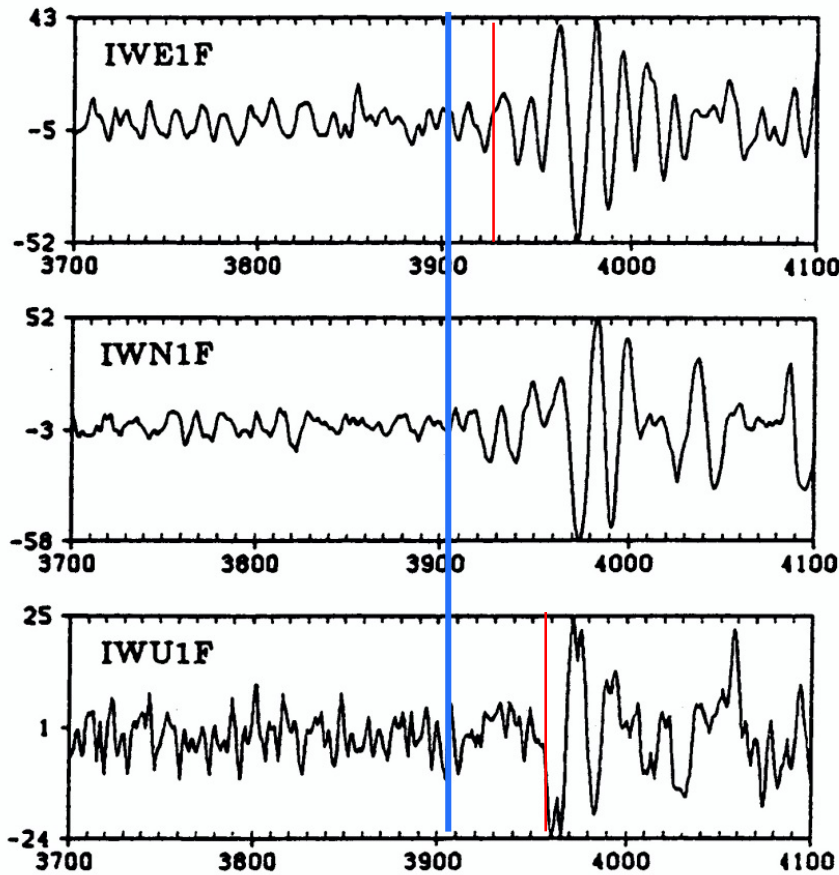
地震3成分データ (茂寄)



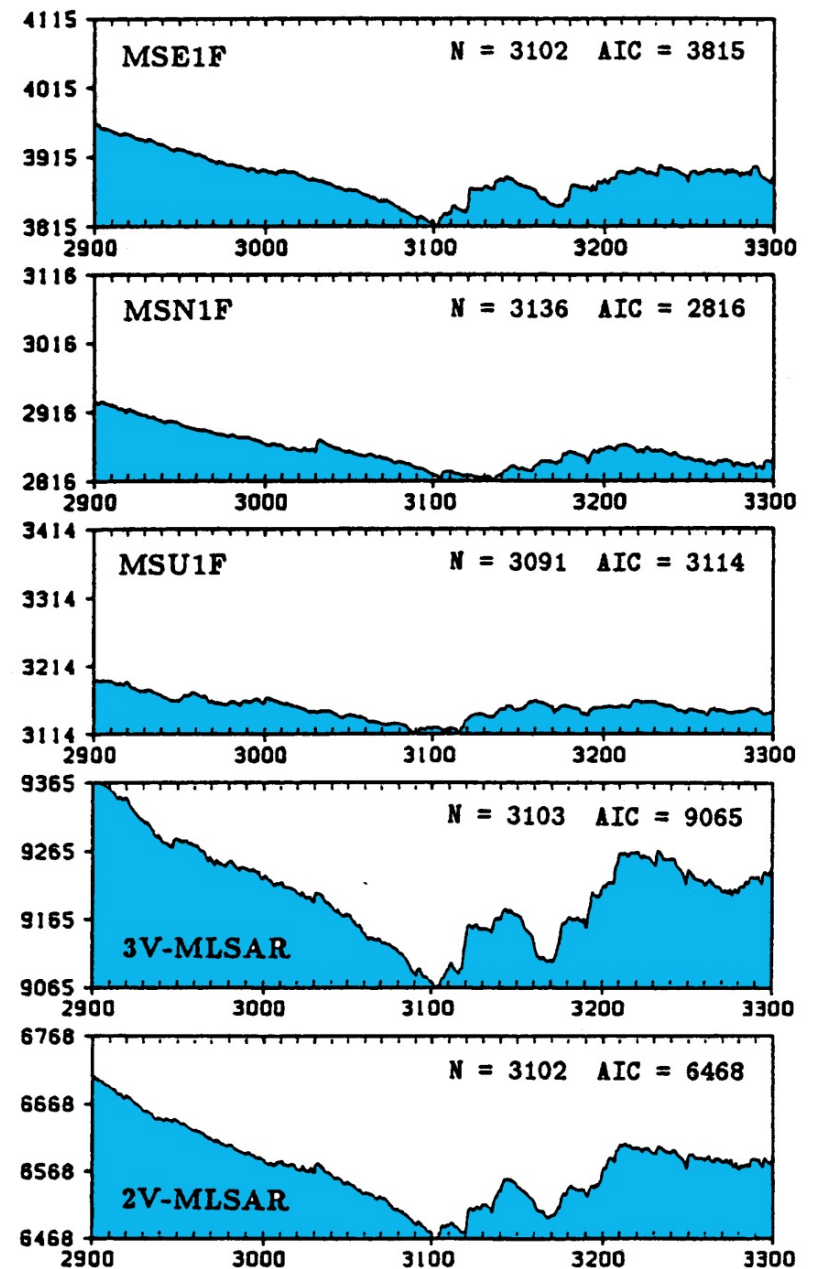
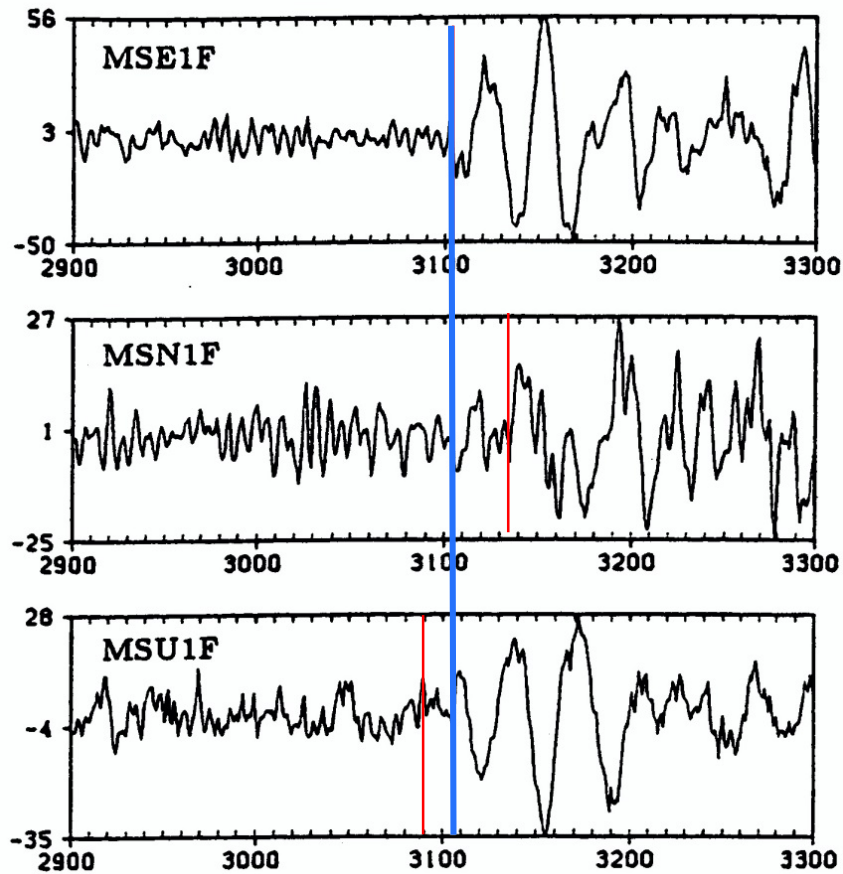
地震 3 成分データ (えりも)



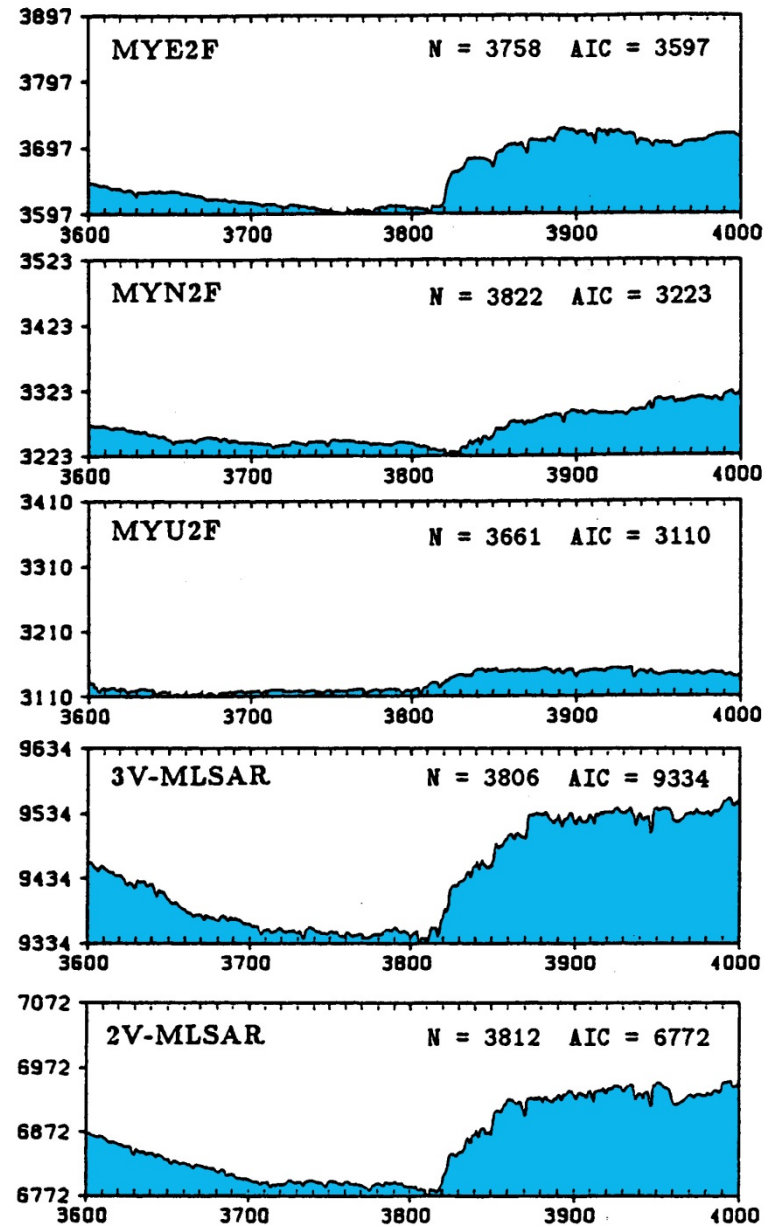
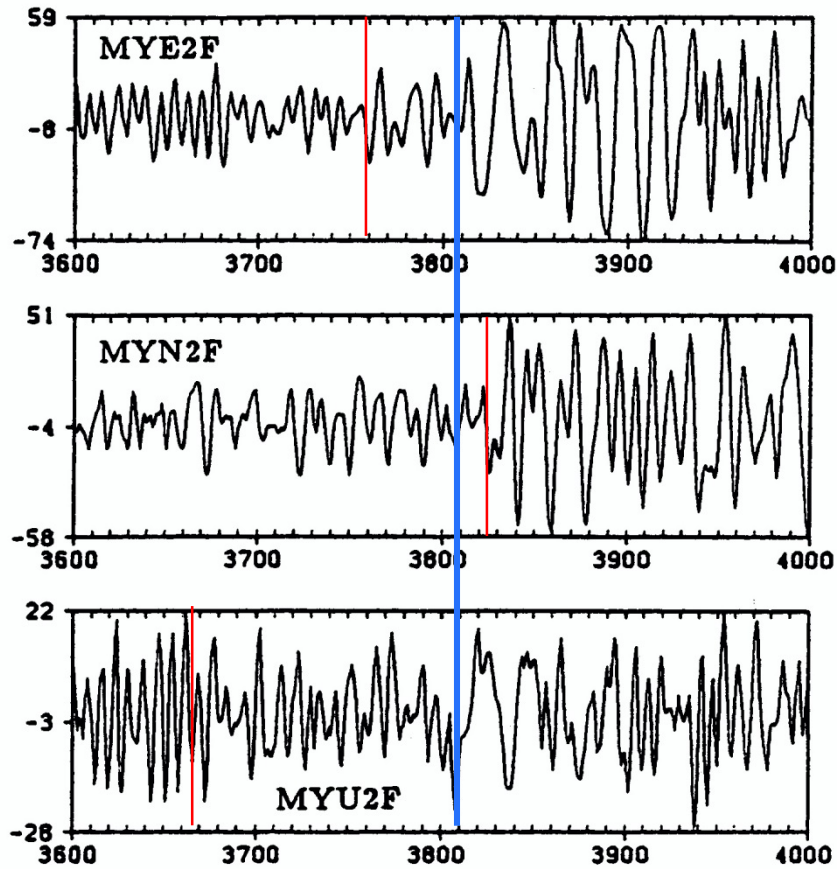
地震3成分データ (岩内)



地震3成分データ (御園)



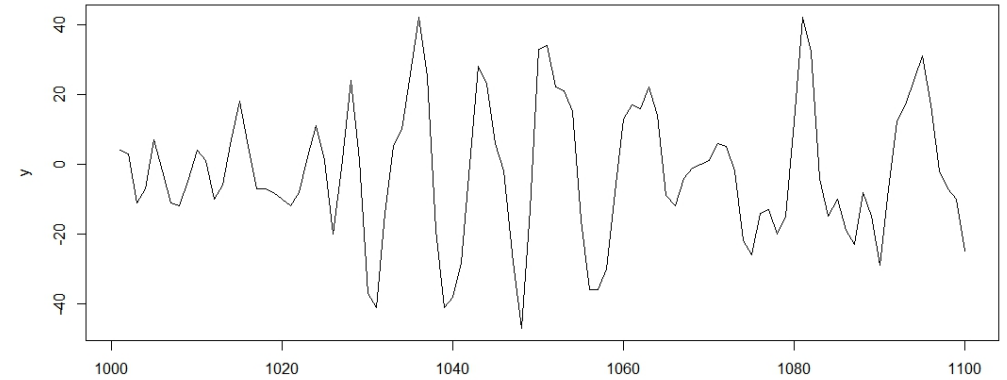
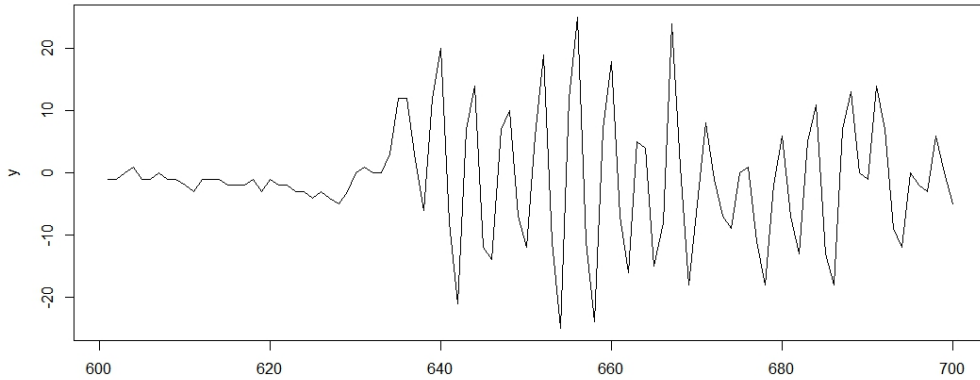
地震3成分データ (茂寄)



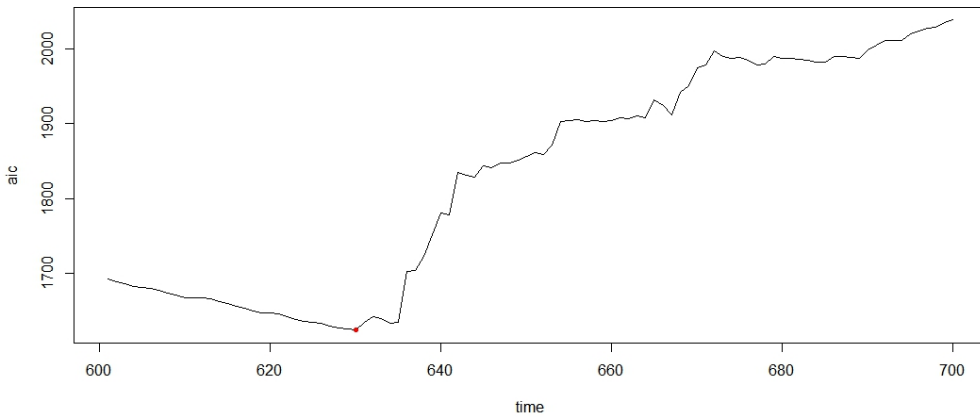
Rによる計算

```
data(MYE1F)  
lsar.chgpt(MYE1F, max.arorder = 10, subinterval =  
c(400,800), candidate = c(600,700))
```

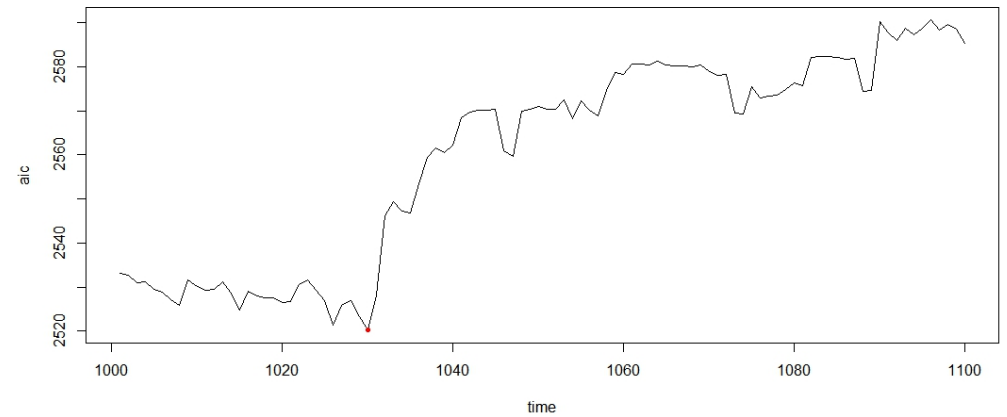
```
data(MYE1F)  
lsar.chgpt(MYE1F, max.arorder = 10, subinterval =  
c(800,1200), candidate = c(1000,1100))
```



AICs of candidate range



AICs of candidate range



緊急地震速報

地震発生

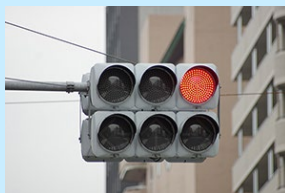
緊急地震速報

産業プラントの
安全確保



交通制御

新幹線，高速道路
信号機制御
航空機離着陸制限



エレベーター緊急停止
緊急通信回線の確保
水門閉鎖



SunGraphicsさん
によるイラストAC
からのイラスト



Meeeさんによる
イラストACから
のイラスト



JR東日本新幹線

東京－新青森間：震災時27本が営業運転中
新白河－二戸間：10本（5本は270キロ走行中）
東北新幹線の被害箇所：約1,200

新幹線早期地震検知システム

東北・上越・長野新幹線の沿線と海岸線に97個の地震計を設置
P波やS波を検知し、変電所から列車への送電を自動的に停止
車両の非常ブレーキを作動させて減速・停止させる

- 14時47分3秒牡鹿半島の地震計：120ガルの加速度を検知。自動的に架線を停電、新幹線は一斉に非常ブレーキをかけて減速，緊急停止
- 仙台駅-古川駅：「はやて27号」「やまびこ61号」が走行中。
非常ブレーキの9秒後，12秒後に初動，1分10秒後に最も強い揺れが起きた。
- 営業運転中の新幹線は1本も脱線・転覆しなかった。

問題点

● 震源推定の誤差

- ✓ 少数の地震波に基づいて推定
- ✓ 一部の到着時刻推定の誤差が大きな影響を及ぼす

● 緊急地震速報の誤動作

- ✓ 主な原因：引き続き発生した2つの小さな地震を同一の地震と見做したこと

◆ 対応

- ✓ 多数の観測点の情報を使う
- ✓ 到着時刻の推定値だけでなく、事後確率を使う

変化点の事後確率

$AIC_j = -2 \times (\text{バイアス補正した対数尤度})$

$p(y|j) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2}AIC_j\right\}$ 最尤法でパラメータ推定した
モデルの尤度

$p(j)$ 変化点の事前確率 (例 ; $p(j) = \frac{1}{L}$)

変化点の事後確率

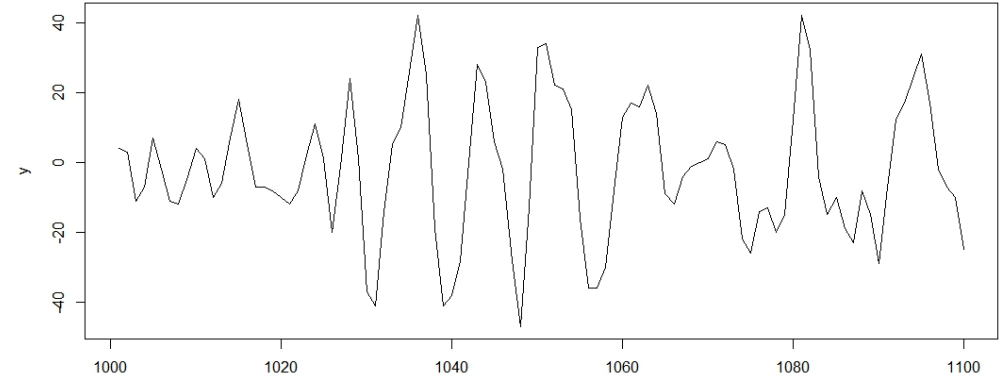
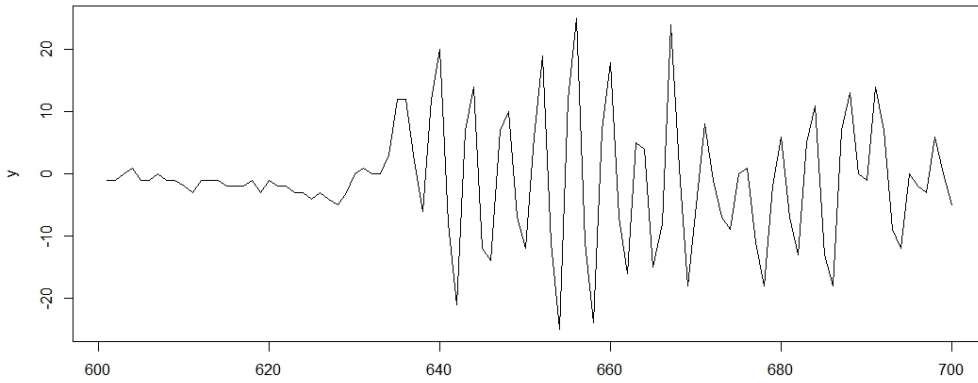
$$p(j|y) = \frac{p(y|j)p(j)}{\sum_{j=1}^L p(y|j)p(j)}$$

```
x <- lsar.chgpt(MYE1F, 10, c(400,800), c(600,700))
AICP <- x$aic
post <- exp( -(AICP-min(AICP))/2 )
post <- post/sum(post)
plot( post, type="l", col="red" )
```

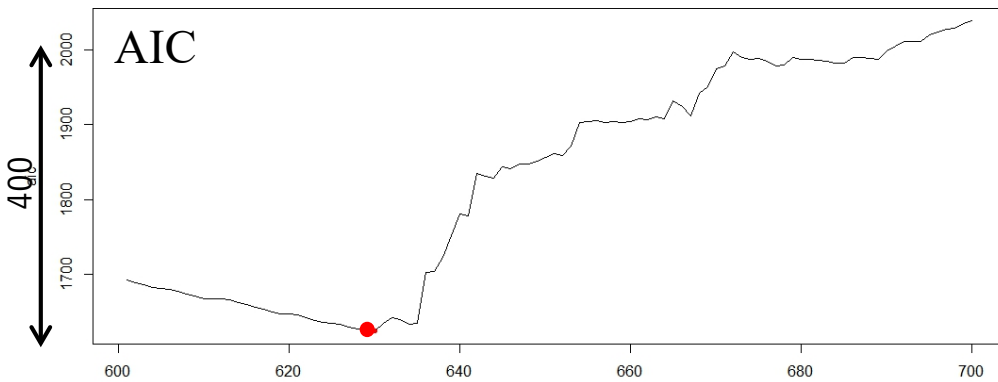
変化点の事後確率

```
x <- lsar.chgpt(MYE1F, 10, c(400,800), c(600,700))
AICP <- x$aic
post <- exp( -(AICP-min(AICP))/2 )
post <- post/sum(post)
plot(post,type="l",col="red",lwd=2)
```

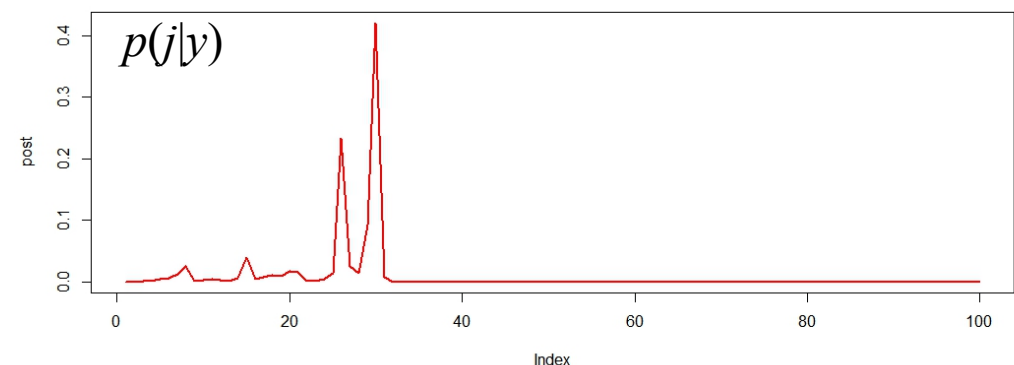
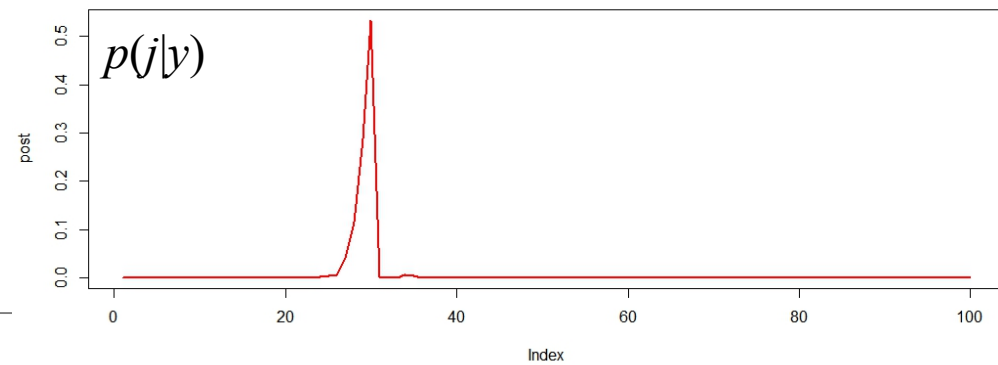
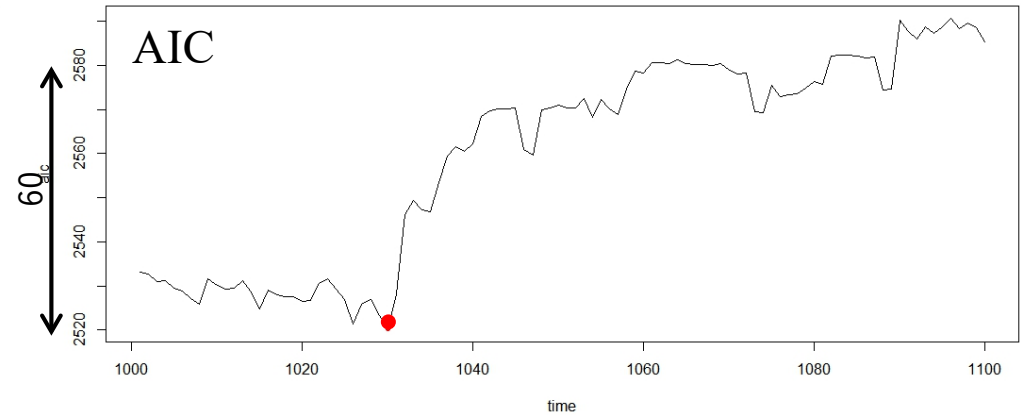
UTokyo Online Education 数理手法VII 2019 北川源四郎 CC BY-NC-ND



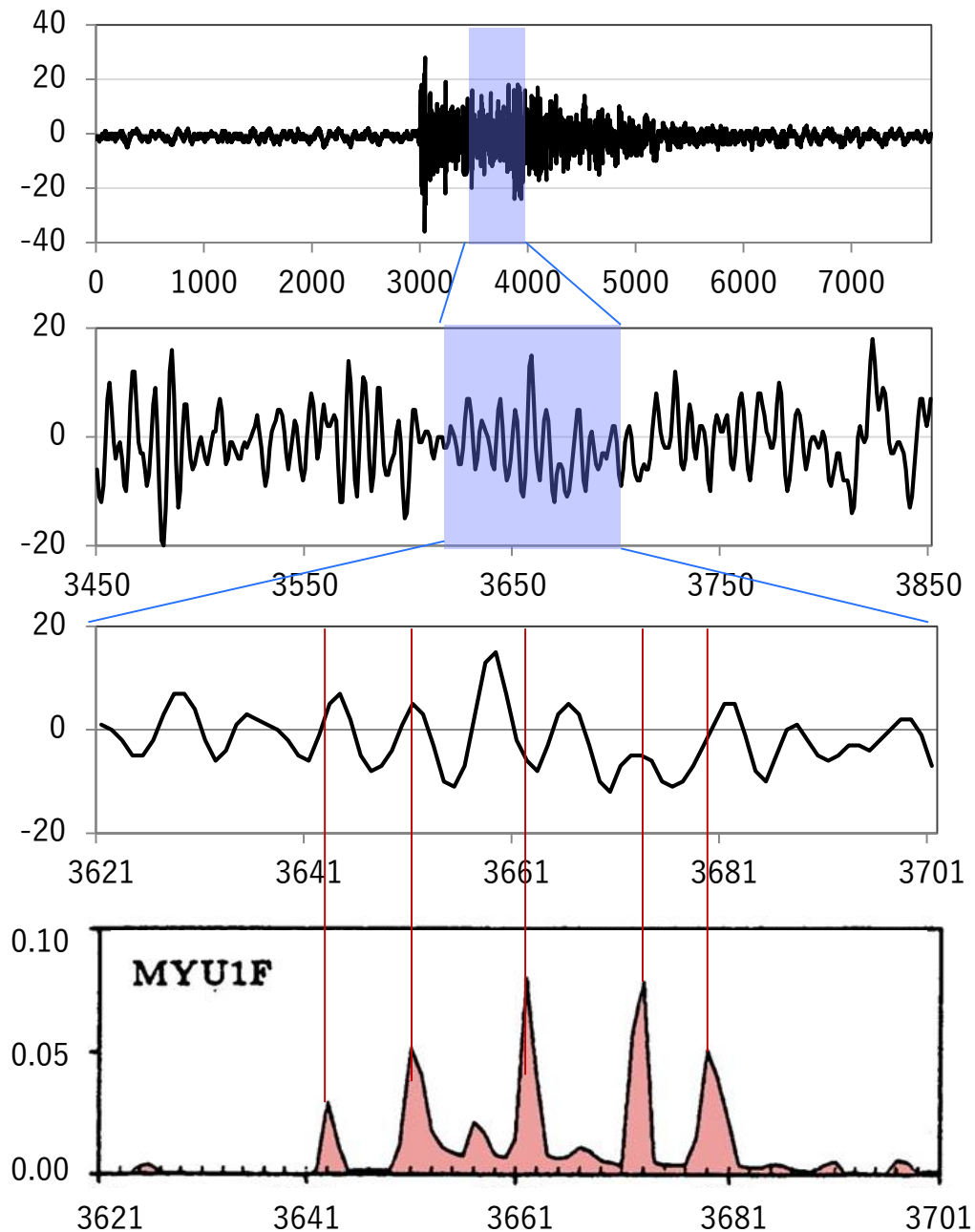
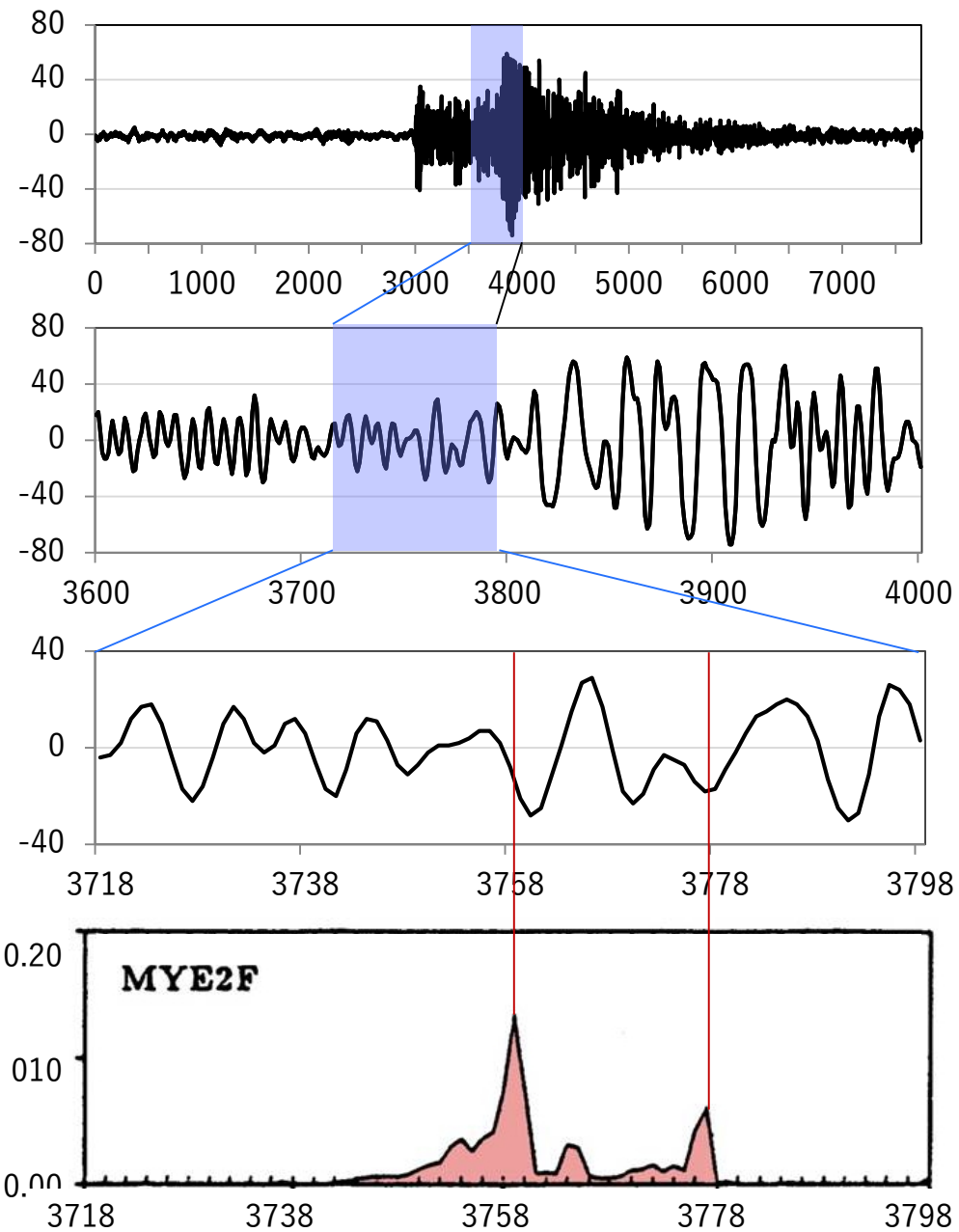
AICs of candidate range



AICs of candidate range



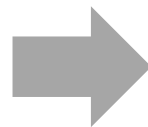
変化点の事後確率



統計的制御

- 最適制御の困難
 - 巨大なシステム
 - 複雑なシステム
 - 外乱の強いシステム

理論モデル



統計的モデル

[成功例]

- 火力発電所
- セメント焼成炉
- 船舶自動操舵



汐路丸 (東京海洋大学より)



Photo by 多摩に暇人, from Wikipedia
Commons ref.20180131
https://ja.wikipedia.org/wiki/JR%E6%9D%B1%E6%97%A5%E6%9C%AC%E5%B7%9D%E5%B4%8E%E7%81%AB%E5%8A%9B%E7%99%BA%E9%9B%BB%E6%89%80#/media/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:JR_East_Kawasaki_thermal_power_plant_20101110.jpg
CC BY-SA 3.0

最適制御

- 状態空間モデル

$$x_n = Fx_{n-1} + Gr_n + w_n$$

$$y_n = Hx_n$$

- 評価関数

$$J = \sum_{n=1}^I \left\{ x_n^T Q x_n + r_n^T R r_n \right\}$$

- 最適制御

$$r_n = Kx_n$$

制御用状態空間モデル

多変量ARモデル

$$z_n = \sum_{j=1}^m A_j z_{n-j} + v_n$$

$$z_n = \begin{bmatrix} y_n \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \text{ 被制御変数} \\ \updownarrow q \text{ 操作変数} \end{array}$$

ARXモデル (X: exogenous)

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^m b_j r_{n-j} + u_n$$

$$A_j = \begin{bmatrix} \overleftarrow{a_j} & \overrightarrow{b_j} \\ * & * \end{bmatrix}, \quad v_n = \begin{bmatrix} u_n \\ * \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$$

制御用状態空間モデル

$$z_n = Fx_{n-1} + Gr_n + w_n$$

$$y_n = Hx_n$$

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & I & & \\ a_2 & & \ddots & \\ \vdots & & & I \\ a_m & & & \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$w_n = \begin{bmatrix} u_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-m+1} \end{bmatrix}$$

最適制御則

$$y_n = K_I x_n$$

$$K_I = -\left\{G^T S_I G + R\right\}^{-1} G^T S_I F$$

ただし, S_m ($m=1, \dots, I$)は以下により求める

1. $P_0 = [0]$

2. $m=1, 2, \dots, I$ について(1), (2)を繰り返す

(1) $S_m = Q + P_{m-1}$

(2) $P_m = F^T \left[S_m - S_m G \left\{ G^T S_m G + R \right\}^{-1} G^T S_m \right] F$

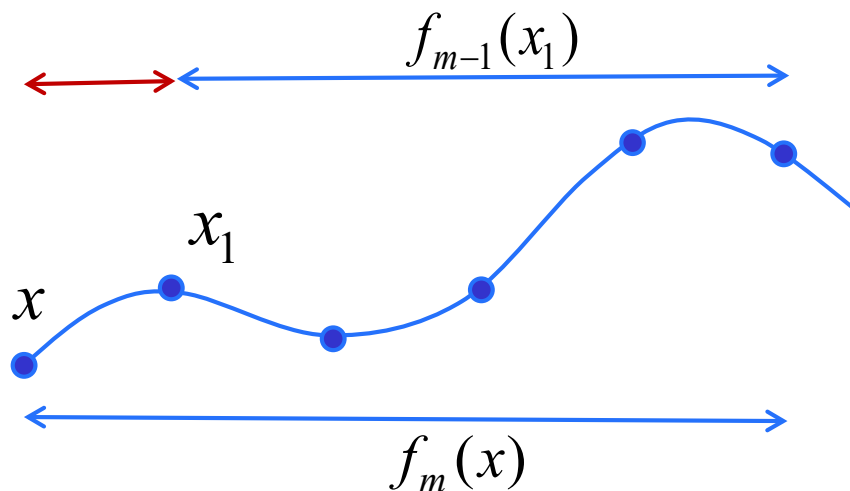
最適制御則の導出

$f_m(x)$ を以下のように定義する

$$f_m(x) = \min_r J_m(z, r) = \min_{\substack{r_0, \dots, r_{m-1} \\ x_0 = x}} E \left[\sum_{n=1}^m \left\{ x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} \right\} \right]$$

最適性の原理より

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \min_{\substack{y_0 \\ x_0 = x}} \left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 + \min_{r_0, \dots, r_{m-1}} E \left[\sum_{n=2}^m \left\{ x_n^T Q x_n + r_{n-1}^T R r_{n-1} \right\} \right] \right] \\ &= \min_{\substack{y_0 \\ x_0 = x}} \left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 + f_{m-1}(x_1) \right] \end{aligned}$$



最適制御則の導出 (数学的帰納法)

(i) $m=1$ のとき $f_1(x) = \min_{\substack{r_0 \\ x_0=x}} E \left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 \right]$

$$r_0(x) = -(G^T S_1 G + R)^{-1} G^T S_1 F x \quad (S_1 = Q)$$

$$f_1(x) = x^T P_1 x + \text{定数}$$

(ii) $m=k-1$ のとき定理は成り立つと仮定

$$f_{k-1}(x) = x^T P_{k-1} x + \text{定数}$$

このとき

$$f_k(x) = \min_{\substack{r_0 \\ x_0=x}} E \left[x_1^T Q x_1 + r_0^T R r_0 + x_1^T P_{k-1} x_1 \right] + \text{定数}$$

$$= \min_{\substack{r_0 \\ x_0=x}} E \left[x_1^T (Q + P_{k-1}) x_1 + r_0^T R r_0 \right] + \text{定数}$$

$$r_0 = - \left(G^T S_k G + R \right)^{-1} G^T S_k F x_1 \quad (S_k = Q + P_{k-1})$$

$$P_k = F^T \left\{ S_k - S_k G \left(G^T S_k G + R \right)^{-1} G^T S_k \right\} F$$

$$f_k(x) = x^T P_k x$$

$z = Fx + Gr + v$ について, 評価関数

$J(x, r) = E[x^T Q x + r^T R r]$ を最小とする制御入力 r^* およびその時の評価関数値は

$$r^*(x) = -(G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x$$

$$f_1(x) = \min_r J(x, r) = J(x, r^*) = x^T P x + \text{定数}$$

ただし

$$P = F^T \left\{ Q - Q G (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q \right\} F$$

$$\begin{aligned} J(x, r) &= E[(Fx + Gr + v)^T Q (Fx + Gr + v) + r^T R r] \\ &= (Fx + Gr)^T Q (Fx + Gr) + r^T R r + E[v^T Q v] \\ &= r^T (G^T Q G + R) r + x^T F^T Q G r + r^T G^T Q F x \\ &\quad + x^T F^T Q F x + \text{定数} \\ &= \left\{ r + (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x \right\}^T (G^T Q G + R) \\ &\quad \times \left\{ r + (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x \right\} + x^T F Q F x \\ &\quad - x F^T Q G (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x + \text{定数} \end{aligned}$$

ここで, 第1項は非負, 第2項は r と無関係

$$r^* = -(G^T Q G)^{-1} G^T Q F x$$

のとき上式は最小となり, このとき

$$f(r^*) = x^T F^T Q F x$$

$$- x^T F^T Q G (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q F x + \text{定数}$$

ARオートパイロット制御結果

著作権の都合により
ここに挿入されていた画像を削除しました

“Time Series modeling for Analysis and Control, Advanced Autopilot and Monitoring Systems”
Kohei Ohtsu, Hui Peng, Genshiro Kitagawa
Springer Briefs in Statistics,
2015, Chapter 3 Fig3.7 p 67, Springer

<https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-4-431-55303-8>

No.	Q	R	Pitch	Roll	Yaw	Yacc	Rudder	Diff.
1	(2,7,35,1)	0.850	1.726	4.575	1.709	0.0063	18.72	4.546
2	(3.6,7,40,1.67)	1.015	1.444	4.915	1.674	0.0062	19.12	5.052
3	(0,6.33,57.8,0)	0.860	2.242	4.473	1.672	0.0068	18.66	4.931
4	Manual		2.771	6.557	7.781	0.0081	17.62	0.832

NADCON (Noise Adaptive Controller)

船のモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^m A_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^m B_j r_{n-j} + u_n$$

外乱のモデル

$$u_n = \sum_{i=1}^k C_i u_{n-i} + \varepsilon_n$$

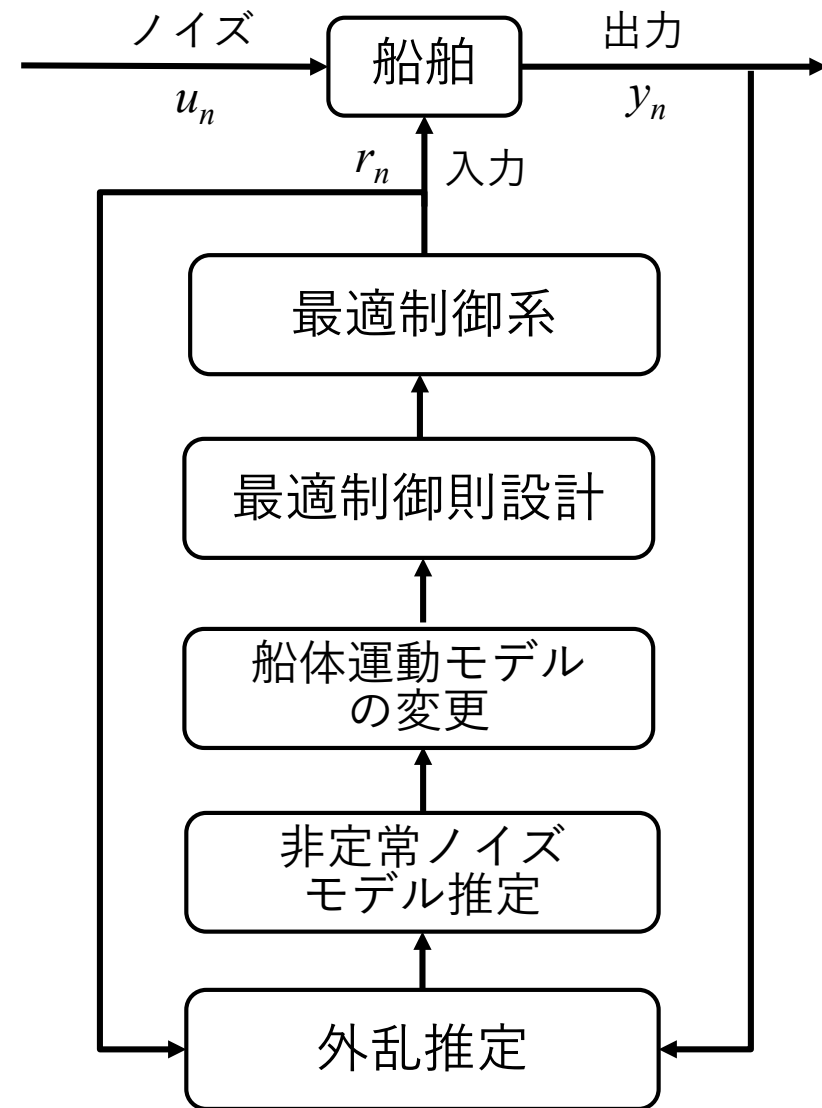
統合モデル (船 + 外乱)

$$y_n = \sum_{j=1}^{m+k} A'_j y_{n-j} + \sum_{j=1}^{m+k} B'_j r_{n-j} + \varepsilon_n$$

$$A'_j = A_j + C_j - \sum_{i=1}^j C_i A_{j-i}, \quad A_j = O \quad j > m$$

$$B_j = O \quad j > m$$

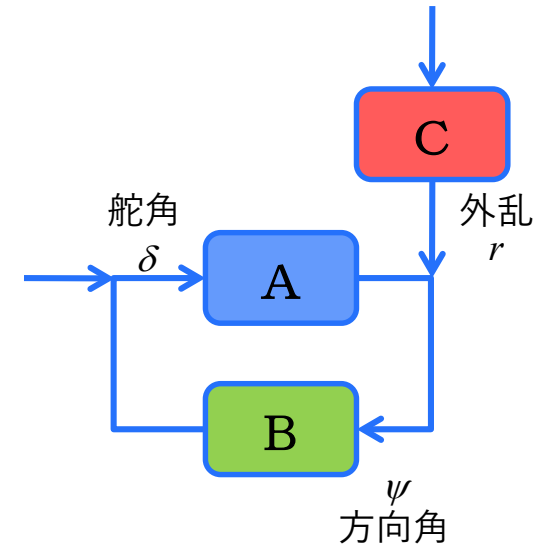
$$B'_j = B_j + C_j - \sum_{i=1}^j C_i B_{j-i} \quad C_j = O \quad j > k$$



NADCONと適応型オートパイロット

北川・赤池・大津 (1980)

- 船体運動モデル + 外乱モデル
- 外乱モデルに局所定常ARモデルを用いて非定常モデル化
- 外乱の変化に適応する適応制御システムを提案 (Noise Adaptive Controller; NADCON)



- 横河電子機器が大型船舶用主力システムPT500Aに採用 (2008年)
- 次世代オートパイロットPT900シリーズにBNAACを標準装備

BNAAC : Batch Noise Adaptive Autopilot Controller
<https://www.yokogawadenshikiki.co.jp/jp-ydk/mr/marine/pilot/ydkmr-ma-bnaac-ja.htm>

PT500 オートパイロット

直進中も連続的に船体運動特性を同定
BNAACが省エネ性を実現します

■ PT500Aにプリント基板をアドオン
新製品

制御型自己回帰モデルで省エネモード

BNAACの頭脳
新プリント基板

PT500A アダプティブ制御

YOKOGAWA ◆

横河電子機器株式会社
Yokogawa Denshikiki Co., Ltd.

統計数理研究所 北川源四郎所長
 東京海洋大学 大津皓平名誉教授 指導
 (C) Copyright 2009 Yokogawa Denshikiki Co., Ltd.