クレジット:
UTokyo Online Education 数理手法Ⅶ 2019 北川源四郎

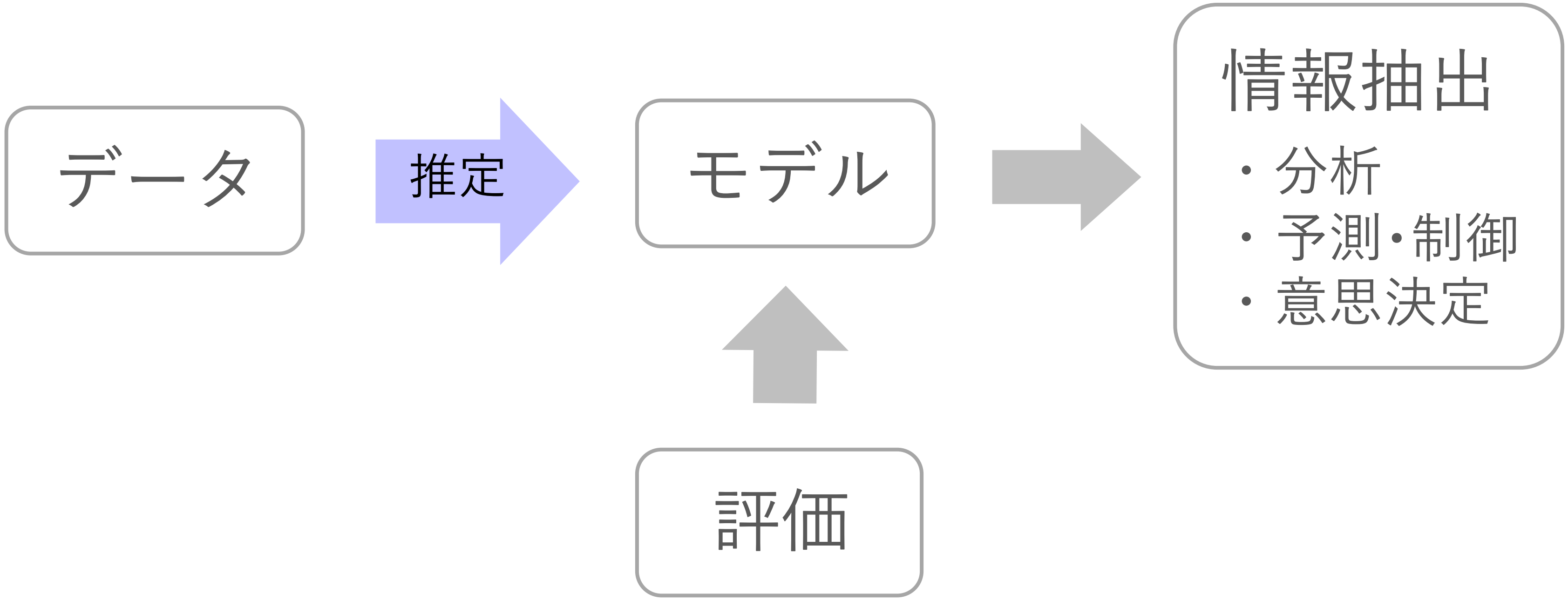
時系列解析（6）
－ ARモデルの推定 －

東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

概　要

1．ARモデルによる予測
2．1変量ARモデルの推定
（1）Yule-Walker法
（2）最尤法
（3）最小二乗法（Householder法）
（4）PARCOR法
（5）数値例
3．多変量ARモデルの推定
（1）Levinson-Durvin法
（2）Householder法
（3）変数選択例
4．関連する話題
（1）最終予測誤差FPE
（2）統計的最適制御

時系列のモデリング



自己回帰モデル（AR Model）

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j} + v_n$$

y_n　定常時系列

v_n　正規白色雑音　$v_n \sim N(0, \sigma^2)$

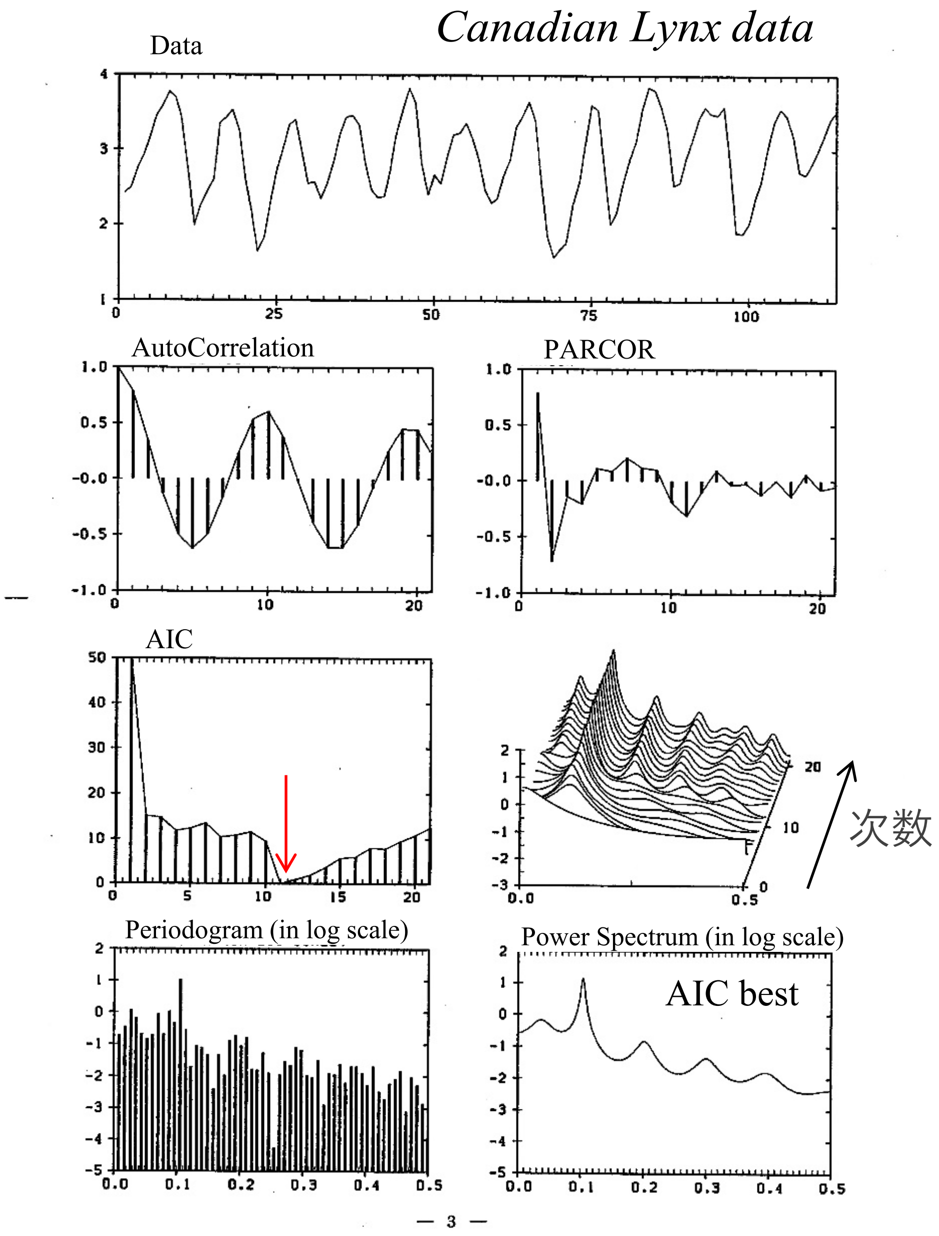
m　自己回帰の次数　$E[v_n v_k] = 0 \quad n \neq k$

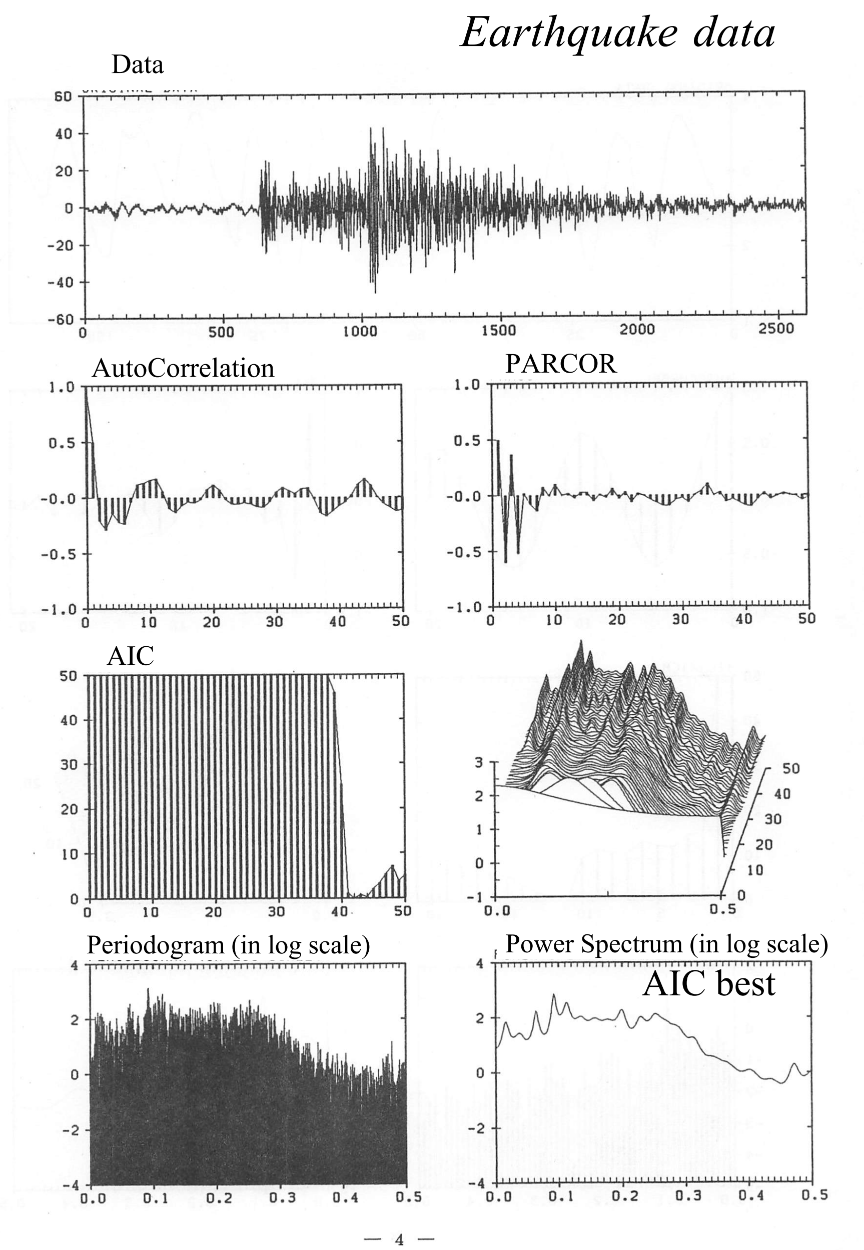
a_j　自己回帰係数　$E[v_n y_{n-j}] = 0 \quad j > 0$

ARスペクトル

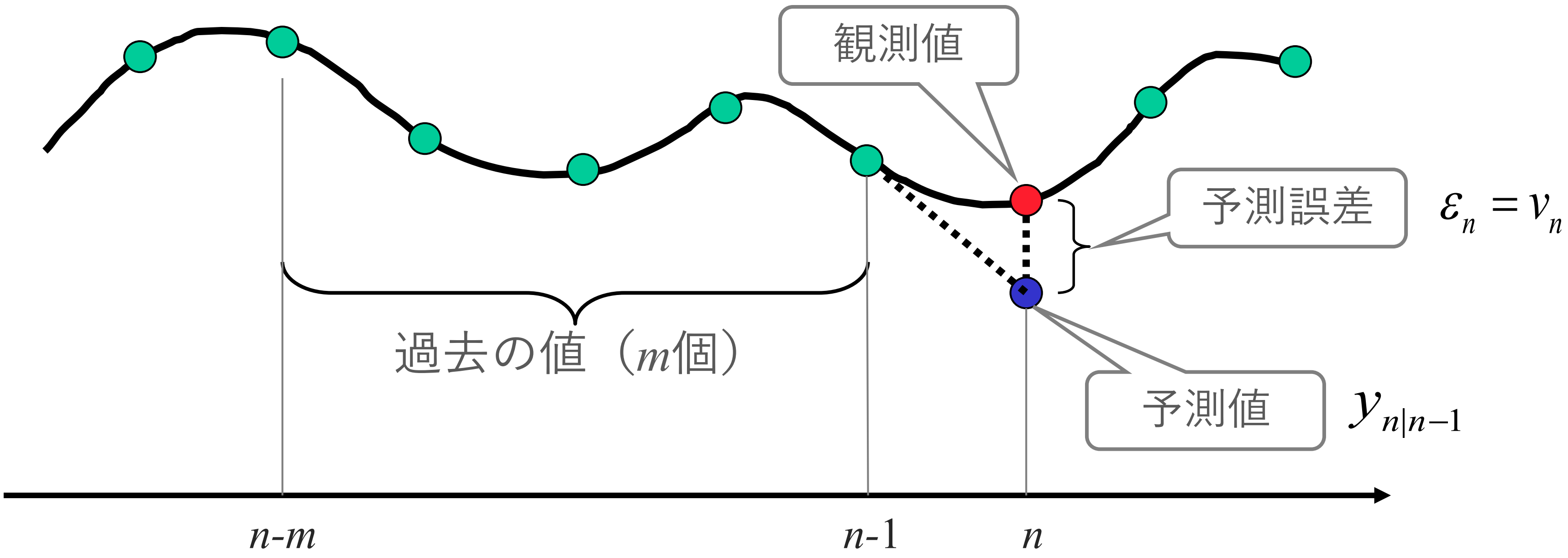
$$p(f) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{j=1}^{m} a_j e^{-2\pi ijf}\right|^2}, \qquad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

次数によって結果は変わる（スペクトル）





ARモデルと予測



$$y_n = a_1 y_{n-1} + \cdots + a_m y_{n-m} + v_n$$

ARモデルによる予測

ARモデル

$$y_{n+1} = \underbrace{a_1 y_n + \cdots + a_m y_{n-m+1}}_{\text{現在までのデータで決まる部分}} + \underbrace{v_{n+1}}_{\text{ノイズ}}$$

1期先予測

$$y_{n+1|n} \equiv a_1 y_n + \cdots + a_m y_{n-m+1}$$

$y_{n+1|n}$: 時刻 n までの情報に基づく y_{n+1} の予測値

一期先予測誤差

$$\varepsilon_{n+1} = y_{n+1} - y_{n+1|n} = v_{n+1}$$

一期先予測誤差の性質

平均 $E[\varepsilon_{n+1}] = E[v_{n+1}] = 0$

分散 $E[\varepsilon_{n+1}^2] = E[v_{n+1}^2] = \sigma^2$

ARモデルによる長期予測

$$y_{n+2} = a_1 y_{n+1} + a_2 y_n + \cdots + a_m y_{n-m+2} + v_{n+2}$$

$$y_{n+2|n} = a_1 y_{n+1|n} + a_2 \underbrace{y_{n|n}}_{\Downarrow \; y_n} + \cdots + a_m \underbrace{y_{n-m+2|n}}_{\Downarrow \; y_{n+2-m}} + \underbrace{v_{n+2|n}}_{\Downarrow \; 0}$$

$$y_{n+1|n} = a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \cdots + a_m y_{n-m+1}$$

$$y_{n+2|n} = a_1 y_{n+1|n} + a_2 y_n + \cdots + a_m y_{n-m+2}$$

$$y_{n+3|n} = a_1 y_{n+2|n} + a_2 y_{n+1|n} + \cdots + a_m y_{n-m+3}$$

$$\vdots$$

長期予測の誤差

$$\varepsilon_{n+1} = y_{n+1} - y_{n+1|n} = v_{n+1}$$

$$y_{n+2} = \underline{a_1 y_{n+1}} + a_2 y_n + \cdots + a_m y_{n-m+2} + \underline{v_{n+2}}$$

$$y_{n+2|n} = \underline{a_1 y_{n+1|n}} + a_2 y_n + \cdots + a_m y_{n-m+2}$$

$$\varepsilon_{n+2} = y_{n+2} - y_{n+2|n}$$

$$= a_1 (y_{n+1} - y_{n+1|n}) + v_{n+2} = a_1 \varepsilon_{n+1} + v_{n+2}$$

$$E[\varepsilon_{n+2}] = a_1 E[\varepsilon_{n+1}] + E[v_{n+2}] = 0$$

$$E[\varepsilon_{n+2}^2] = a_1^2 E[\varepsilon_{n+1}^2] + 2a_1 E[\varepsilon_{n+1} v_{n+2}] + E[v_{n+2}^2] = (1 + a_1^2)\sigma^2$$

$$E[\varepsilon_{n+3}^2] = \left\{1 + a_1^2 + (a_1^2 + a_2)^2\right\}\sigma^2$$

長期予測の誤差の性質

$$y_n = \sum_{j=0}^{\infty} g_j v_{n-j}, \qquad y_{n+k} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j v_{n+k-j}$$

一般論は状態空間モデルで

$$v_{n+k|n} = \begin{cases} v_{n+k} & k \le 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$$

$$y_{n+k|n} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j v_{n+k-j|n} = \sum_{j=k}^{\infty} g_j v_{n+k-j}$$

$$\varepsilon_{n+k} = y_{n+k} - y_{n+k|n} = \sum_{j=0}^{\infty} g_j v_{n+k-j} - \sum_{j=k}^{\infty} g_j v_{n+k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} g_j v_{n+k-j}$$

$$E[\varepsilon_{n+k}] = \sum_{j=0}^{k-1} g_j E[v_{n+k-j}] = 0$$

$$E[\varepsilon_{n+k}^2] = \sum_{j=0}^{k-1} g_j^2 E[v_{n+k-j}^2] = \sigma^2 \sum_{j=0}^{k-1} g_j^2$$

（例）

$$g_0 = 1$$

$$g_1 = a_1$$

$$g_2 = a_1^2 + a_2$$

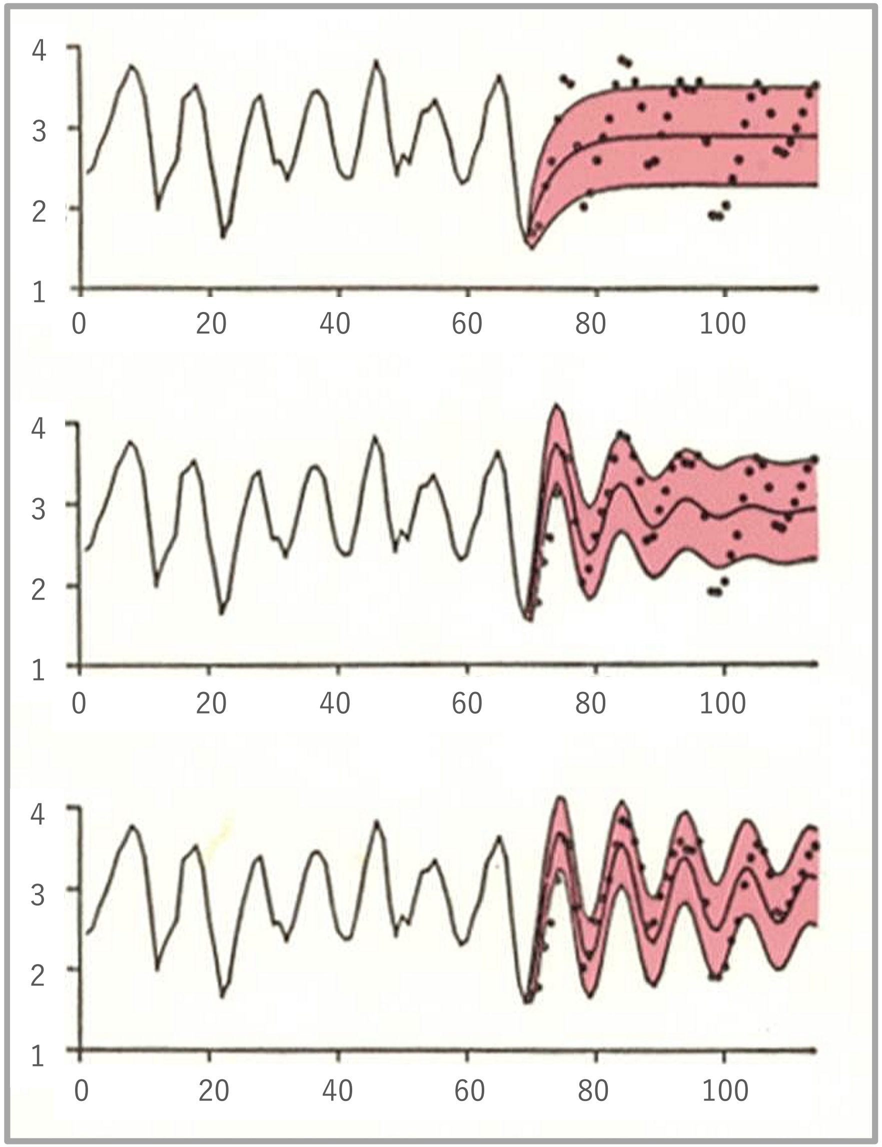
次数によって結果は変わる（予測）

長期予測

Canadian Lynx data

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j} + v_n$$

いずれも最適予測分布
（平均、分散）

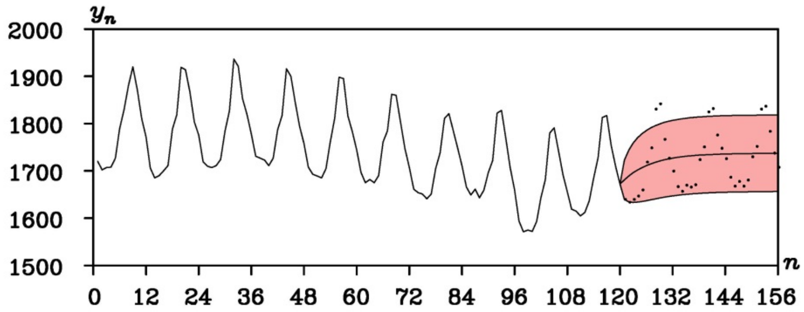


$m=1$

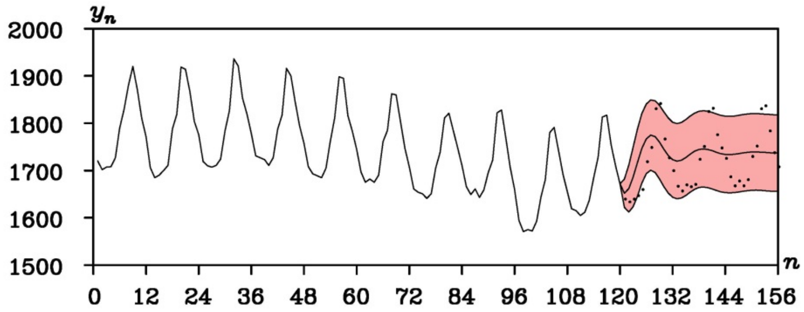
$m=5$

$m=10$

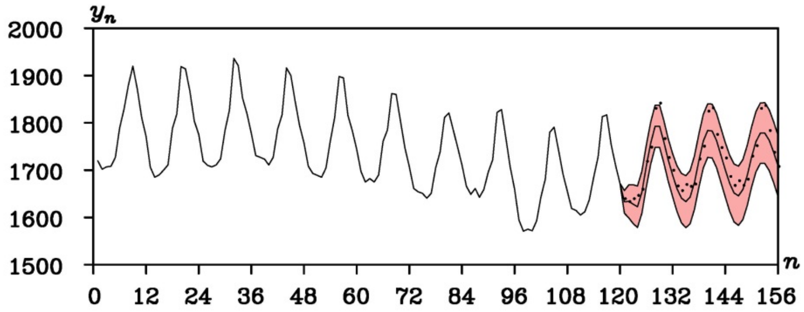
例：　長期予測　BLSALLFOODデータ



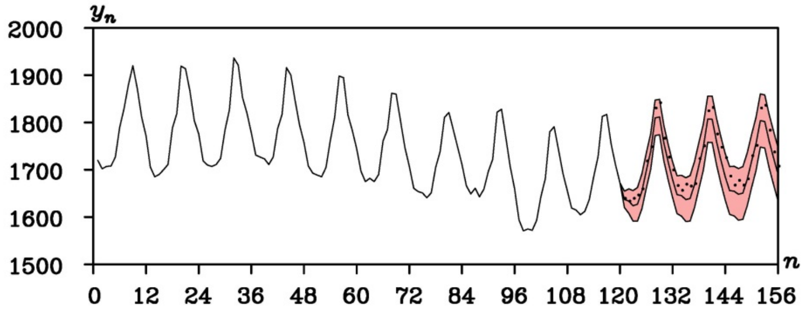
$m=1$



$m=5$



$m=10$



$m=15$

自己回帰モデル（AR Model)の推定

なぜ一般性のあるARMAモデルでなくARモデルの推定を考えるのか？

1. この時点でARMAモデルの推定（最尤法など）は困難（状態空間モデルが必要）
2. ARモデルの推定は簡単（最小二乗法など）
3. ARモデルの実用性が高い
4. ARMAモデルは自由度が高すぎ，やや不安定

ARモデルの同定問題

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j} + v_n, \quad v_n \sim N(0, \sigma^2)$$

- パラメータ推定

  AR係数 a_j $(j=1,\ldots,m)$ と分散 σ^2 の推定

- 次数 m の選択

  AR次数 m の決定

✓ 多数の次数とパラメータを推定する必要がある

ARモデルのパラメータ推定の方法

1. Yule-Walker法
2. 最尤法
3. 最小二乗法
4. PARCOR法（3種類）

（1）Yule-Walker法

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} a_j y_{n-j} + v_n$$

Yule-Walker方程式

$$C_0 = \sum_{j=1}^{m} a_j C_j + \sigma^2$$

$$C_k = \sum_{j=1}^{m} a_j C_{j-k} \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

$$a_1,\ldots,a_m,\ \sigma^2$$

$$C_0,\ C_1,\ldots,\ C_m$$

係数に関する1次方程式

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_0 & \hat{C}_1 & \cdots & \hat{C}_{m-1} \\ \hat{C}_1 & \hat{C}_0 & \cdots & \hat{C}_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{C}_{m-1} & \hat{C}_{m-2} & \cdots & \hat{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_2 \\ \vdots \\ \hat{C}_m \end{bmatrix}$$

（Toepritz matrix）

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{C}_0 - \sum_{j=1}^{m} \hat{a}_j \hat{C}_j$$

Yule-Walker方程式の導出（再掲）

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} a_j y_{n-j} + v_n$$

$$E(y_n \underline{y_{n-k}}) = \sum_{i=1}^{m} a_j E(y_{n-j} \underline{y_{n-k}}) + E(v_n \underline{y_{n-k}})$$

$$E(v_{n+k} y_n) = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \sigma^2 & k = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=1}^{m} a_j C_{-j} + \sigma^2 \\ C_k &= \sum_{j=1}^{m} a_j C_{k-j}, \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}}$$

Yule-Walker法は何をやっているか

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} a_j y_{n-j} + v_n, \qquad v_n \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = E[v_n^2] = E\left[(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j})^2 \right]$$

$$= C_0 - 2\sum_{j=1}^{m} a_j C_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_j a_i C_{i-j}$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_j} = -2C_j + 2\sum_{i=1}^{m} a_i C_{i-j} = 0, \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Yule-Walker法では予測誤差分散の期待値を最小にするように係数 a_j を決めている.

Levinson's Algorithm (Levinson-Durbin)

- 一連のYule-Walker方程式を単純に計算すると
  - m 元一次方程式の計算量　（Gauss消去法： $m^3/3 + O(m^2)$）
  - 次数は未知：　１次～M 次

$$(1+2^3+\cdots+M^3)/3 = M^2(M+1)^2/12 \approx M^4/12$$

- Levinsonのアルゴリズムは一連のYule-Walker方程式を効率よく求める方法
  - 計算量は $2M^2$ 程度になる

$M = 100$ のとき

$$\frac{2M^2}{M^4/12} = \frac{24}{M^2} = \frac{24}{10{,}000} = 0.0024$$

Levinson's Algorithm

1. $\sigma_0^2 = C_0$

$$\mathrm{AIC}_0 = N(\log 2\pi\hat{\sigma}_0^2 + 1) + 2$$

2. $m = 1,\ldots,M$について

$$(a)\quad a_m^m = (C_m - \sum_{j=1}^{m-1} a_j^{m-1} C_{m-j})(\sigma_{m-1}^2)^{-1}$$

$$(b)\quad a_j^m = a_j^{m-1} - a_m^m a_{m-j}^{m-1} \qquad (j = 1,\ldots,m-1)$$

$$(c)\quad \sigma_m^2 = \sigma_{m-1}^2 \left\{1 - (a_m^m)^2\right\}$$

$$(d)\quad \mathrm{AIC_m} = N(\log 2\pi\hat{\sigma}_m^2 + 1) + 2(m+1)$$

積除	和差
m	m-1
m-1	m-1
2	1
2m+1	2m-1

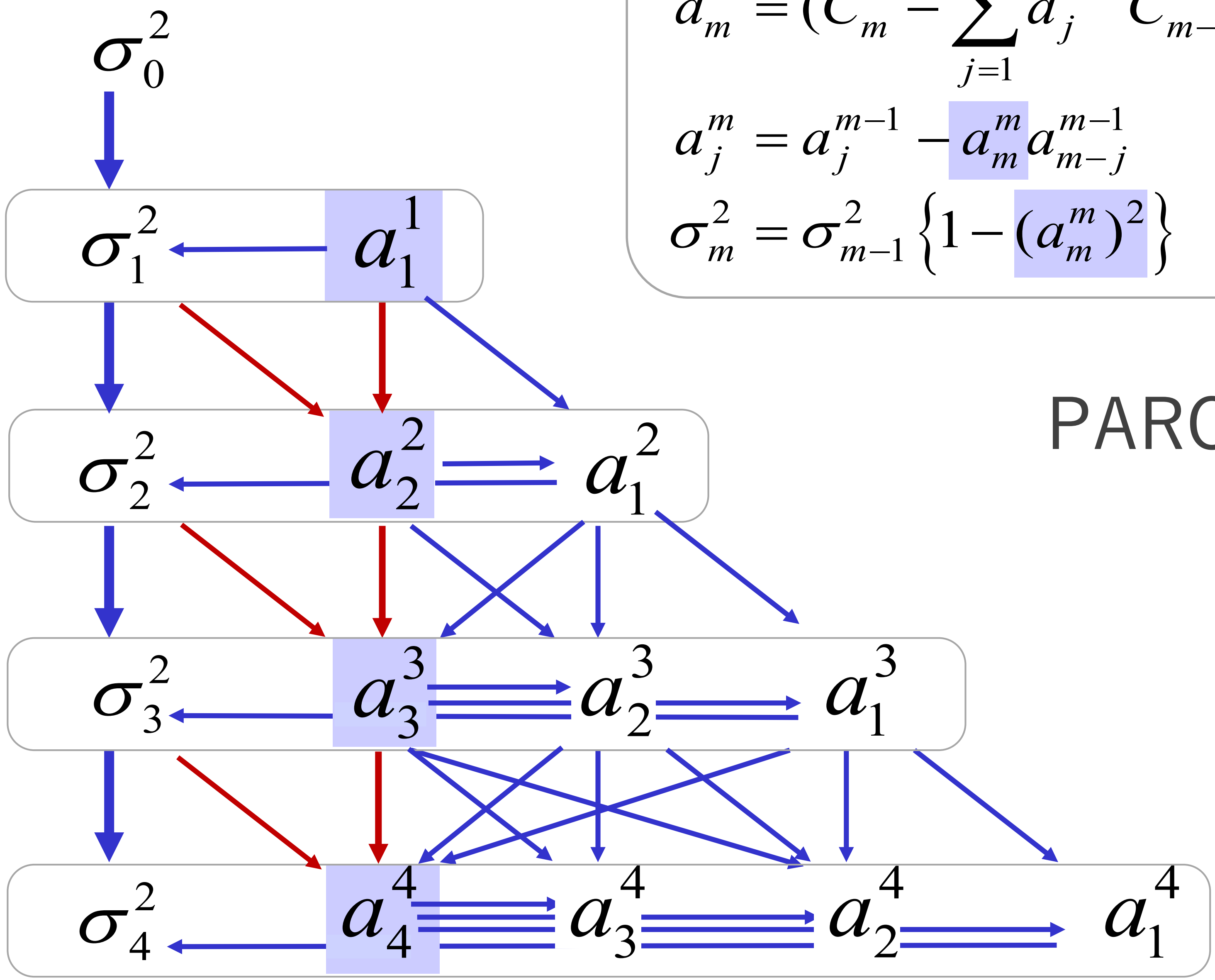
計算量： $\displaystyle\sum_{m=1}^{M} 4m = 2M(M+1) \approx 2M^2$

Levinson's Algorithm

$$a_m^m = (C_m - \sum_{j=1}^{m-1} a_j^{m-1} C_{m-j})(\sigma_{m-1}^2)^{-1}$$

$$a_j^m = a_j^{m-1} - a_m^m a_{m-j}^{m-1}$$

$$\sigma_m^2 = \sigma_{m-1}^2 \left\{ 1 - (a_m^m)^2 \right\}$$



PARCOR

Levinson Algorithmの導出

C_k, (k=0,1,…)と$m-1$次のARモデルのYule-Wlaker推定値が与えられているとき，m次のARモデルのYule-Walker推定値を効率よく求める方法.

$\hat{a}_1^{m-1},\ldots,\hat{a}_{m-1}^{m-1}$ はYule-Walker方程式をみたすので

$$C_k=\sum_{j=1}^{m-1}\hat{a}_j^{m-1}C_{j-k}, \qquad (k=1,\ldots,m-1)$$

したがって，予測誤差 v_n^{m-1}について

$$E\left[v_n^{m-1}y_{n-k}\right]=E\left[(y_n-\sum_{j=1}^{m-1}\hat{a}_j^{m-1}y_{n-j})y_{n-k}\right]=0, \qquad (k=1,\ldots,m-1)$$

$$\boxed{y_n=\sum_{j=1}^{m-1}a_j^{m-1}y_{n-j}+v_n^{m-1}}$$

Levinson Algorithmの導出（2）

$m-1$次の後向きARモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{m-1} a_j^{m-1} y_{n+j} + w_n^{m-1}$$

$C_{-k}=C_k$ なので，後向きARモデルも同じYule－Walker方程式をみたす．

$$E\left[w_{n-m}^{m-1} y_{n-k}\right] = E\left[(y_{n-m} - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} y_{n-m+j}) y_{n-k}\right] = 0, \qquad (k = 1,\ldots,m-1)$$

ここで　$z_n \equiv v_n^{m-1} - \beta w_{n-k}^{m-1}$　と定義すると

$$= y_n - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} y_{n-j} - \beta(y_{n-m} - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} y_{n-m+j})$$

$$= y_n - \sum_{j=1}^{m-1} (\hat{a}_j^{m-1} - \beta \hat{a}_{m-j}^{m-1}) y_{n-j} - \beta y_{n-m}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E\left[v_n^{m-1} y_{n-k}\right] = 0 \\ E\left[w_{n-m}^{m-1} y_{n-k}\right] = 0 \\ \text{for } k = 1,\ldots,m-1 \end{array}}$$

$E\left[z_n y_{n-k}\right] = 0, \quad k = 1,\ldots,m-1$ については自動的になりたつので

$E\left[z_n y_{n-m}\right] = 0$ が成りたつように β を決めればよい．

Levinson Algorithmの導出（３）

$$E\left[z_n y_{n-m}\right] = E\left[\left\{y_n - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} y_{n-j} - \beta(y_{n-m} - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} y_{n-m+j})\right\} y_{n-m}\right]$$

$$= C_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} C_{m-j} - \beta(C_0 - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} C_j) = 0$$

$$\beta = (C_0 - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} C_j)^{-1} (C_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} C_{m-j})$$

$$= (\sigma_{m-1}^2)^{-1} (C_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} C_{m-j})$$

$\hat{a}_m^m = \beta$ とする

$\hat{a}_j^m \equiv \hat{a}_j^{m-1} - \hat{a}_m^m \hat{a}_{m-j}^{m-1}$ とおくと

$$E\left[(y_n - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^m y_{n-j}) y_{n-k}\right] = C_k - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^m C_{k-j} = 0, \quad (k = 1, \ldots, m)$$ がなりたつ

$\hat{a}_1^m, \ldots, \hat{a}_m^m$はm次のYule-Walker方程式の解

Levinson Algorithmの導出（4）

$$\hat{\sigma}_m^2 = C_0 - \sum_{j=1}^{m} \hat{a}_j^m C_j$$

$$= C_0 - \sum_{j=1}^{m-1} (\hat{a}_j^{m-1} - \hat{a}_m^m \hat{a}_{m-j}^{m-1}) C_j - \hat{a}_m^m C_m$$

$$= C_0 - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} C_j - \hat{a}_m^m (C_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_{m-j}^{m-1} C_j)$$

$$= \hat{\sigma}_{m-1}^2 - \hat{a}_m^m (C_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_{m-j}^{m-1} C_j)$$

$$C_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_{m-j}^{m-1} C_j = \hat{a}_m^m \hat{\sigma}_{m-1}^2 \longleftarrow \hat{a}_m^m = (\sigma_{m-1}^2)^{-1} (C_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} C_{m-j})$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \hat{\sigma}_{m-1}^2 (1 - (\hat{a}_m^m)^2)$$

（2）最尤法：ARモデルの尤度

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j} + v_n, \qquad v_n \sim N(0, \sigma^2) \qquad\qquad \theta = (a_1, \ldots, a_m, \sigma^2)^T$$

- 定義通りの方法

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \qquad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{N-1} \\ C_1 & C_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C_1 \\ C_{N-1} & \cdots & C_1 & C_0 \end{bmatrix}$$

$$y \sim N(\mu, C)$$

$$L(\theta) = p(y_1, \ldots, y_N \mid \theta) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |C|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1} (x-\mu) \right\}$$

$\ell(\theta) = \log L(\theta)$ の数値的最適化により最尤推定値を求める

（２）最尤法：ARモデルの尤度

● 各時刻の条件付き分布に分解する方法

$$\begin{aligned} L(\theta) &= p(y_1,\dots,y_N \mid \theta), \\ &= p(y_1 \mid \theta)\, p(y_2,\dots,y_N \mid y_1,\theta) \\ &= p(y_1 \mid \theta)\, p(y_2 \mid y_1,\theta)\, p(y_3,\dots,y_N \mid y_1,y_2,\theta) \\ &= \cdots \\ &= \prod_{n=1}^{N} p(y_n \mid y_1,\dots,y_{n-1},\theta) \end{aligned}$$

$n > m$ のとき

$$p(y_n \mid y_1,\dots,y_{n-1},\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j} \right)^2 \right\}$$

$n \le m$ のとき？

- 低次のAR係数を計算して，同様に条件付き分布を計算
- $(y_1,\dots,y_m)$ の部分だけ定義通りの方法で計算
- 厳密な最尤法には状態空間モデルが便利

（３）最小二乗法：尤度の近似

$n > m$　のとき

$$p(y_n \mid y_1,\ldots,y_{n-1},\theta) = p(y_n \mid y_{n-m},\ldots,y_{n-1},\theta)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j} \right)^2 \right\}$$

$$\ell(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \log p(y_n \mid y_1,\ldots,y_{n-1})$$
$$\cong \sum_{n=m+1}^{N} \log p(y_n \mid y_{n-m},\ldots,y_{n-1})$$
$$= -\frac{N-m}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=m+1}^{N}(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j})^2$$

- 最初のm個 $y_1,\ldots,y_m$の分布を無視(条件付けだけに使う)。
- モデル比較のためには無視するデータ数を同じにする。

（３）最小二乗法によるARモデルの推定

$$\ell'(\sigma^2, a_j) = -\frac{N-m}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=m+1}^{N}(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j})^2$$

$$\frac{\partial \ell'(\sigma^2, a_j)}{\partial \sigma^2} = -\frac{N-m}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{n=m+1}^{N}(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j})^2 = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-m}\sum_{n=m+1}^{N}(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j})^2$$

$$\ell'(\hat{\sigma}^2, a_j) = -\frac{N-m}{2}\log(2\pi\hat{\sigma}^2) - \frac{N-m}{2}$$

$$\max_{a_j} \ell'(\hat{\sigma}^2, a_j) \Leftrightarrow \min_{a_j} \hat{\sigma}^2 \Leftrightarrow \min_{a_j} \sum_{n=m+1}^{N}(y_n - \sum_{j=1}^{m} a_j y_{n-j})^2$$

- 近似最尤法 ～ 最小二乗法

最小二乗法

$$y = \begin{bmatrix} y_{m+1} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} y_m & \cdots & y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{N-1} & \cdots & y_{N-m} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_{m+1} \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

$$y = Za + v$$

$$\|v\|^2 = \|y - Za\|^2$$

$$\hat{a} = (Z^T Z)^{-1} Z^T y$$

Householder 法

Householder法

- 平方根アルゴリズム（フィルタリングでも使える）
- 共分散行列を使わずデータ行列から直接推定

Householder法を使うメリット

1．計算精度（2倍精度）
2．トータルの計算量が少ない
2．モデルの自由度（変数選択、次数選択）
3．計算上の便利さ（モデル併合、データ逐次併合）

デメリット

1．Householder法特有のデメリットはほぼない
2．最小二乗法自体のデメリットは継承する

Householder 法

$$Z = \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad m \quad} \\ \begin{bmatrix} y_m & y_{m-1} & \cdots & y_1 \\ y_{m+1} & y_m & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-m} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad y = \begin{bmatrix} y_{m+1} \\ y_{m+2} \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \updownarrow N\text{-}m$$

$$X = [Z \mid y] = \left[\begin{array}{cccc|c} y_m & y_{m-1} & \cdots & y_1 & y_{m+1} \\ y_{m+1} & y_m & \cdots & y_2 & y_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-m} & y_N \end{array}\right]$$

$$HX = \begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} s_{11} & \cdots & s_{1m} & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & s_{mm} & s_{m,m+1} \\ & & & s_{m+1,m+1} \\ \hline & & O & \end{array}\right]$$

AICによる次数選択

$$\ell(\hat{\theta}) = -\frac{N}{2}\log 2\pi\hat{\sigma}_m^2 - \frac{N}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AIC}_m &= -2\ell(\hat{\theta}) + 2(\text{パラメータ数}) \\ &= N(\log 2\pi\hat{\sigma}_m^2 + 1) + 2(m+1)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1k} & \cdots & s_{1m} & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & s_{kk} & \cdots & s_{km} & s_{k,m+1} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & s_{mm} & s_{m,m+1} \\ & & & & & s_{m+1,m+1} \\ & & 0 & & & \end{bmatrix}$$

for $k = 1,\ldots,m$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n}\left(s_{k+1,m+1}^2 + \cdots + s_{m+1,m+1}^2\right)$$

$$\mathrm{AIC}_k = N(\log 2\pi\hat{\sigma}_k^2 + 1) + 2(k+1)$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ & & s_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,m+1} \\ \vdots \\ s_{k,m+1} \end{bmatrix}$$

（４）PARCOR法によるARモデルの推定

$$\hat{a}_j^m = \hat{a}_j^{m-1} - \hat{a}_m^m \hat{a}_{m-j}^{m-1} \qquad (j = 1, \ldots, m-1)$$

$$\hat{a}_m^m = (\hat{\sigma}_{m-1}^2)^{-1} \left\{ \hat{C}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \hat{a}_j^{m-1} \hat{C}_{m-j} \right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Levinson's algorithm}$$

PARCOR法：　$\hat{a}_m^m$ をデータから直接推定する

$$y_{n-m} = \sum_{i=1}^{m-1} a_j^{m-1} y_{n-m+j} + w_{n-m}^{m-1}$$

後向きARモデル

$$\begin{aligned} C_m - \sum_{j=1}^{m-1} a_j^{m-1} C_{m-j} &= E\left\{ \left(y_n - \sum_{i=1}^{m-1} a_j^{m-1} y_{n-j} \right) y_{n-m} \right\} \\ &= E\left(v_n^{m-1} y_{n-m} \right) \\ &= E\left(v_n^{m-1} w_{n-m}^{m-1} \right) \quad \longleftarrow \quad \boxed{E[v_n^{m-1} y_{n-m-j}] = 0 \quad j = 1, \ldots, m-1} \\ &\cong \frac{1}{N-m} \sum_{n=m+1}^{N} \left(v_n^{m-1} w_{n-m}^{m-1} \right) \end{aligned}$$

PARCOR法

$$\hat{\sigma}_{m-1}^2 = C_0 - \sum_{j=1}^{m-1} a_j^{m-1} C_j = E\left\{\left(y_{n-m} - \sum_{i=1}^{m-1} a_j^{m-1} y_{n-m+j}\right) y_{n-m}\right\}$$

$$= E\left(w_{n-m}^{m-1} y_{n-m}\right)$$

$$= E\left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2$$

$$w_{n-m}^{m-1} = y_{n-m} - \sum_{i=1}^{m-1} a_j^{m-1} y_{n-m+j}$$

$$E[w_{n-m}^{m-1} y_{n-m-j}] = 0 \quad j = 1, \dots, m-1$$

$$\cong \begin{cases} \dfrac{1}{N-m} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{N} \left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2 \\ \dfrac{1}{N-m} \left\{ \displaystyle\sum_{n=m+1}^{N} \left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2 \sum_{n=m+1}^{N} \left(v_n^{m-1}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{1}{2(N-m)} \left\{ \displaystyle\sum_{n=m+1}^{N} \left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2 + \sum_{n=m+1}^{N} \left(v_n^{m-1}\right)^2 \right\} \end{cases}$$

$$E\left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2 = E\left(v_n^{m-1}\right)^2$$

$$a_m^m = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{N} v_n^{m-1} w_{n-m}^{m-1} \left\{ \sum_{n=m+1}^{N} \left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2 \right\}^{-1} \\ \displaystyle\sum_{n=m+1}^{N} v_n^{m-1} w_{n-m}^{m-1} \left\{ \sum_{n=m+1}^{N} \left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2 \sum_{n=m+1}^{N} \left(v_n^{m-1}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ \displaystyle\sum_{n=m+1}^{N} v_n^{m-1} w_{n-m}^{m-1} \left\{ \sum_{n=m+1}^{N} \left(w_{n-m}^{m-1}\right)^2 + \sum_{n=m+1}^{N} \left(v_n^{m-1}\right)^2 \right\}^{-1} \end{cases}$$

Partial Regression

PARCOR法

Burg法（MEM）

PARCOR法

$\hat{a}_m^m$ 　$m-1$次の前向きのARモデルと後向きのARモデルの予測誤差の相関係数

推定法の特徴

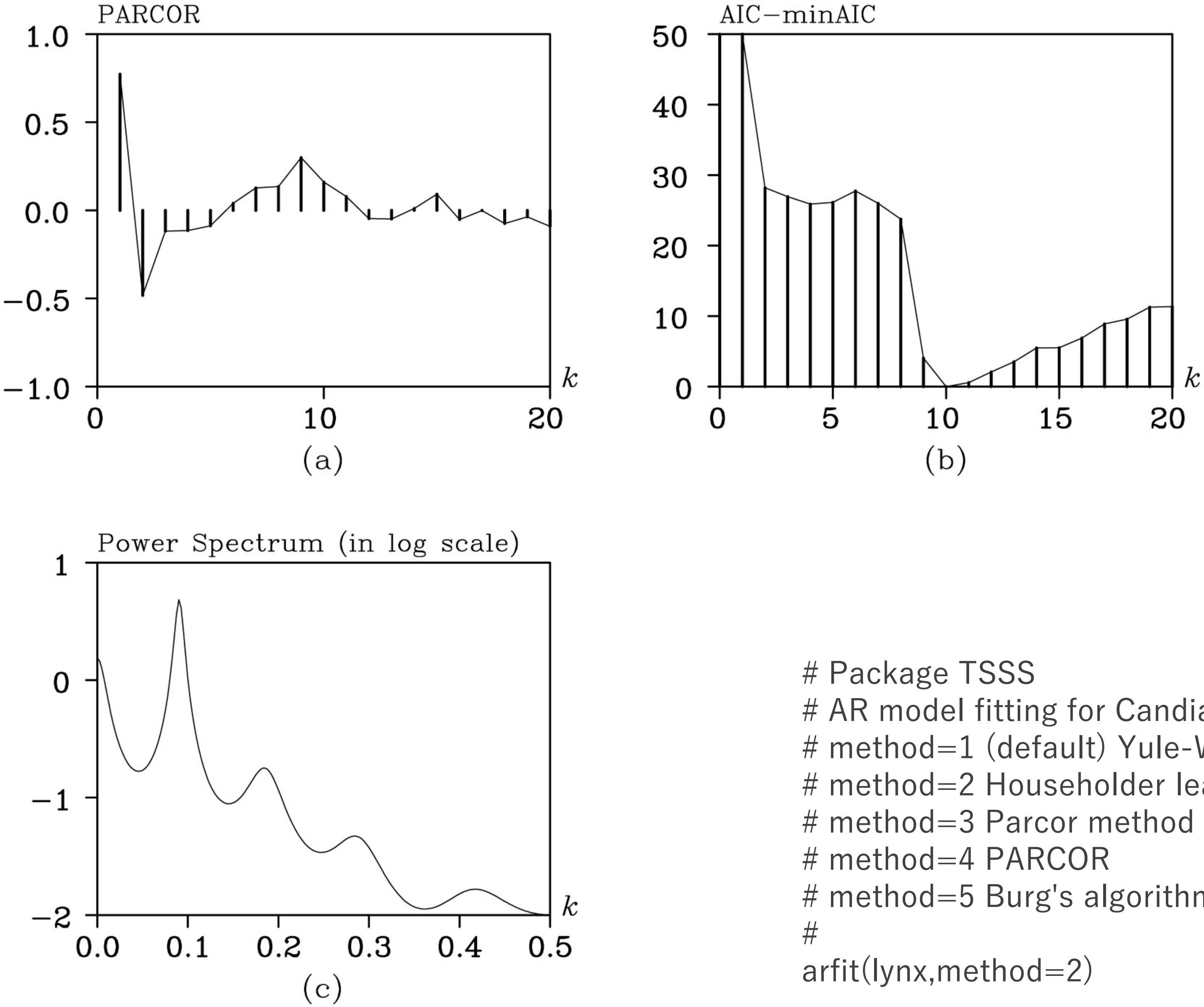
	定常性	数値精度	モデル精度	速度	自由度
Yule-Walker法	○	△	△	○	△
最尤法	◎	○	◎	×	○
最小二乗法	×	◎	○	◎	◎
PARCOR法	◎	○	○	◎	△

Yule-Walker法では実際は非定常な場合でも定常になる。

Householder最小二乗法でYule-Walker法の計算もできる。

$$\underbrace{0,\cdots,0}_{m}, y_1, y_2, \ldots, y_N, \underbrace{0,\cdots,0}_{m} \quad \Rightarrow \quad \text{最小二乗法}$$

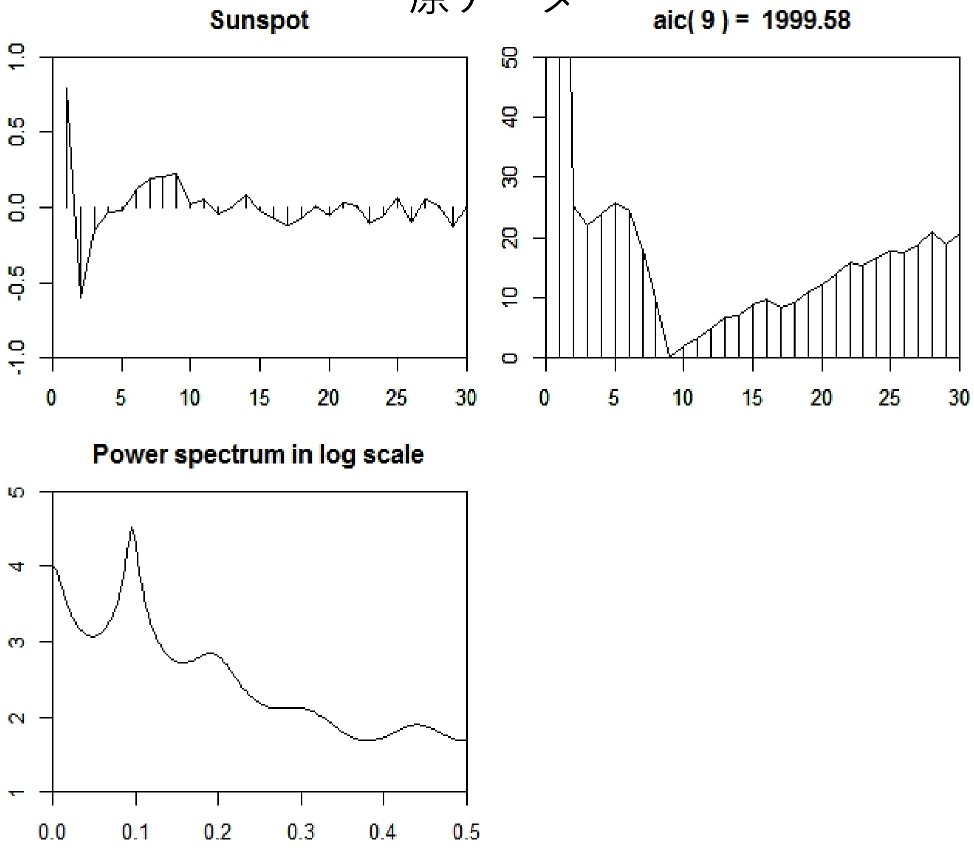
数値例　Candian Lynx data



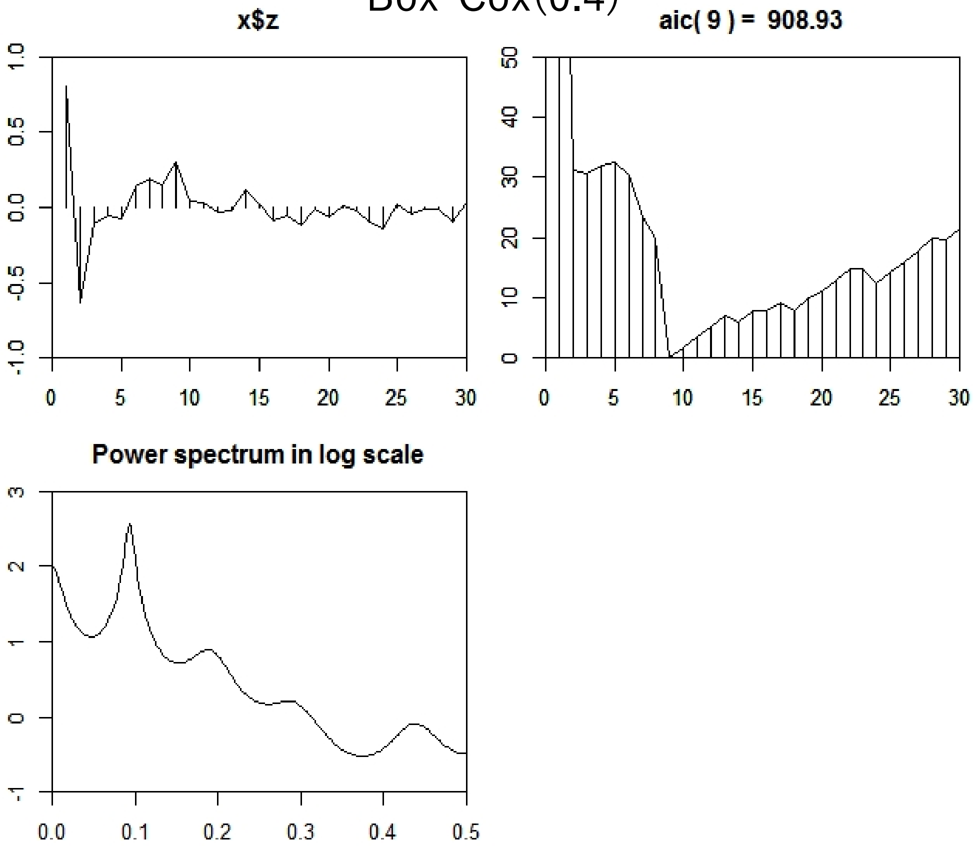

```
# Package TSSS
# AR model fitting for Candian Lynx data
# method=1 (default) Yule-Walker method
# method=2 Householder least squares method
# method=3 Parcor method (Partial autoregrssion)
# method=4 PARCOR
# method=5 Burg's algorithm (MEM)
#
arfit(lynx,method=2)
```


Sunspot data（Box-Cox変換の選択）

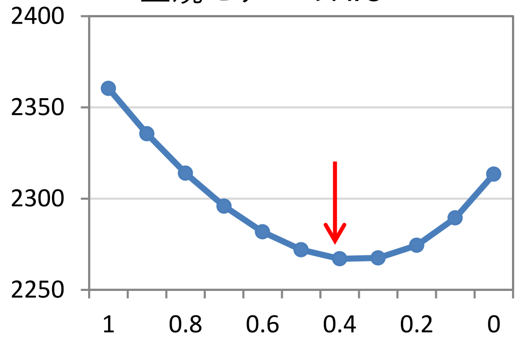
原データ



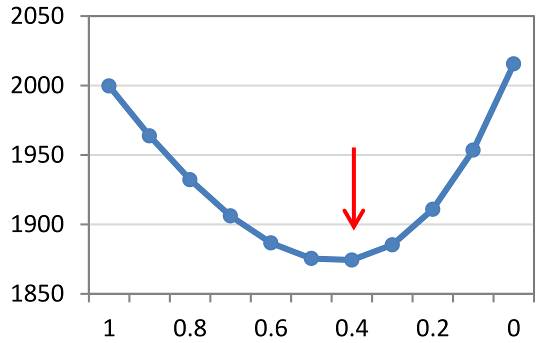
Box-Cox(0.4)



正規モデルのAIC'

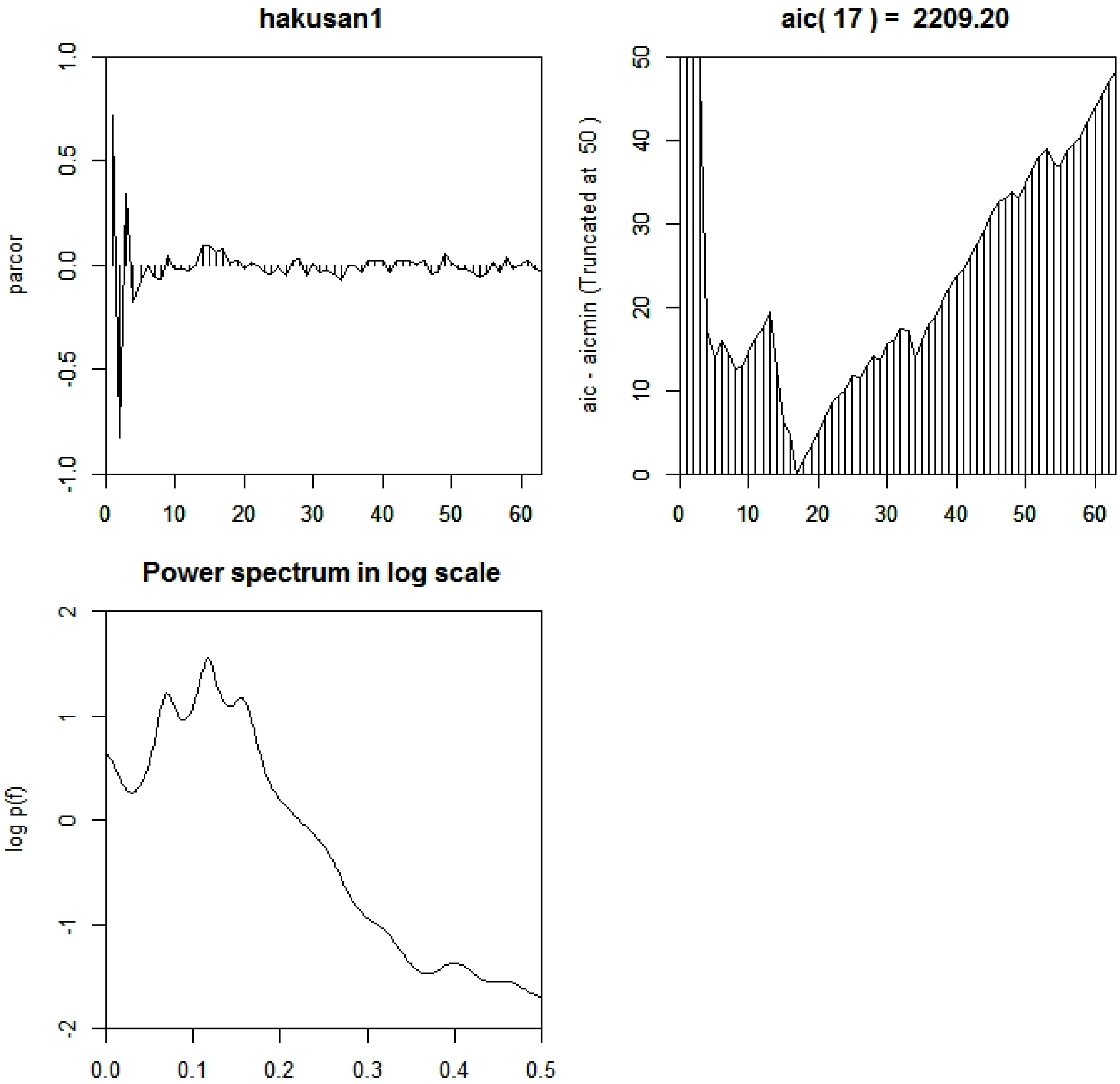


ARモデルのAIC'



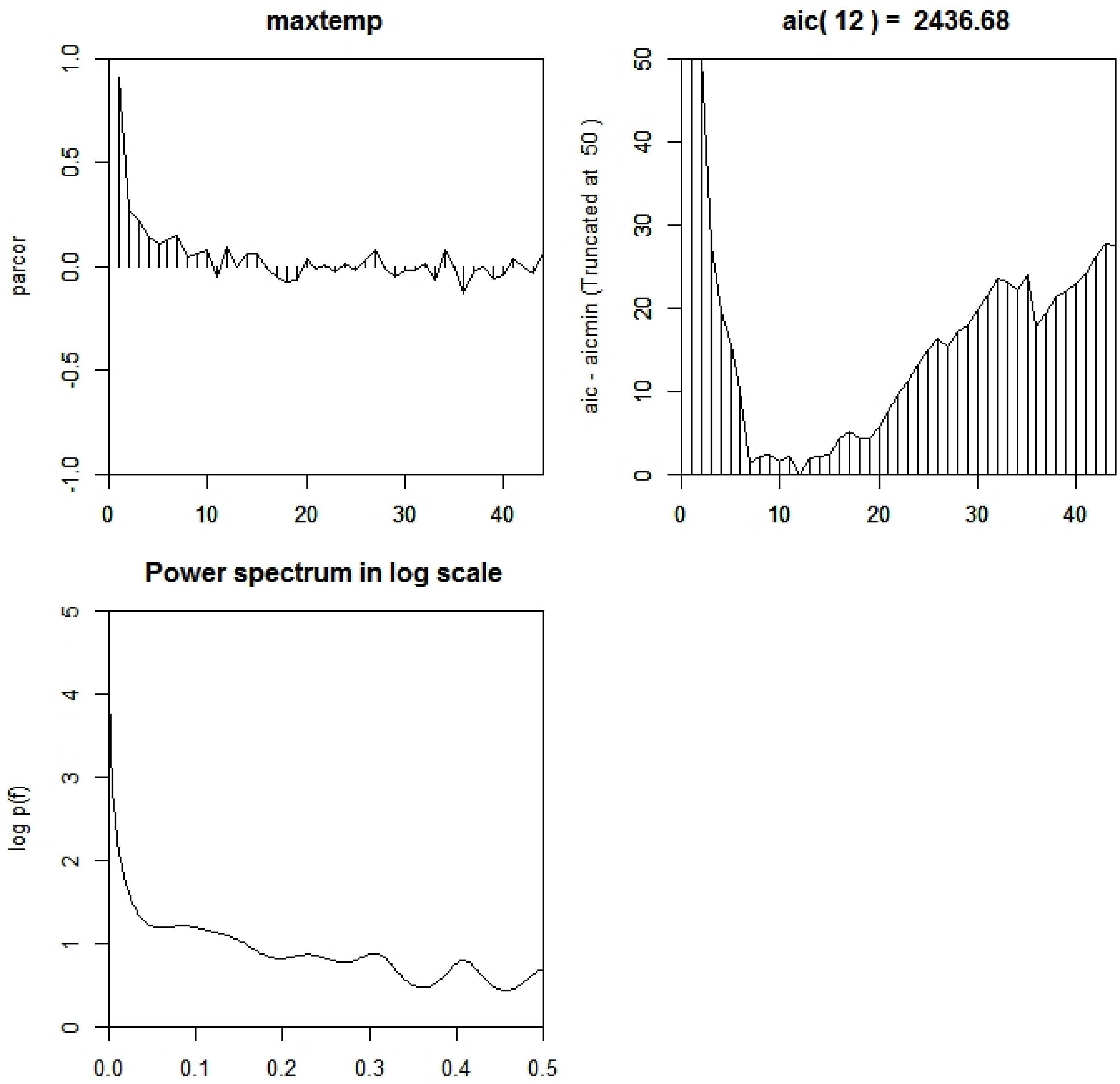
船の方向角速度データ

arfit(hakusan1)



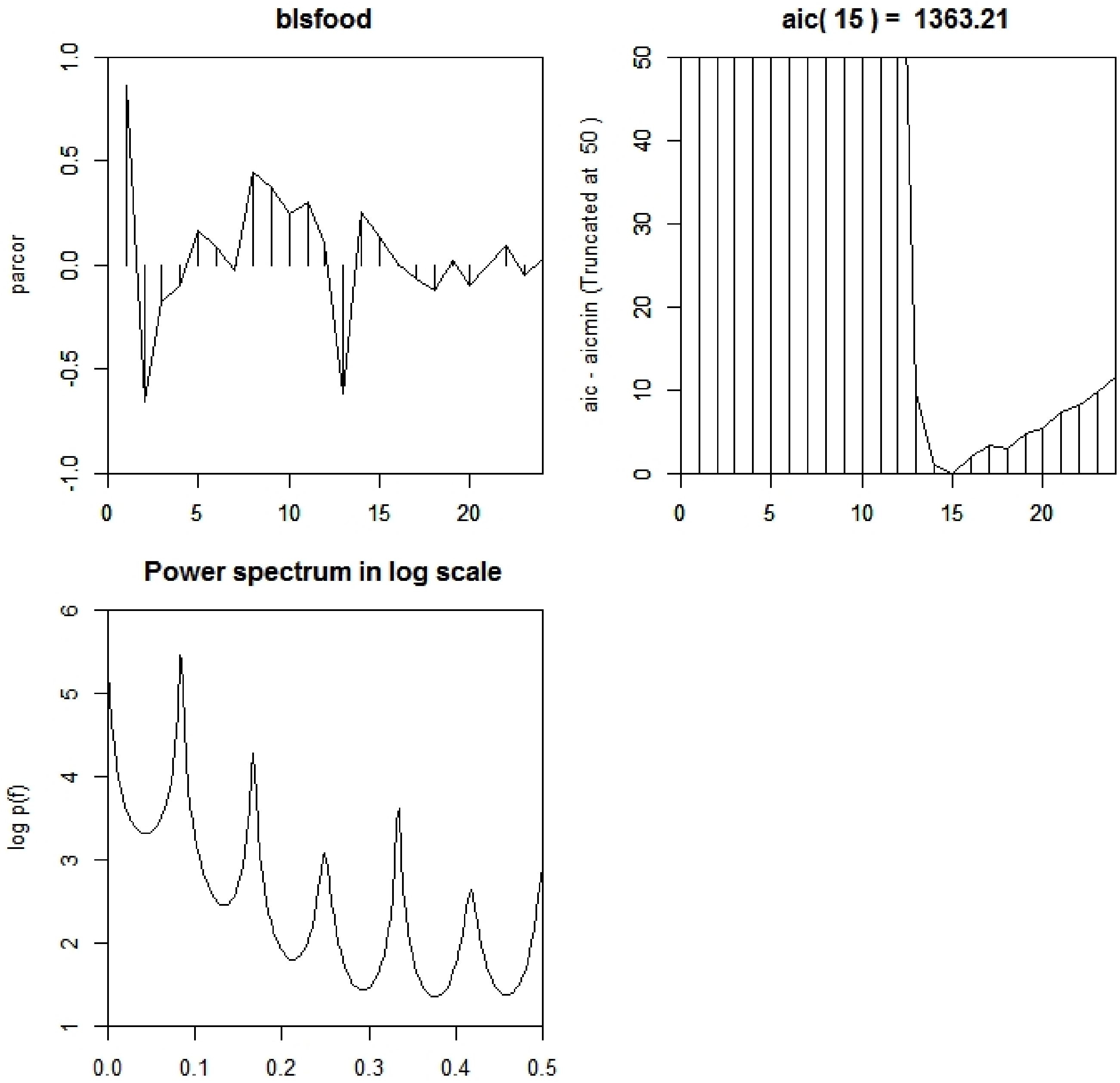
最高気温データ

arfit(maxtemp)



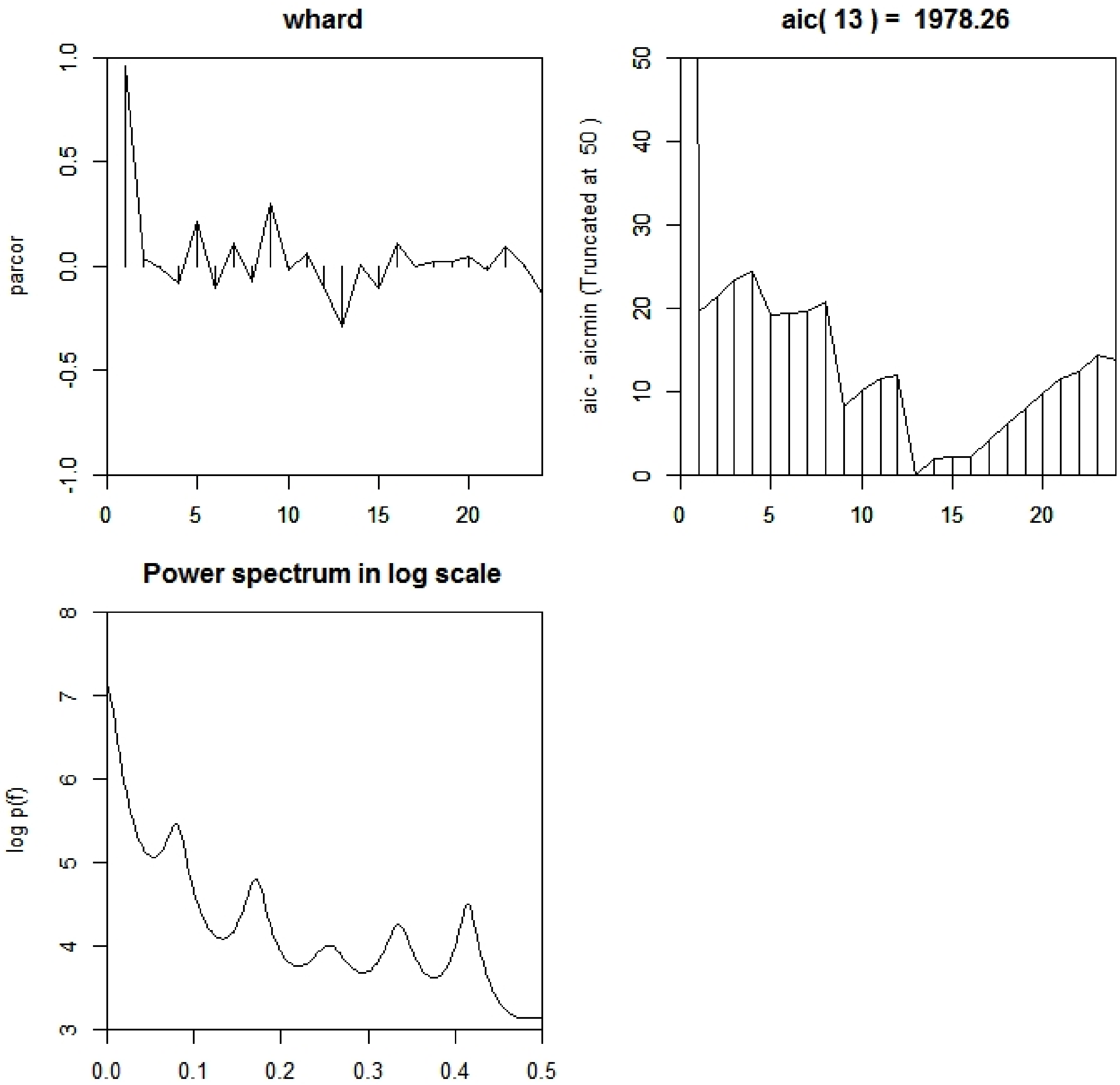
BLSALLFOOD（食品産業）データ

arfit(BLSALLFOOD)



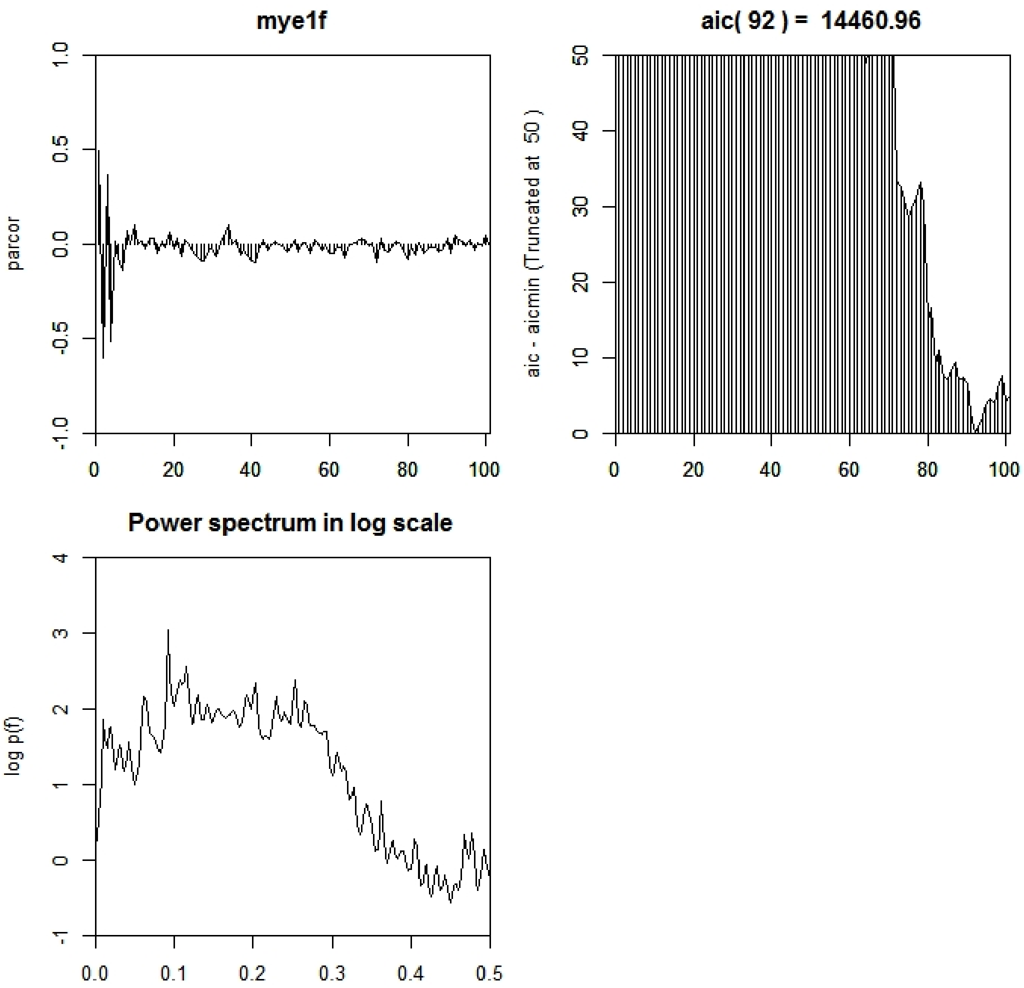
WHARD（卸売り高） data

arfit(whard)

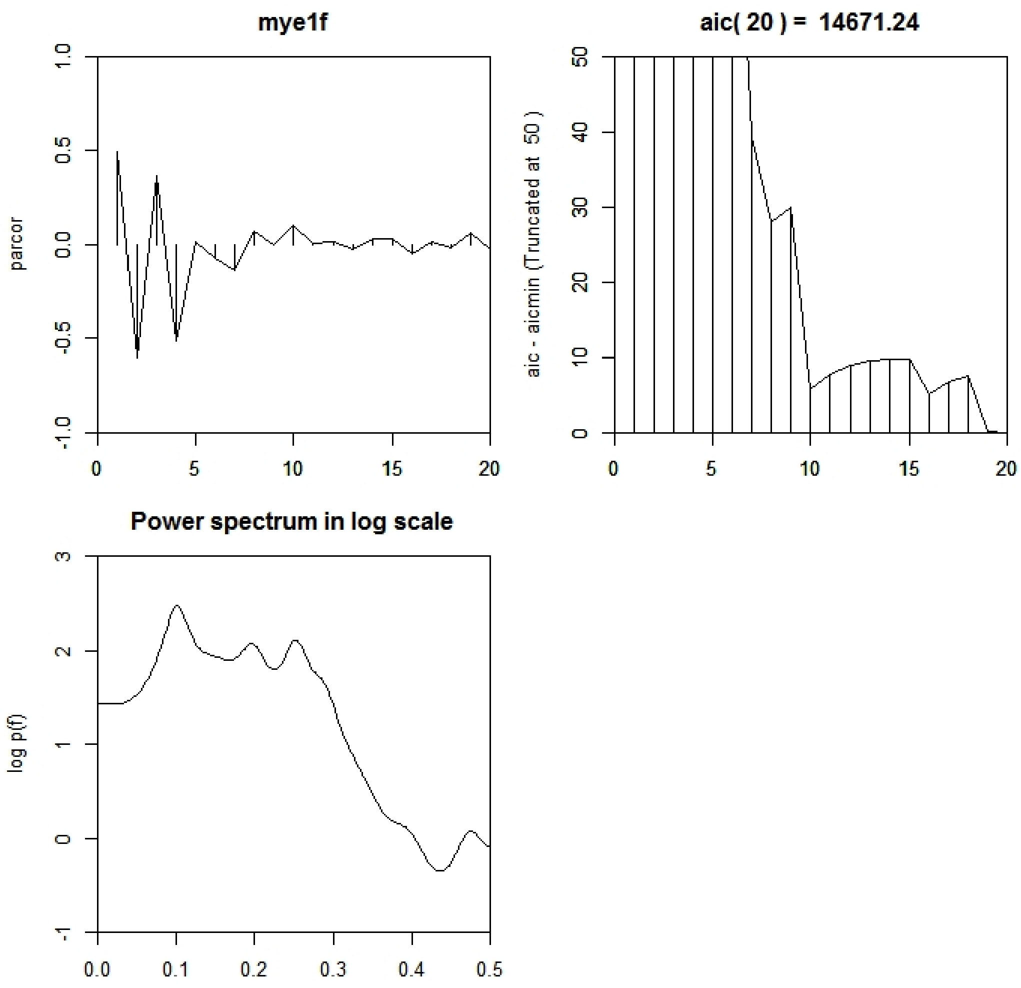


MYE1F 地震波(東西方向)データ

arfit(mye1f)



arfit(mye1f,lag=20)



多変量ARモデルの推定

1．Yule-Walker法

2．Householder（最小二乗法）

・同時応答モデル

多変量ARモデルの推定：Yule-Walker法

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} A_j^m y_{n-j} + v_n, \qquad v_n \sim N(0, V_m)$$

$$C_k = E\left[y_n y_{n-k}^T \right]$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^{m} A_j C_{-j} + V$$

$$C_k = \sum_{i=1}^{m} A_j C_{k-j} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\begin{bmatrix} C_0 & C_{-1} & \cdots & C_{1-m} \\ C_1 & C_0 & \cdots & C_{2-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m-1} & C_{m-2} & \cdots & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}$$

- Toepritz行列
- 対称行列ではない

多変量ARモデルの推定：Levinson - (Durbin)法

- 1変量ARモデルの場合，Levinsonアルゴリズムにより，Yule-Walker推定値を効率よく推定できる．
- アルゴリズムの導出には前向きモデルと後向きモデルを利用
- 多変量の場合にも同様のアルゴリズムがある．ただし，前向きモデルと後向きモデルが異なるため 2倍のパラメータが必要

● 前向きモデル

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} A_j^m y_{n-j} + v_n,$$

$$v_n \sim N(0, V_m)$$

● 後ろ向きモデル

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} B_j^m y_{n+j} + u_n,$$

$$u_n \sim N(0, U_m)$$

● 推定するパラメータ

$$\{((A_j^m, B_j^m), j=1,\ldots,m), V_m, U_m\}, m=1,\ldots,M$$

パラメータ数　$\ell^2 M(M+1) + \ell(\ell+1)M$

多変量ARモデルの推定：Levinson - (Durbin)法

1. 0 次のMARモデル

$$V_0 = U_0 = C_0$$

$$\mathrm{AIC}_0 = N(k\log 2\pi + \log|V_0| + k) + k(k+1)$$

2. $m = 1,\ldots,M$ について

$$(a)\quad W_m = C_m - \sum_{j=1}^{m-1} A_j^{m-1} C_{m-j}$$

$$(b)\quad A_m^m = W_m U_{m-1}^{-1}, \qquad B_m^m = W_m^T V_{m-1}^{-1}$$

$$(c)\quad A_j^m = A_j^{m-1} - A_m^m B_{m-j}^{m-1}, \qquad B_j^m = B_j^{m-1} - B_m^m A_{m-j}^{m-1}$$

$$(c)\quad V_m = C_0 - \sum_{j=1}^{m} A_j^m C_j^T, \qquad U_m = C_0 - \sum_{j=1}^{m} B_j^m C_j$$

$$(d)\quad \mathrm{AIC}_m = N(k\log 2\pi + \log|V_m|\hat{\sigma}_m^2 + k) + k(k+1) + 2k^2 m$$

最小二乗法による多変量ARモデルの推定

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} A_j y_{n-j} + v_n, \qquad v_n \sim N(0,V)$$

パラメータ数　$m\ell^2 + \ell(\ell+1)/2$

- 同時応答モデル

$$y_n = B_0 y_n + \sum_{i=1}^{m} B_j y_{n-j} + w_n, \qquad w_n \sim N(0,W)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0(2,1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_0(k,1) & \cdots & b_0(k,k-1) & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & O \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \sigma_k^2 \end{bmatrix}$$

$$y_n = (I-B_0)^{-1} \sum_{i=1}^{m} B_j y_{n-j} + (I-B_0)^{-1} w_n,$$

$$A_j = (I-B_0)^{-1} B_j$$

$$V = (I-B_0)^{-1} W (I-B_0)^{-T}$$

- MARモデルと1対1対応
- Wは対角行列

Householder 法のメリット

W は対角行列 ➡ 行ごとに独立に推定できる

- モデリングが自由に行える。変数ごと（説明変数，目的変数）に異なる次数を決められる
- 計算量が減少する　$(m\ell^2)^3 = m^3\ell^6$ ➡ $\ell(m\ell)^3 = m\ell^4$

$$X=[Z\,|\,y\,]=\begin{array}{c}l(m+1)\\ \left[\begin{array}{ccc|c} y_m^T & \cdots & y_1^T & y_{m+1}^T \\ y_{m+1}^T & \cdots & y_2^T & y_{m+2}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{N-1}^T & \cdots & y_{N-m}^T & y_N^T \end{array}\right]\end{array},\ N\text{-}m$$

$$\Rightarrow HX=\begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \quad lm \qquad\qquad l \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} s_{11} & \cdots & s_{1,\ell m+\ell} & \cdots & s_{1,km+\ell} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & s_{1,\ell m+\ell} & \cdots & s_{1,\ell m+\ell} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & s_{1,\ell m+\ell} \\ & & O & & \end{array}\right]\end{array}$$

$$\frac{m\ell^4}{m^3\ell^6}=\frac{1}{m^2\ell^2}=\frac{1}{5^2 10^2}=\frac{1}{2500}$$

l=10, m=5のとき

第1成分のモデル推定

$$
S = \left[\begin{array}{cccc|c}
s_{11} & \cdots & s_{1,\ell m} & & s_{1,\ell m+1} \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 & & s_{\ell m,\ell m} & & s_{\ell m,\ell m+1} \\
 & & & & s_{\ell m+1,\ell m+1}
\end{array}\right] \quad lm+1
$$

$$
\begin{array}{c}
\overset{lm+1}{\longleftrightarrow} \\
\overset{lj}{\longleftrightarrow}
\end{array}
$$

$$
S = \begin{bmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1,\ell j} & \cdots & s_{1,\ell m} & s_{1,\ell m+1} \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & s_{\ell j,\ell j} & \cdots & s_{\ell j,\ell m} & s_{\ell j,\ell m+1} \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & s_{\ell m,\ell m} & s_{\ell m,\ell m+1} \\
 & & & & & s_{\ell m+1,\ell m+1}
\end{bmatrix}
$$

$$
y_n(1) = \sum_{i=1}^{j} b_i(1,1)\,y_{n-i}(1) + \cdots + \sum_{i=1}^{j} b_i(1,\ell)\,y_{n-i}(\ell) + w_n
$$

$$
\hat{\sigma}_j^2(1) = \frac{1}{N-m} \sum_{i=\ell j+1}^{\ell m+1} s_{i,\ell m+1}^2
$$

$$
\mathrm{AIC}_j(1) = (N-m)\log(2\pi\hat{\sigma}_j^2(1)+1) + 2(\ell j+1)
$$

$$
\begin{bmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1,\ell j} \\
 & \ddots & \vdots \\
 & & s_{\ell j,\ell j}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_1 \\ \vdots \\ c_{\ell j}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
s_{1,\ell m+1} \\ \vdots \\ s_{\ell j,\ell m+1}
\end{bmatrix}
$$

第 2 成分のモデル推定

$$
S=\begin{bmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1,\ell m} & s_{1,\ell m+1} & s_{1,\ell m+2} & \cdots & s_{1,\ell m+\ell}\\
s_{21} & \cdots & s_{2,\ell m} & & s_{2,\ell m+2} & \cdots & s_{2,\ell m+\ell}\\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
 & & s_{\ell m+1,\ell m} & & s_{\ell m+1,\ell m+2} & \cdots & s_{\ell m+1,\ell m+\ell}\\
 & & & & s_{\ell m+2,\ell m+2} & \cdots & s_{\ell m+1,\ell m+\ell}\\
 & & & & & \ddots & \vdots\\
 & & & & & & s_{\ell m+\ell,\ell m+\ell}
\end{bmatrix}
$$

$$
y_n(2)=\sum_{i=1}^{j} b_i(2,1)\,y_{n-i}(1)+\cdots+\sum_{i=1}^{j} b_i(2,\ell)\,y_{n-i}(\ell)+w_n
$$

$$
\hat{\sigma}_j^2(2)=\frac{1}{N-m}\sum_{i=\ell j+2}^{\ell m+2} s_{i,\ell m+2}^2
$$

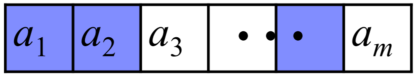
$$
\mathrm{AIC}_j(2)=(N-m)\log(2\pi\hat{\sigma}_j^2(2)+1)+2(\ell j+2)
$$

$$
\begin{bmatrix}
s_{11} & \cdots & s_{1,\ell j} & s_{1,\ell m+1}\\
s_{21} & \cdots & s_{2,\ell j} & \\
 & \ddots & \vdots & \\
 & & s_{\ell j+1,\ell j} &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_{\ell j+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
s_{1,\ell m+2}\\ s_{2,\ell m+2}\\ \vdots\\ s_{\ell j+1,\ell m+2}
\end{bmatrix}
$$

変数選択の方法

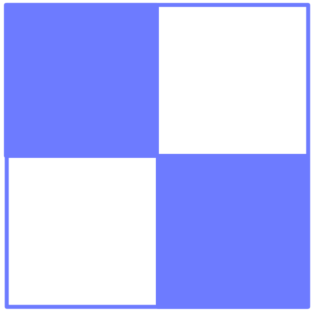
重回帰モデルの場合

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_j x_{nj} + \varepsilon_n \quad \Rightarrow \quad y_n = \sum_{i=1}^{k} a_{j_i} x_{nj_i} + \delta_n$$



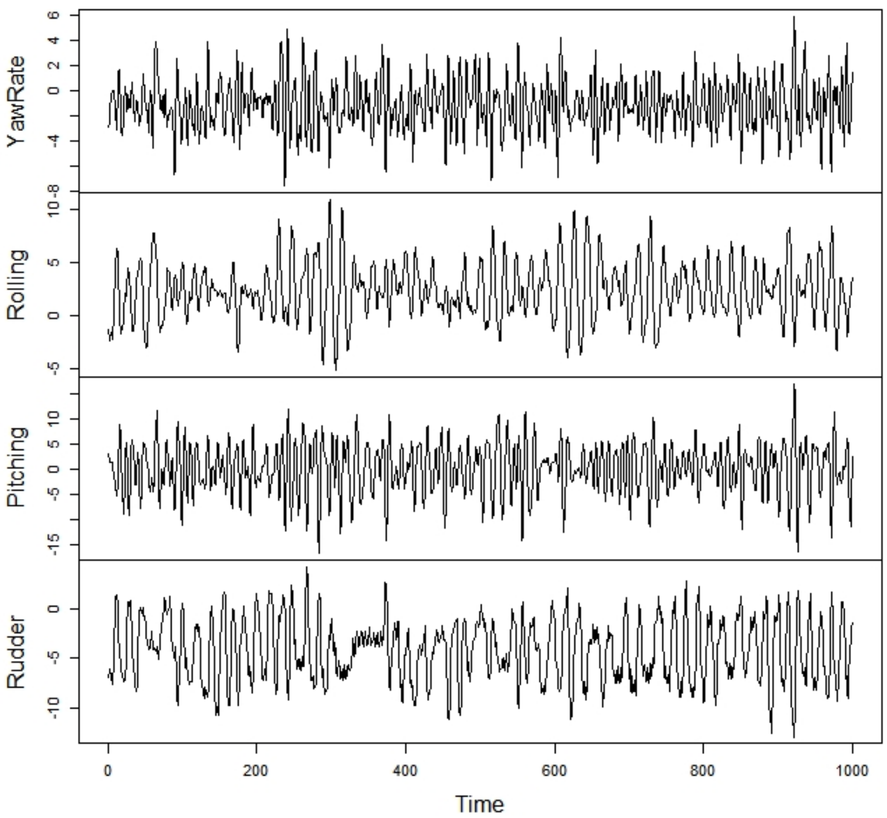
多変量時系列の場合

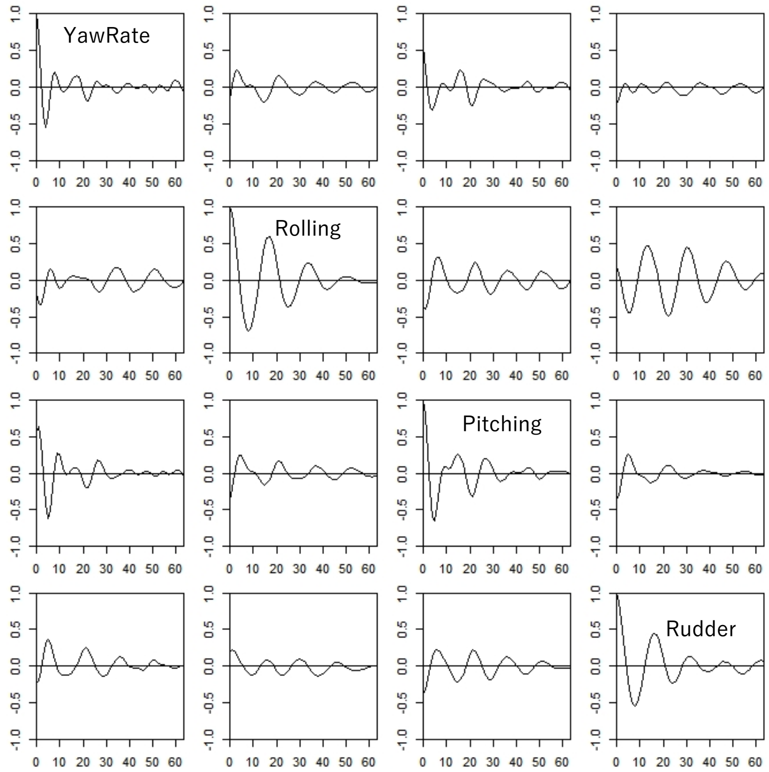
$$\begin{bmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{n\ell} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \begin{bmatrix} a_j(1,1) & a_j(1,2) & \cdots & a_j(1,\ell) \\ a_j(2,1) & a_j(2,2) & \cdots & a_j(2,\ell) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_j(\ell,1) & a_j(\ell,2) & \cdots & a_j(\ell,\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1,1} \\ y_{n-1,2} \\ \vdots \\ y_{n-1,\ell} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{n1} \\ \varepsilon_{n2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n\ell} \end{bmatrix}$$



- 目的変数 ＝ 説明変数 ⇒ 変数を削除すると比較評価ができない
- ２つ以上のグループにわけて，AICの和を比較する

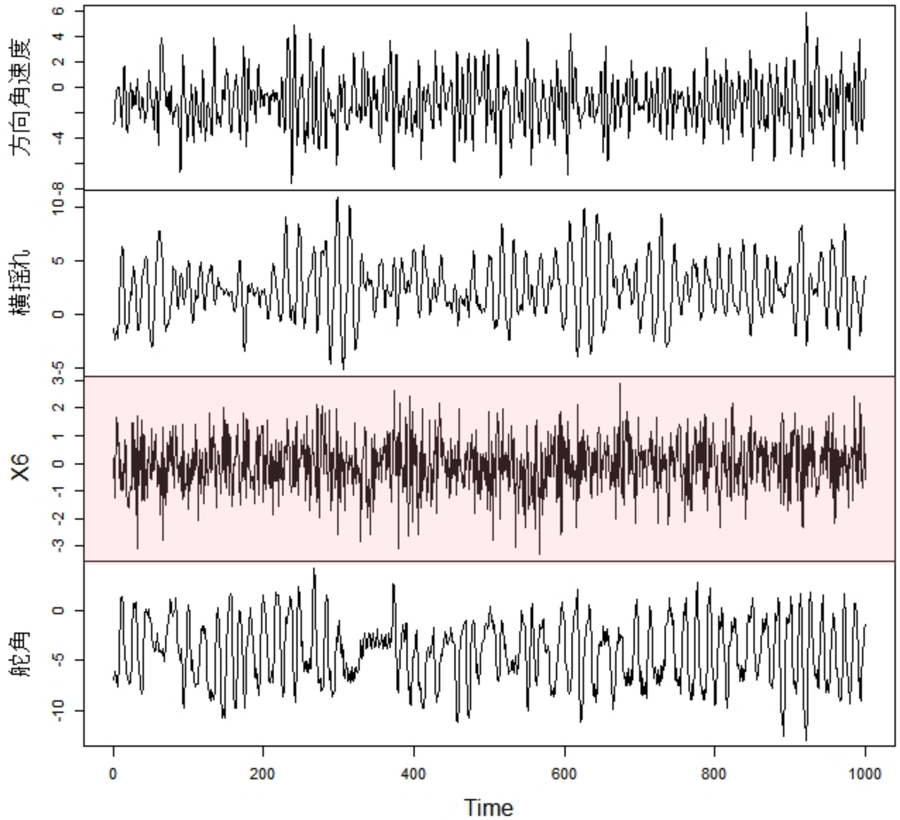
船舶データ（Yaw,Roll,Pitch,Rudder）

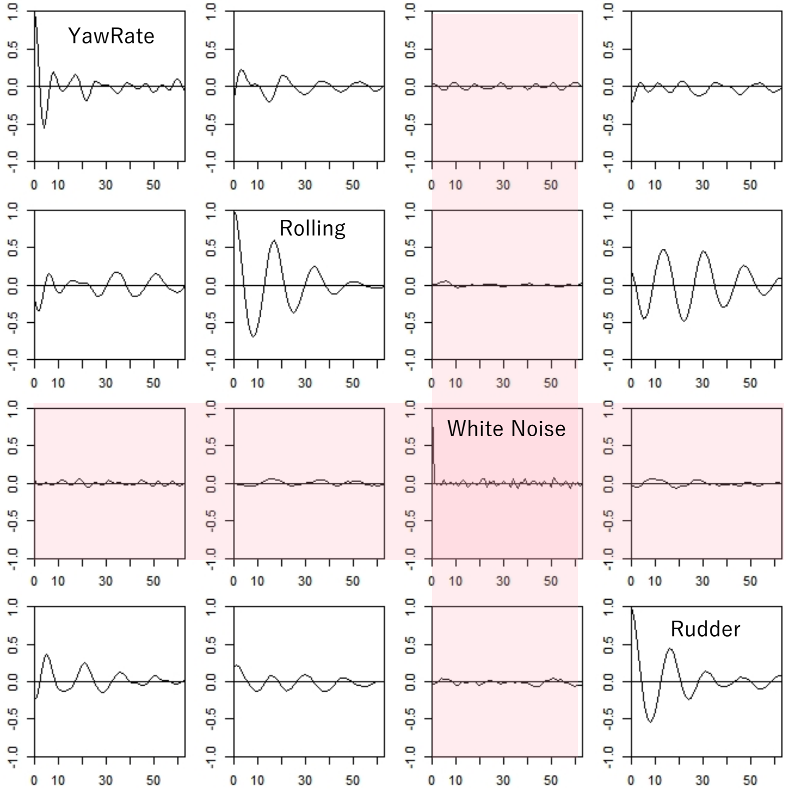




Y	R	P	Ru	AIC1					AIC2	AIC
■	■	■	■	9400.82						9400.82
■	■	■		6443.16				■	3085.15	9528.31
■	■		■	6658.67			■		2945.51	9604.18
■		■	■	7929.95		■			1866.90	9796.86
	■	■	■	7640.95	■				2209.20	9850.15
■	■			3734.66			■	■	5982.36	9717.03
■		■		4954.60		■		■	4834.74	9789.35
	■	■		4667.95	■			■	5166.17	9834.12

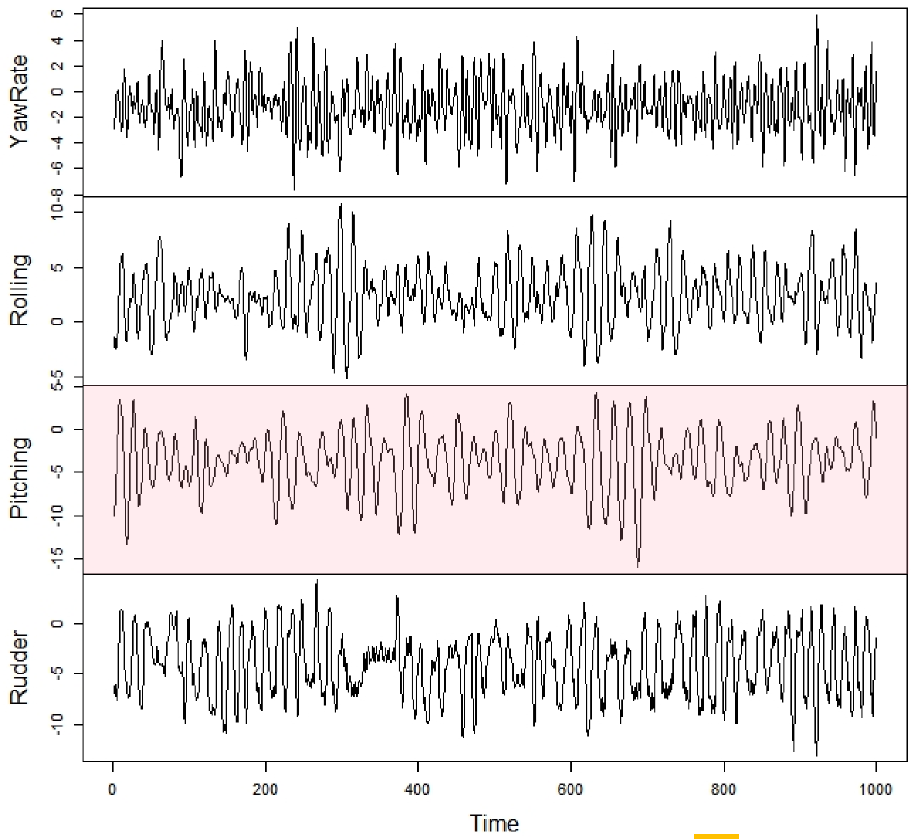
テストデータ（3ch: 白色雑音）

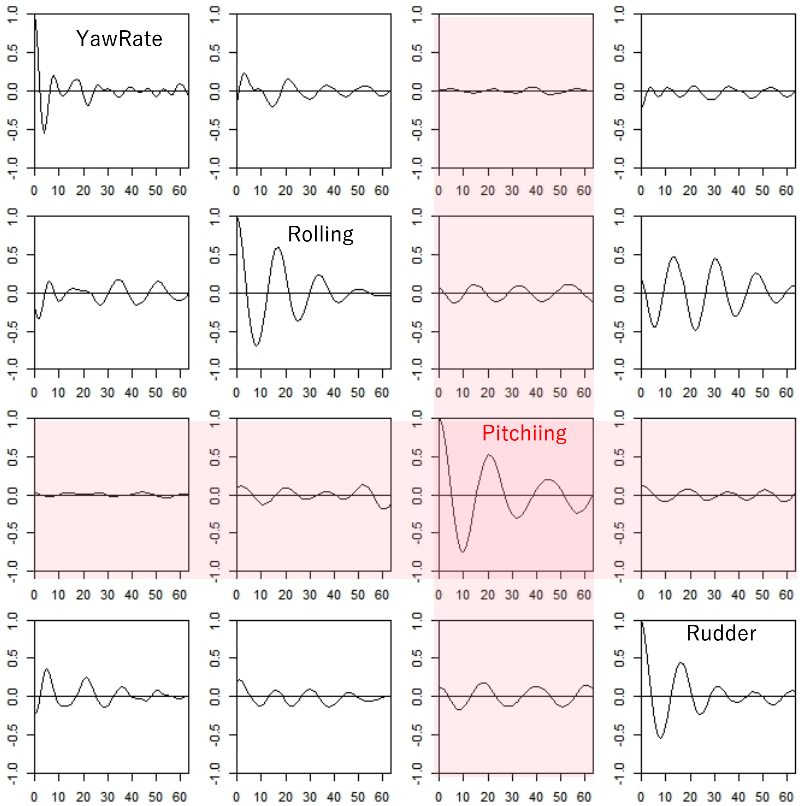




Y	R	W	Ru	AIC1					AIC2	AIC
■	■	■	■	9533.72						9533.72
■	■	■		6608.60				■	3085.15	9693.75
■	■		■	6658.67			■		2821.46	9480.13
■		■	■	8032.19		■			1866.90	9899.09
	■	■	■	7715.43	■				2209.20	9924.63
■	■			3734.66			■	■	5928.63	9663.29
■		■		5066.87		■		■	4834.74	9901.61
	■	■		4734.23	■			■	5166.17	9900.40

テストデータ（Pitchingを入れ替え）





Y	R	P	Ru	AIC1					AIC2	AIC
■	■	■	■	7777.53						7777.53
■	■	■		4848.33				■	3085.15	7933.48
■	■		■	6658.67			■		1112.85	7771.52
■		■	■	6301.14		■			1866.90	8168.04
	■	■	■	5971.24	■				2209.20	8180.44
■	■			3734.66			■	■	4213.76	7948.43
■		■		3337.37		■		■	4834.74	8172.11
	■	■		2979.00	■			■	5166.17	8145.17