

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅶ 2019 北川源四郎

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



時系列解析 (11)

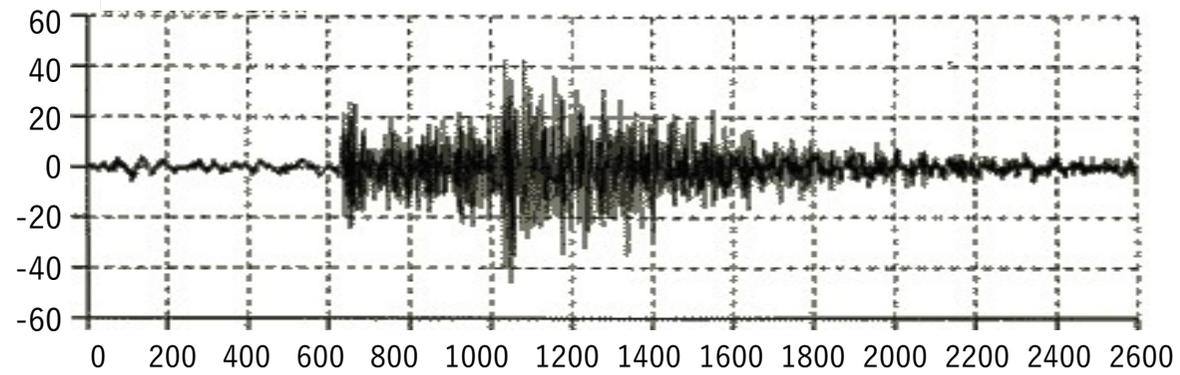
ー ボラティリティ、時変係数ARモデルー

東京大学 数理・情報教育研究センター
北川 源四郎

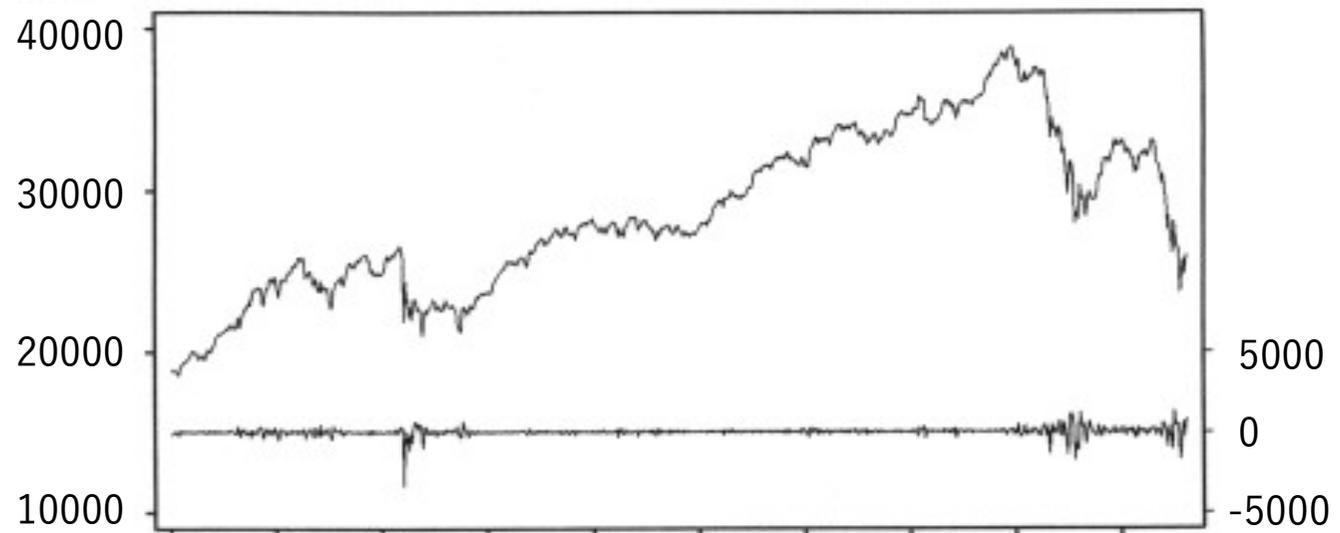
1. 分散非定常モデル
2. 共分散非定常モデル
3. 非線形・非ガウス型状態空間モデル

分散・共分散非定常

地震波



日経225



非定常時系列のモデル

1. 平均非定常トレンド, 季節調整

2. 分散非定常

- 線形・ガウスモデル（カルマンフィルタ）で推定するためには、近似が必要（線形化＋正規近似）
- 非線形・非ガウス型状態空間モデルを使うと直接的なモデリングが可能

3. 共分散非定常

- 時変係数モデル

(線形モデルによる) 時変分散の推定

$$r_n = \sigma_n w_n, \quad w_n \sim N(0,1)$$

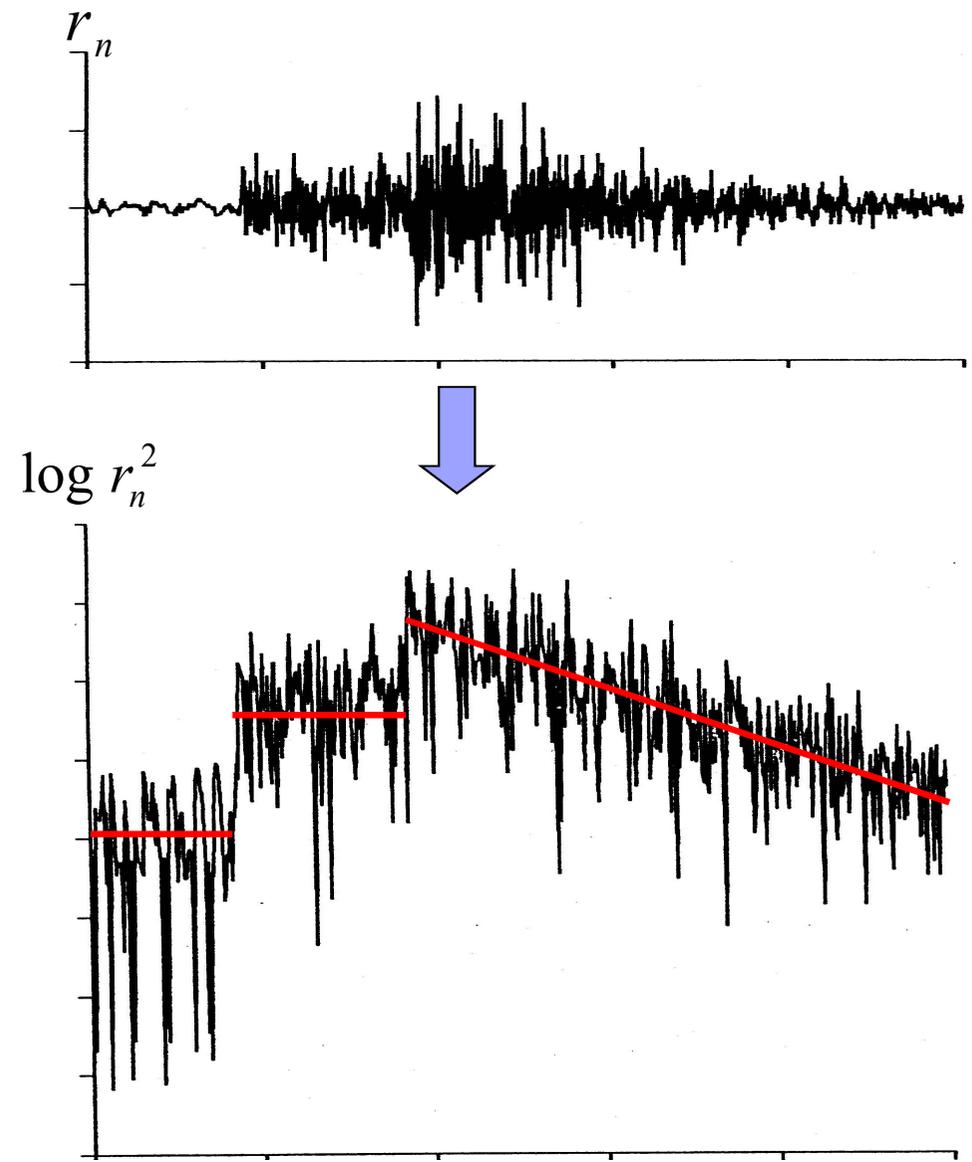
二乗

$$r_n^2 = \sigma_n^2 w_n^2$$

対数

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

- 変換により積型モデルから加法型モデルに変換される
- 分散変動の推定問題は **トレンド推定の問題に変換される**



(線形モデルによる) 時変分散の推定

分散変化のモデル (例)

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

$$\log \sigma_n^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

ランダムウォーク型

(定数付き) AR型

時変分散のモデル (例)

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

状態空間表現

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

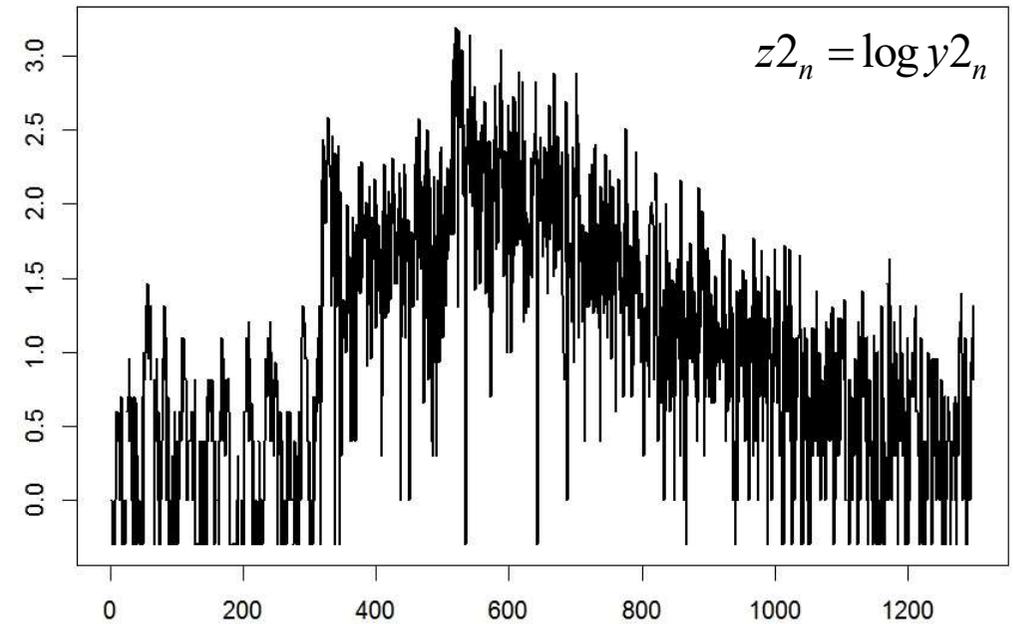
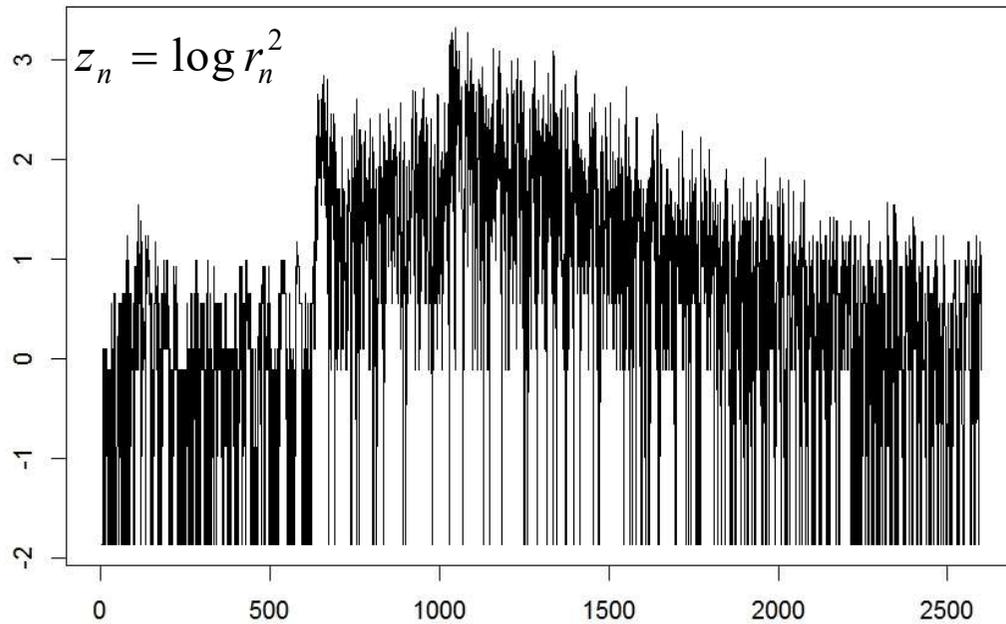
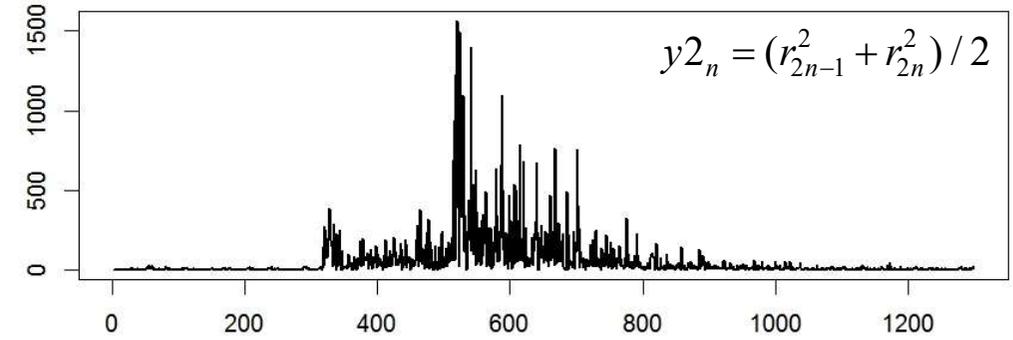
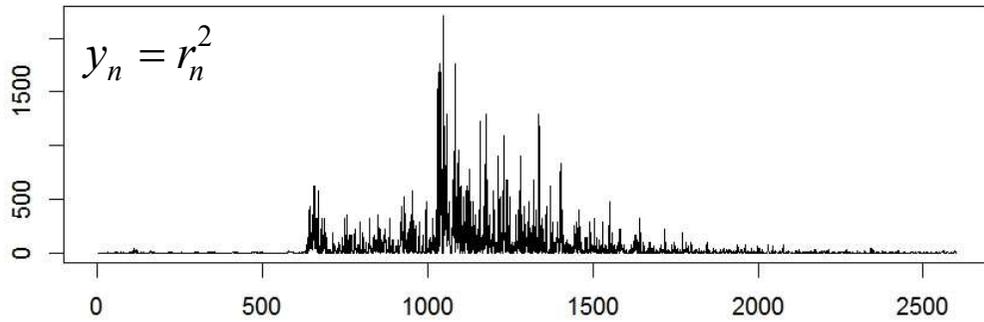
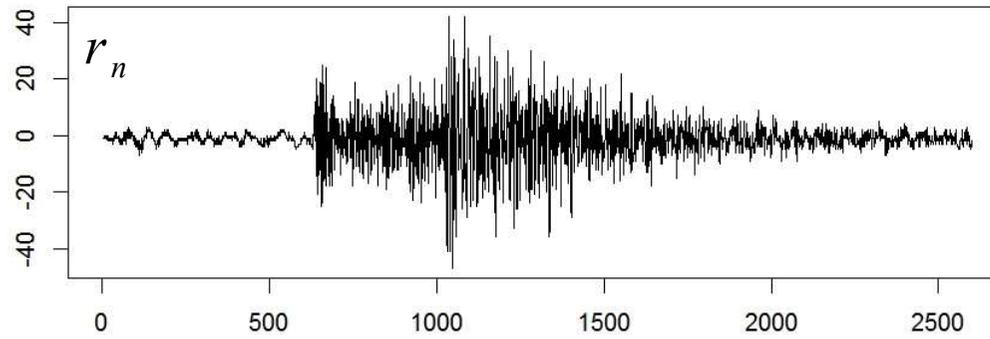
$x_n \equiv \log \sigma_n^2$, $y_n \equiv \log r_n^2$, $\delta_n \equiv \log w_n^2$ とおくと

$$x_n = x_{n-1} + \varepsilon_n$$

$$y_n = x_n + \delta_n$$

- 状態空間表現（トレンドモデル）
- δ_n は正規分布には従わない
 - ✓ 正規近似 \longrightarrow カルマンフィルタ
 - ✓ 非正規分布 \longrightarrow 非ガウス型フィルタ（次回）

二種類のデータ変換



$\log w_n^2$ の分布：二重指数分布

$$y_n \sim N(0, 1)$$

$$x_1 = y_1^2 \sim \chi_1^2 \quad (\text{カイ二乗分布})$$

$$g(x) = (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

$$x = h(y) = y^2$$

$$y \begin{matrix} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{h^{-1}} \end{matrix} x$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$$

$$x = h(y) = y^2 \Rightarrow h^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dh^{-1}}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \left| \frac{dh^{-1}}{dx} \right| f(h^{-1}(x)) = 2 \times \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} \\ &= (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} \quad (\text{カイ二乗分布}) \end{aligned}$$

$$w_1 = \log x_1$$

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{w - e^w}{2}\right\}$$

(二重指数分布)

$$\begin{aligned} p(w) &= \left| \frac{d \log^{-1}}{dw} \right| g(h_w^{-1}(w)) \\ &= \left| \frac{de^w}{dw} \right| (2\pi e^w)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{e^w}{2}\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{w}{2} - \frac{e^w}{2}\right\} \end{aligned}$$

二重指数分布 (Gumbel分布)

$$y_n \sim N(0, 1)$$

$$s_2 = (y_1^2 + y_2^2) / 2 \sim \frac{1}{2} \chi_2^2 \quad (\text{自由度 } 2 \text{ の } \chi^2 \text{ 分布} = \text{指数分布})$$

$$g(s) = \exp\{-s\}$$

$$w_2 = \log s_2$$

$$\begin{aligned} p(w) &= \left| \frac{de^w}{dw} \right| g(h^{-1}(w)) \\ &= e^w \exp\{-e^w\} \\ &= \exp\{w - e^w\} \end{aligned}$$

$$w = h(s) = \log s$$

$$s \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{h^{-1}} \end{array} w$$

$$h^{-1}(w) = e^w$$

$$p(w) = \exp\{w - e^w\} : \quad \text{二重指数分布}$$

注： $p(-w)$ はGumbel分布

二重指数分布の正規分布による近似

$$\log w_n^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{w}{2} - \frac{e^w}{2} \right\} \Rightarrow N(\zeta, \pi^2 / 2), \quad \zeta = -1.27036$$

$$\log w_n^2 \sim \exp \{ w - e^w \} \Rightarrow N(\gamma, \pi^2 / 6), \quad \gamma = -0.577216$$

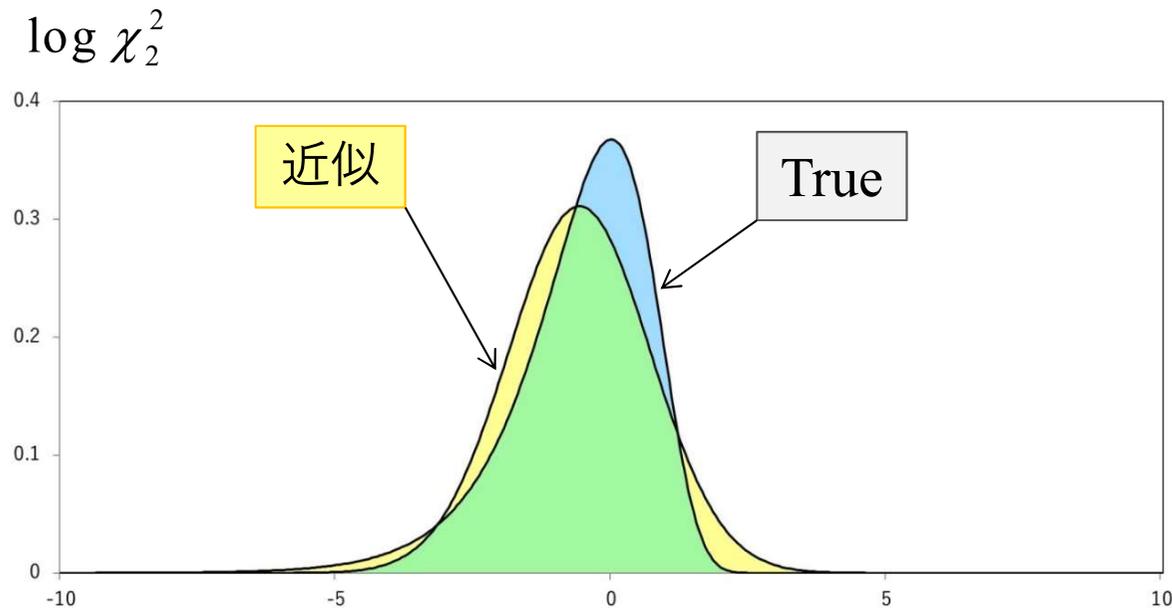
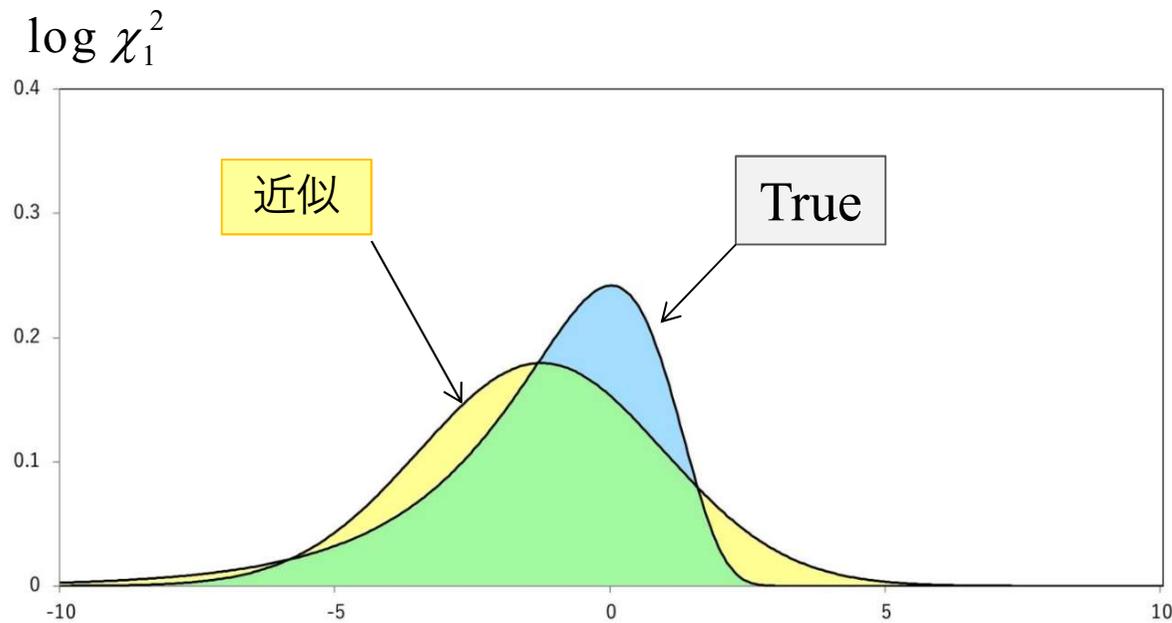
γ Euler定数

-1.27036 4.934802
-0.577216 1.644934
-0.270363 0.644934

log-ピリオドグラムの平滑化
Wahba (1980)

時変分散・ボラティリティ
Kitagawa & Gersch (1985)
Nelson (1988),
Harvey, Ruiz, Shepard (1994)

二重指数分布と正規近似



$$\log(y_n^2)$$

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{w - e^w}{2}\right\}$$

$\int g(w) - \varphi(w) dx$	
χ_1^2 型	0.38339
χ_2^2 型	0.27396

$$\log(y_{2m-1}^2 + y_{2m}^2)$$

$$g(w) = \exp\{w - e^w\}$$

- 正規近似が良くなる
- 分散が1/3
- データ数が1/2

分散変動(時変分散)モデル

$$\Delta^k t_m = v_m \quad (k=1, 2, 3)$$

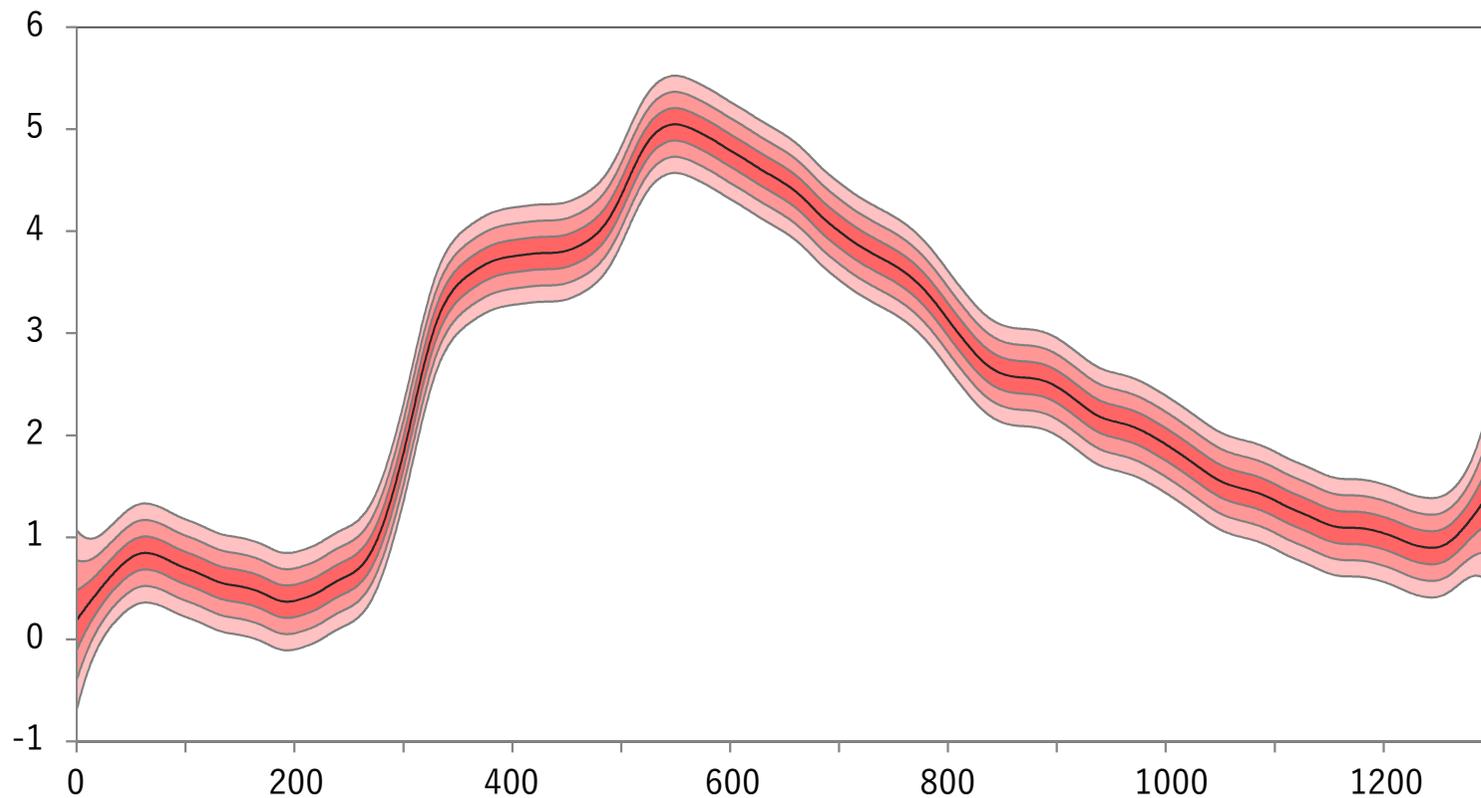
$$z_m = t_m + w_m$$

$$h(w) = \exp\{w - e^w\} \sim N\left(-\gamma, \frac{\pi^2}{6}\right) \quad \chi_2^2\text{-型}$$

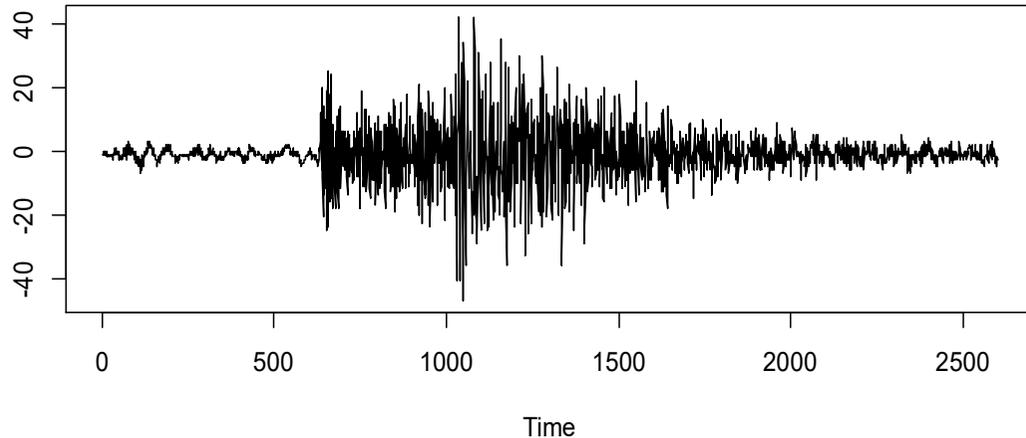
$$h(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{1}{2}(w - e^w)\right\} \sim N\left(-\zeta, \frac{\pi^2}{2}\right) \quad \chi_1^2\text{-型}$$

時変分散の推定： MYE 1 F

χ_2^2 -型, トレンド次数=2
 $\tau^2 = 6.6 \times 10^{-6}$, $\sigma^2 = 9.71 \times 10^{-1}$
log-likelihood = -2195.731
AIC=4399.46



Rによる時変分散の推定

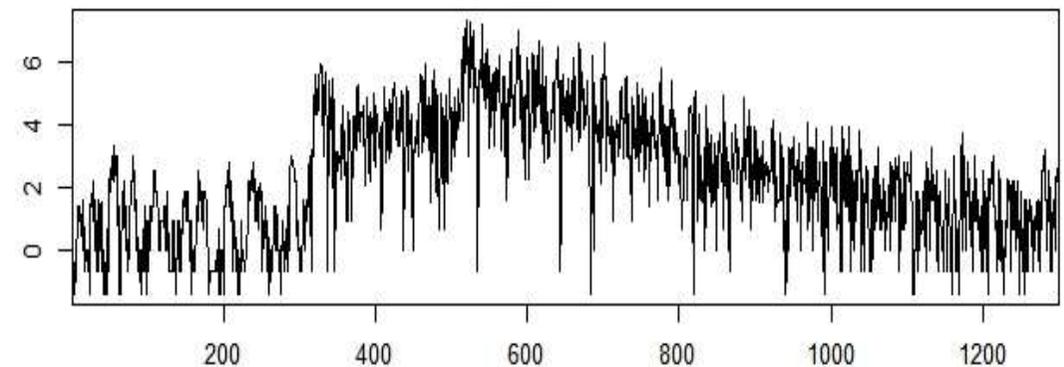


```
# an earthquake wave data
data(MYE1F)
#
tvvar(MYE1F, 2, 6.6e-06, 1.0e-06)
```

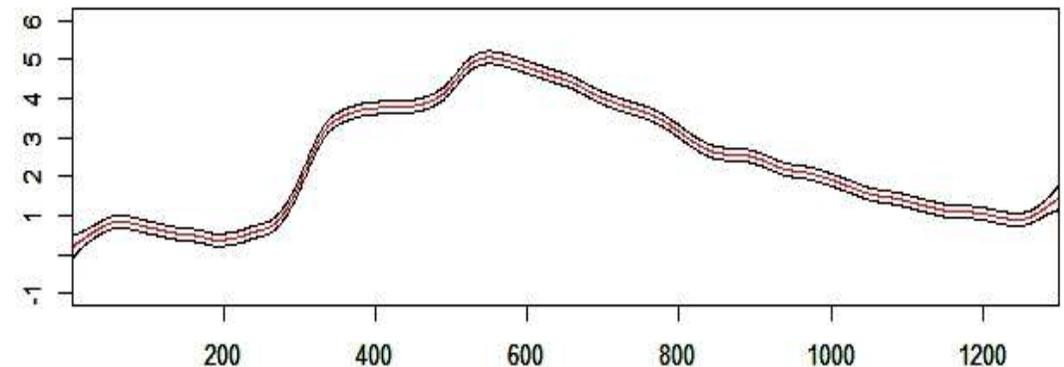
```
tau2      6.60000e-06
sigma2    9.71228e-01
log-likelihood -2195.731
aic       4399.462
```

元のデータを推定した時変分散
の平方根でわると等分散化した
時系列が得られる

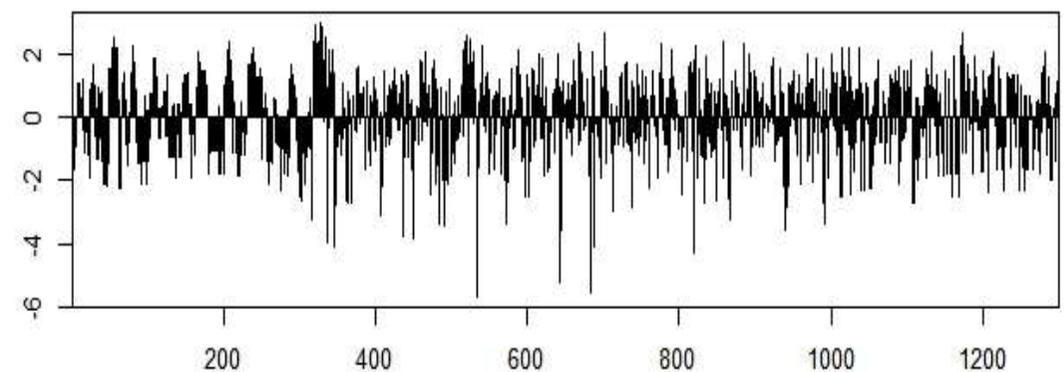
変換したデータ MYE1F



時変分散



残差



AR型の分散変動モデル

ランダムウォークモデル

$$\log \sigma_n^2 = \log \sigma_{n-1}^2 + v_n$$

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

AR 型モデル

$$\log \sigma_n^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

時変スペクトル



時変係数 AR モデル

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_{jn} y_{n-j} + w_n, \quad w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

時変係数回帰モデル

時変係数AR モデルの推定

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_{jn} y_{n-j} + w_n, \quad a_{nj} \text{ は時間とともに変動}$$

係数変化のモデル (成分モデル)

係数は mn 個

$$\Delta^k a_{jn} = v_{jn}, \quad v_{jn} \sim N(0, \tau^2) \quad (j=1, \dots, m)$$

状態空間表現

$$\begin{aligned} x_n &= Fx_{n-1} + Gv_n & v_n &\sim N(0, Q) \\ y_n &= H_n x_n + w_n & w_n &\sim N(0, R) \end{aligned}$$

x_n, F, G, H_n, Q, R を定める

時変係数ARモデル

$$F^{(1)} = G^{(1)} = H^{(1)} = 1$$

$$F^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = F^{(k)} \otimes I_m, \quad G = G^{(k)} \otimes I_m$$

$$H_n = H^{(k)} \otimes (y_{n-1}, \dots, y_{n-m})$$

$$Q = \tau^2 \otimes I_m, \quad R = \sigma^2$$

$$x_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})^T \otimes (I, B, \dots, B^{k-1})^T$$

⊗ Kronecker 積

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m\ell} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1\ell}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{m\ell}B \end{bmatrix}$$

$$F^{(1)} \otimes I_m = I_m, \quad F^{(2)} \otimes I_m = \begin{bmatrix} 2I_m & -I_m \\ I_m & O \end{bmatrix}$$

状態空間表現 ($k = 1$ の場合)

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{m,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ \vdots \\ v_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$y_n = [y_{n-1}, \dots, y_{n-m}] \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} + w_n$$

$$Q = \begin{bmatrix} \tau^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau^2 \end{bmatrix}, \quad R = \sigma^2$$

- H_n に時系列の過去の値が入っている

状態空間表現 ($k=2$ の場合)

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \\ \hline a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{mn-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & -1 & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & 2 & & -1 & \\ \hline 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{mn-1} \\ \hline a_{1n-2} \\ \vdots \\ a_{mn-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ \vdots \\ v_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$y_n = [y_{n-1}, \dots, y_{n-m}, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \\ \hline a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{mn-1} \end{bmatrix} + w_n \quad Q = \begin{bmatrix} \tau^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & \tau^2 \end{bmatrix}, \quad R = \sigma^2$$

システムノイズの等分散仮定について

$Q = \text{diag}\{\tau^2, \dots, \tau^2\}$: の仮定は妥当か？

$$A(f, n) = 1 - \sum_{j=1}^m a_{nj} e^{-2\pi i j f}, \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

AR係数のフーリエ変換

$$p_n(f) = \frac{\sigma^2}{|A(f, n)|^2}$$

ARモデルを白色化フィルタと
考えたときの周波数応答関数

$A(f, n)$ の時間変化の滑らかさに関する評価

$$\Delta^k A(f, n) = \sum_{j=1}^m \Delta^k a_{nj} e^{-2\pi i j f}$$

周波数領域 $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ で二乗積分

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\Delta^k A(f, n)|^2 df = \sum_{j=1}^m (\Delta^k a_{nj})^2$$

各次数を同じ割合で加算しているので

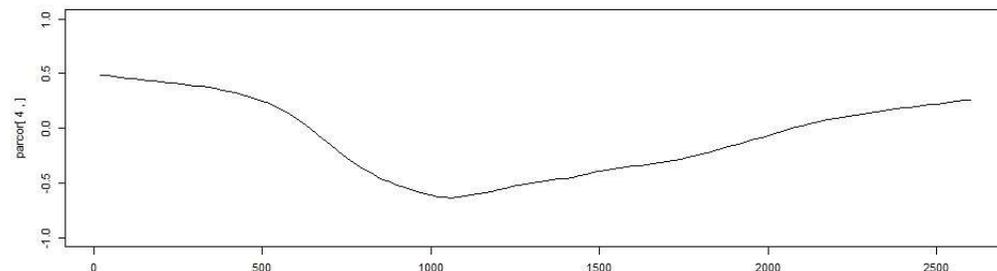
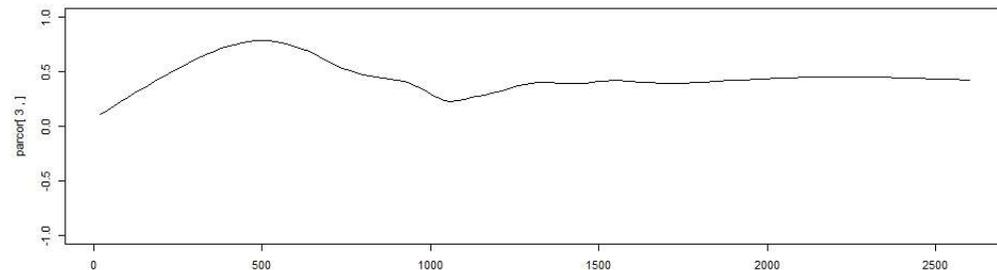
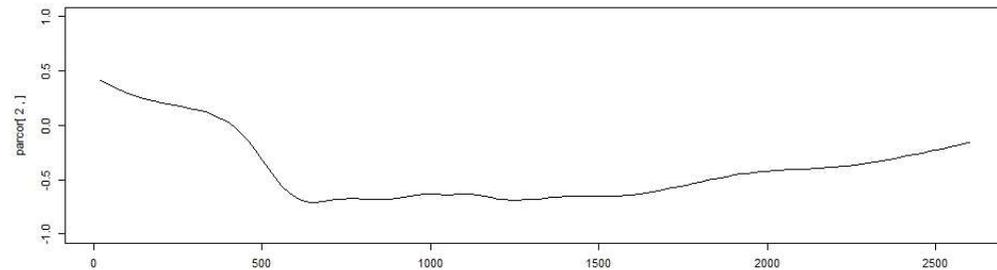
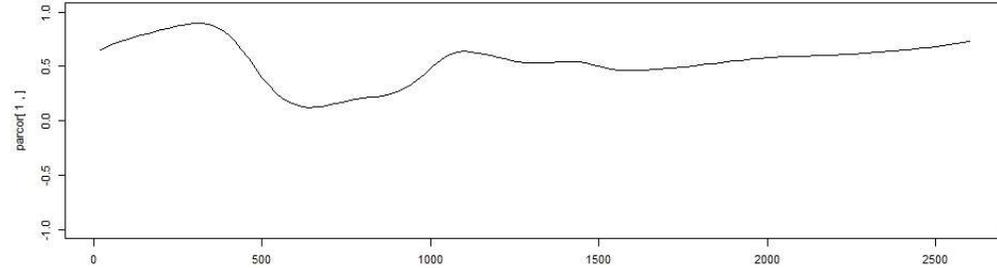
$$\Delta_n^k a_{nj} = v_{nj}, \quad v_{nj} \sim N(0, \tau^2)$$

Rによる時変係数ARモデルの推定

```
data(MYE1F) # an earthquake wave data  
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8,  
span = 20, tau2.ini = 6.6e-06, delta = 1.0e-06)
```

z

```
tau2      1.60000e-06  
sigma2    1.43071e+01  
log-likelihood -7284.520  
aic       14589.041
```



時変係数 AR モデル

$$y_n = \sum_{j=1}^m a_{jn} y_{n-j} + w_n, \quad w_n \sim N(0, \sigma_n^2)$$

時変スペクトル

$$p_n(f) = \frac{\sigma_n^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^m a_{jn} e^{-2\pi i j f} \right|^2}$$

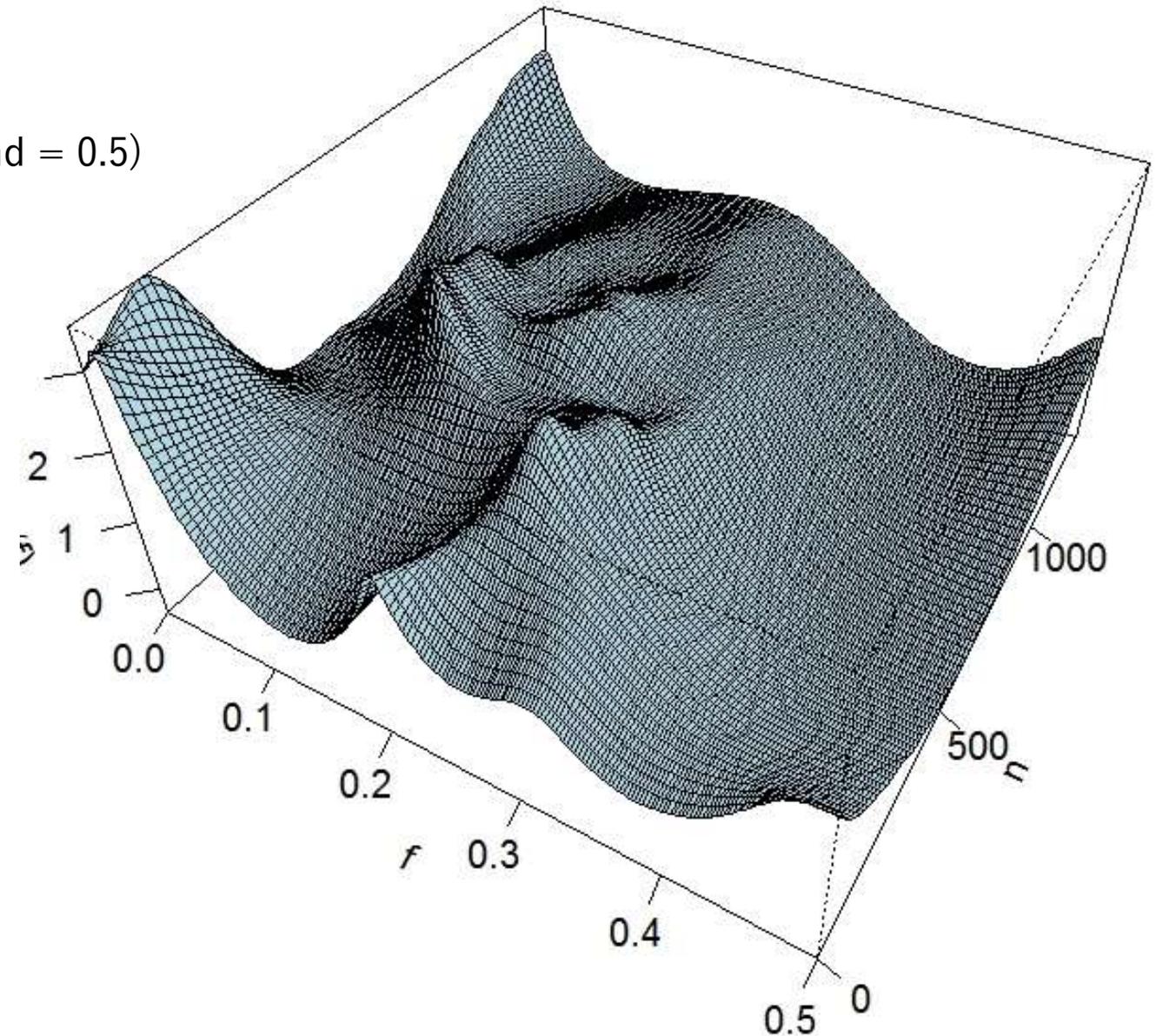
Rによる時変スペクトルの計算

```
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8,  
span = 20, tau2.ini = 6.6e-06, delta = 1.0e-06)
```

```
# 時変スペクトル
```

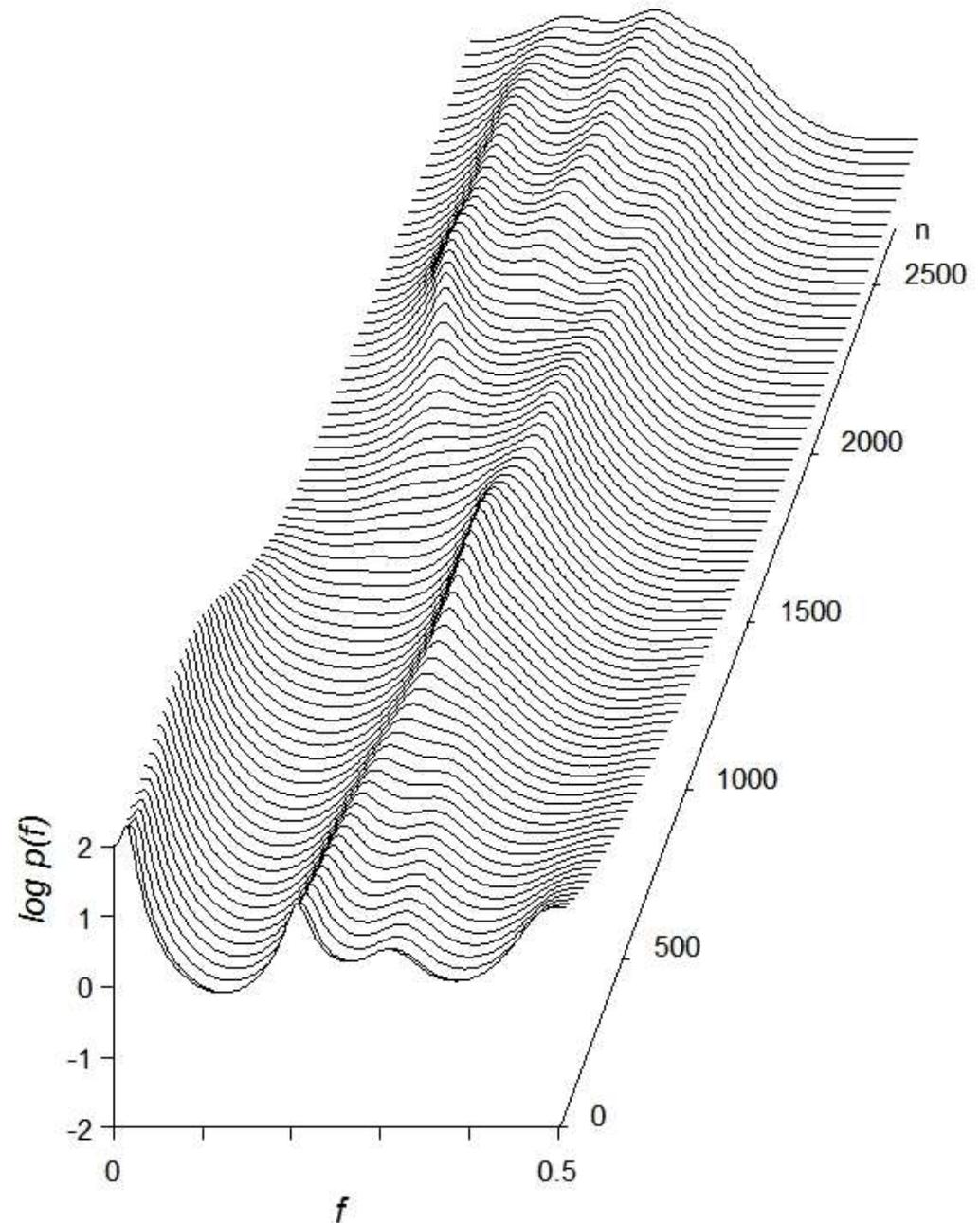
```
spec <- tvspsc(z$arcoef, z$sigma2)
```

```
plot(spec, theta = 30, phi = 40, expand = 0.5)
```



本と同様の3次元プロット (Rは未公開)

```
#####  
# 時変スペクトルの3次元表示  
#####  
# seismic data  
data(MYE1F)  
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8, span =  
20, outlier = c(630, 1026), tau2.ini = 6.6e-06, delta =  
1.0e-06)  
spec <- tvspc(z$arcoef, z$sigma2)  
#####  
  
# 最初のスペクトル(n=0)  
nf <- 201  
dt <- 2  
dy <- 0.2  
nf1 <- nf-dt  
t <- 1:nf  
tt <- 1:nf1  
plot(t,spec$z[,1],type="l", xlim=c(1,501),ylim=c(-2,18))  
y <- spec$z[,1] z  
<- y  
  
# 鳥瞰図(n=1,80)  
nrep <- 1:80  
for (i in nrep){  
  par(new=T)  
  t <- t+dt  
  for (j in 1:nf) z[j] <- spec$z[j,i]+dy*(i-1)  
  for (j in tt){  
    # z[j] <- max(spec$z[j,i]+dy*(i-1),y[j+dt])  
    z[j] <- max(z[j],y[j+dt])  
  }  
  y <- z  
  plot(t,y,type="l", xlim=c(1,501),ylim=c(-  
2,18),xaxt='n',yaxt="n")
```



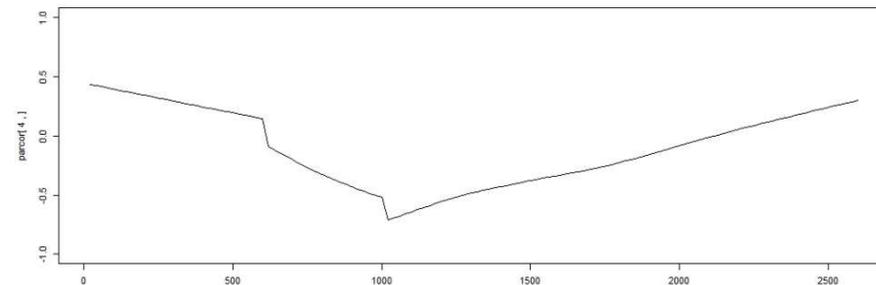
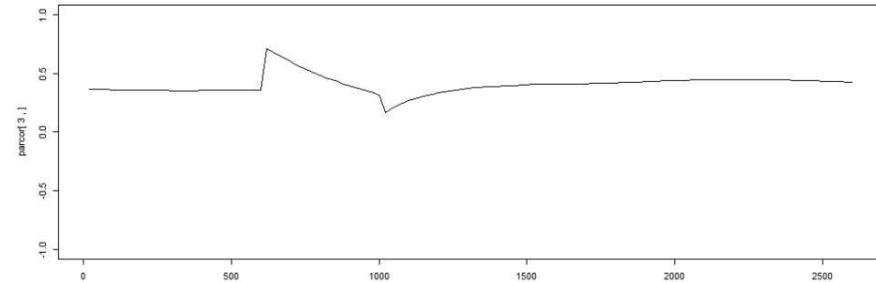
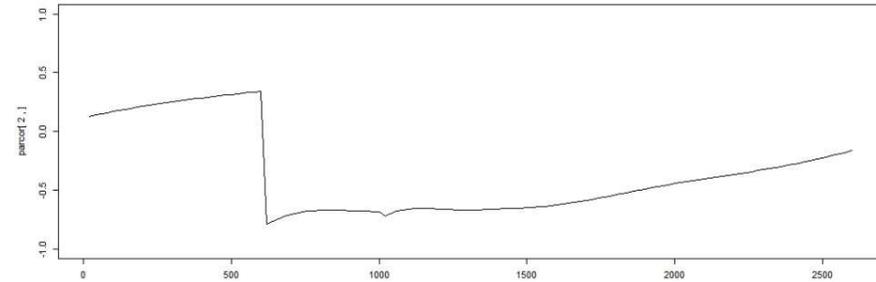
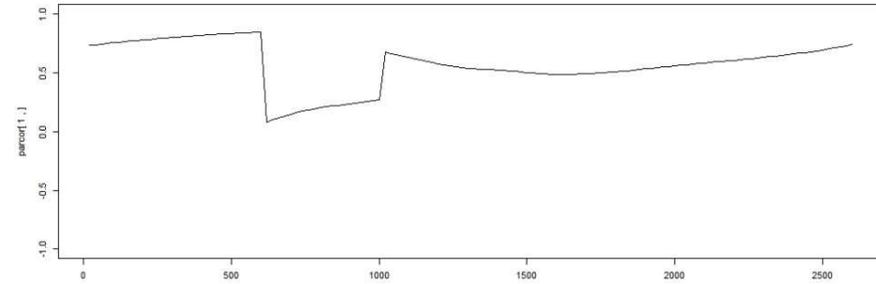
係数の急激な変化について

- トрендモデルによる変化はゆっくりした変化を仮定している
- 地震波などでは突然別のモデルに変化することがある。
- 対応 1
 - 変化点既知の場合
 - $k=1$ の場合： その時点で τ^2 を大きくすればよい
 - $k=2$ の場合： それだけでは屈折点となる
 - $x_{n|n-1}$ と $V_{n|n-1}$ を初期化するか $V_{n|n-1}$ の対角成分に大きな値を入れる
- 対応 2： 非ガウス型モデルを利用する（変化点未知でよい）

Rによる時変係数ARモデルの推定（構造変化を仮定）

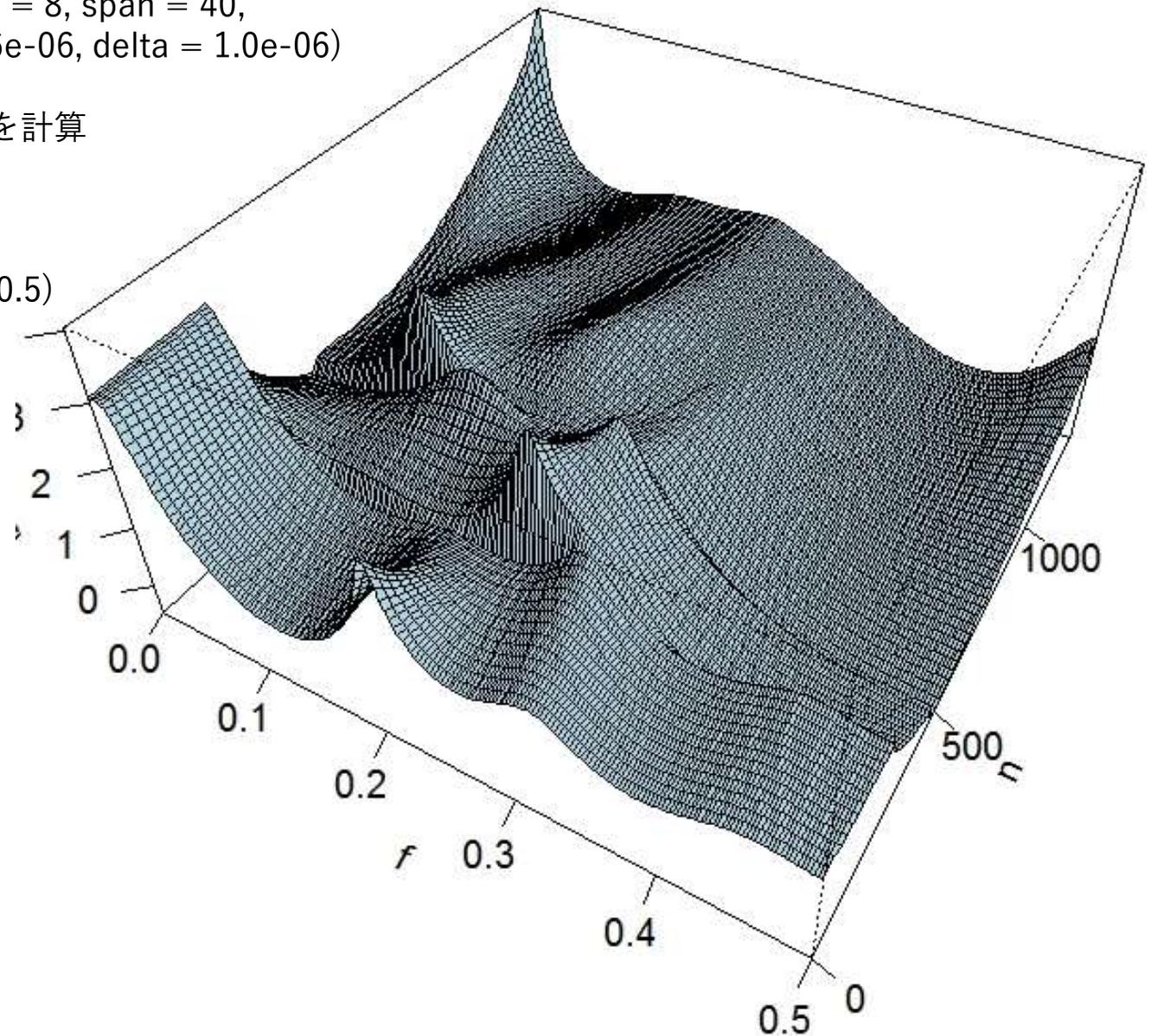
```
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8,  
span = 40, outlier = c(630, 1026), tau2.ini = 6.6e-06,  
delta = 1.0e-06)
```

構造変化の時点



Rによる時変スペクトルの推定（構造変化を仮定）

```
# n=630と1026の2か所で構造変化があったと仮定
#
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8, span = 40,
          outlier = c(630, 1026), tau2.ini = 6.6e-06, delta = 1.0e-06)
#
# 時変係数ARモデルから時変スペクトルを計算
# 時変スペクトルを3次元表示
#
spec <- tvspc(z$arcoef, z$sigma2)
plot(spec, theta = 30, phi = 40, expand = 0.5)
```

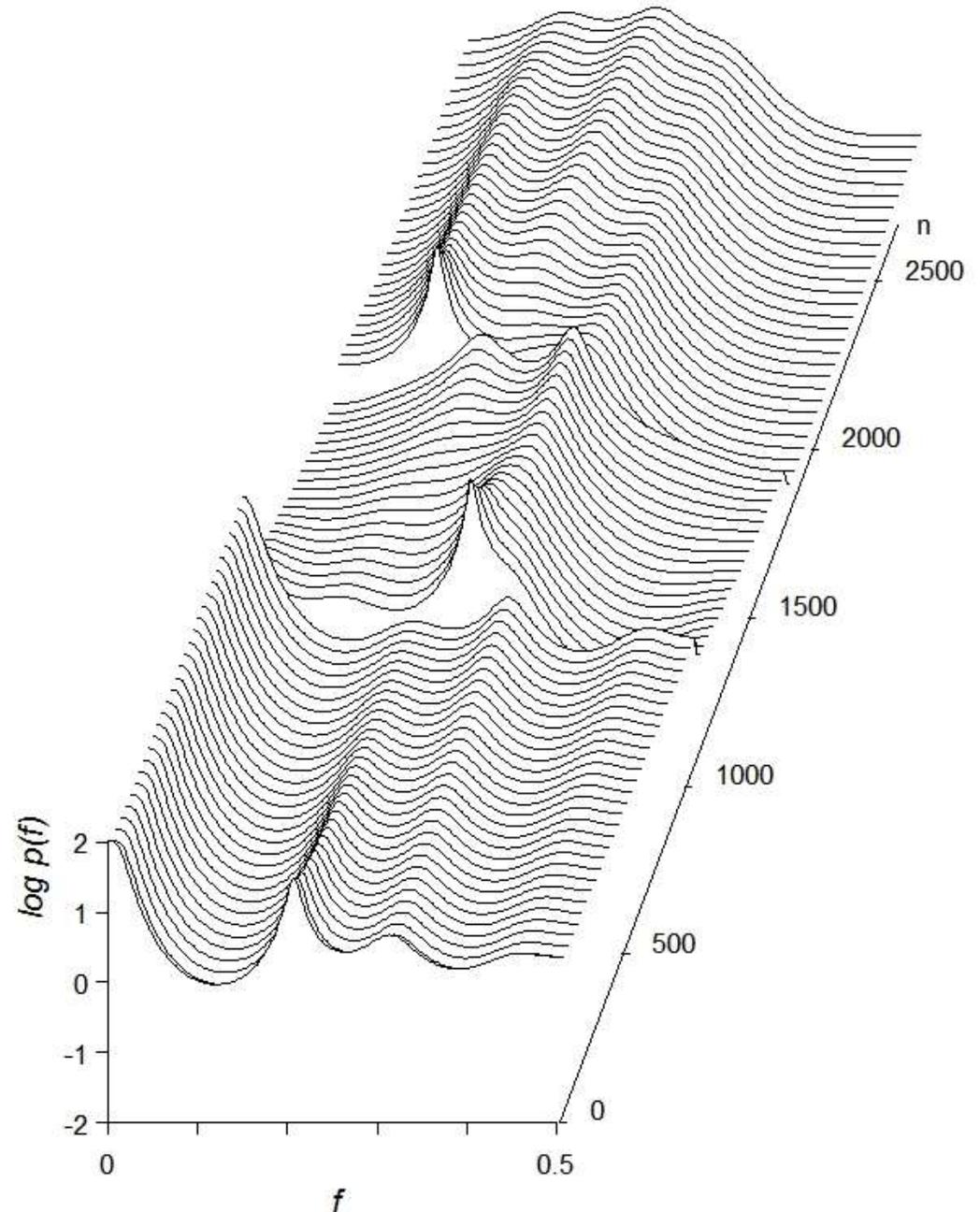


本と同様の3次元プロット (Rは未公開)

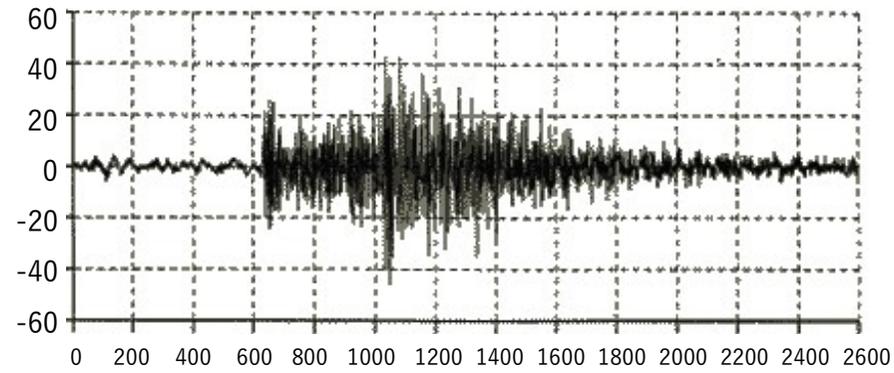
```
#####  
# 時変スペクトルの3次元表示  
#####  
# seismic data  
data(MYE1F)  
z <- tvar(MYE1F, trend.order = 2, ar.order = 8, span =  
20, outlier = c(630, 1026), tau2.ini = 6.6e-06, delta =  
1.0e-06)  
spec <- tvspec(z$arcoef, z$sigma2)  
#####
```

plot.spec(spec)

plot.specのコードはHPに記載

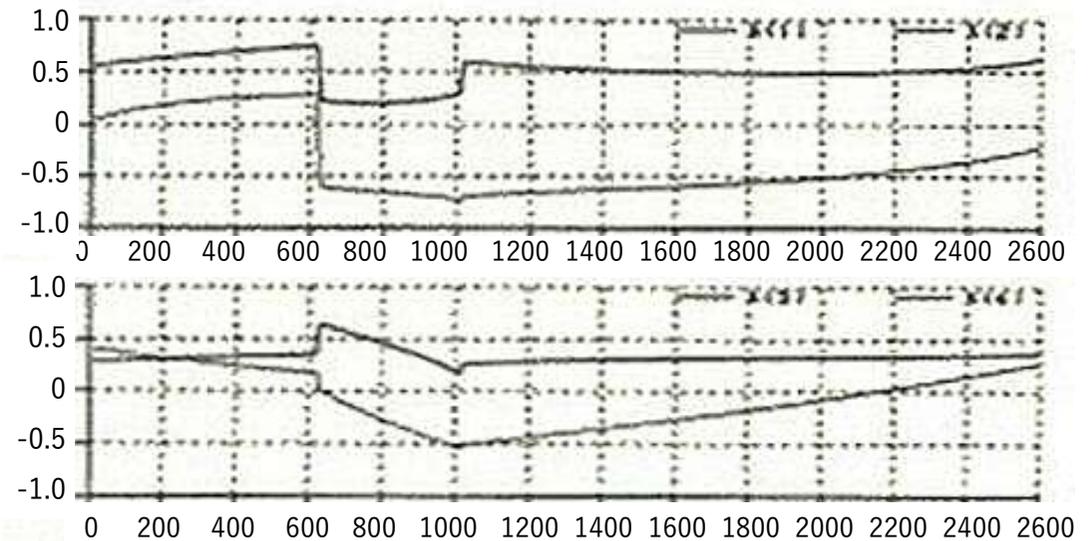
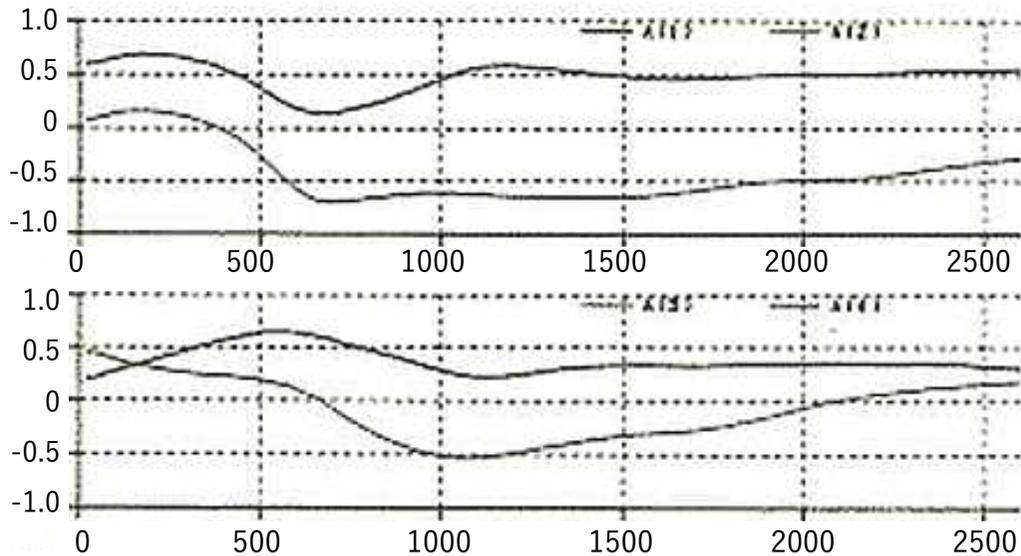


時変係数と時変スペクトル

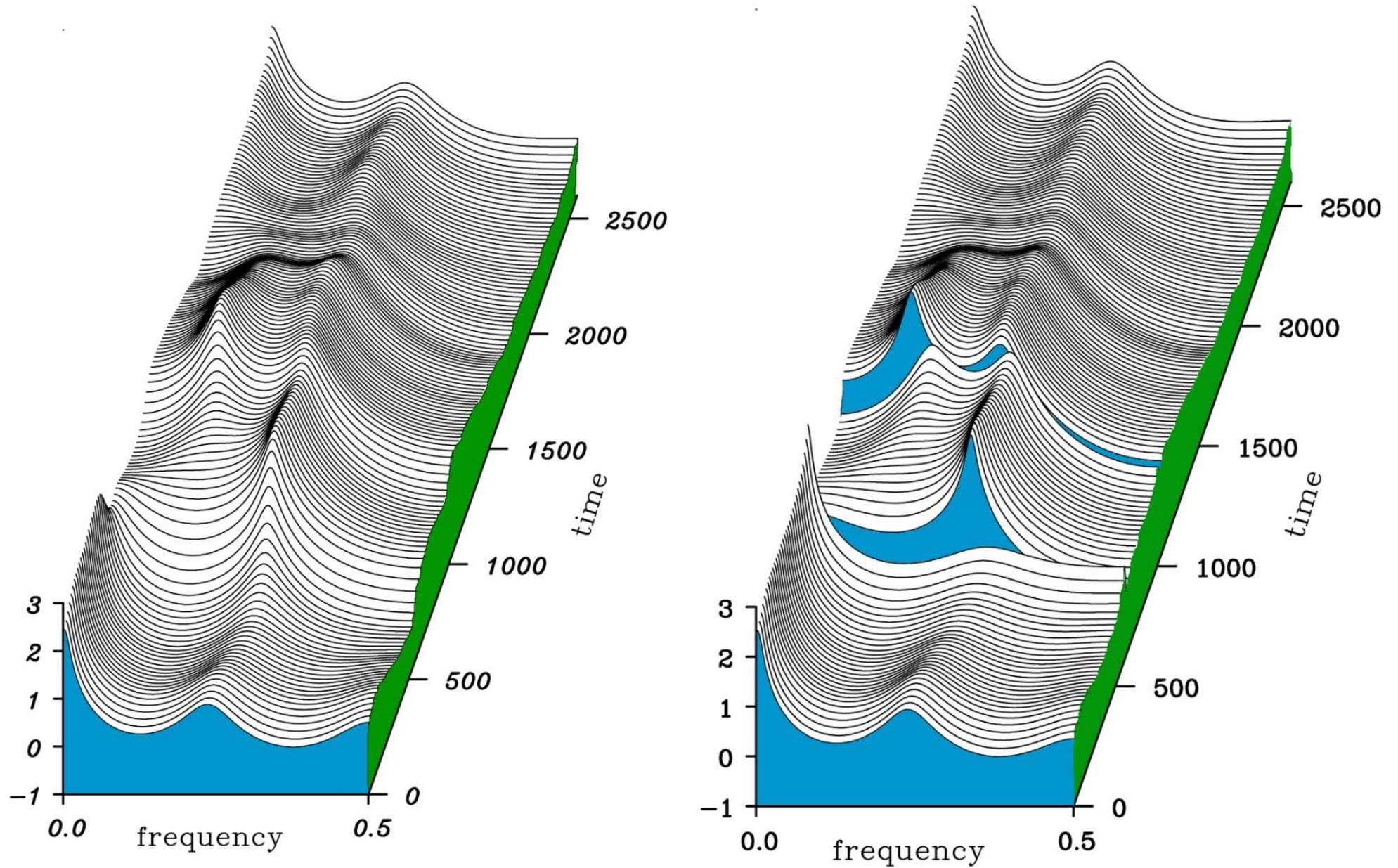


局所定常構造
時変PARCOR

時変PARCOR



時変スペクトル



スペクトルの滑らかさの制約

$$R_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^2 A(f, n)}{\partial f^2} \right|^2 df = (2\pi)^4 \sum_{j=1}^m j^4 a_{nj}^2$$

$$R_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |A(f, n)|^2 df = 1 + \sum_{j=1}^m a_{nj}^2$$

$$R = \lambda_0^2 \sum_{j=1}^m a_{nj}^2 + \lambda_2^2 \sum_{j=1}^m j^4 a_{nj}^2 = \sum_{j=1}^m (\lambda_0^2 + j^4 \lambda_2^2) a_{nj}^2 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,n-1} \\ \vdots \\ a_{m,n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_{n-m} \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_n \\ u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_n \\ u_{1n} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (\lambda_0^2 + \lambda_2^2)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_0^2 + m^4 \lambda_2^2)^{-1} \end{bmatrix} \right)$$

概要

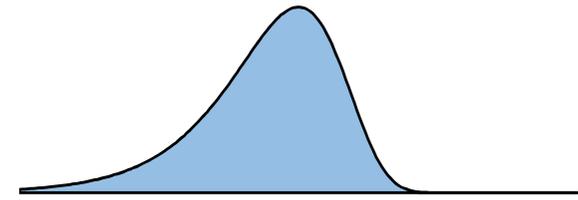
- 非線形・非ガウス型状態空間モデル
- 非線形・非ガウス型フィルタ
 - 状態推定公式
 - 拡張カルマンフィルタ
 - 非ガウス型フィルタ
 - ガウス和フィルタ
 - 粒子フィルタ
 - アンサンブルカルマンフィルタ

非ガウス型モデリングの必要性

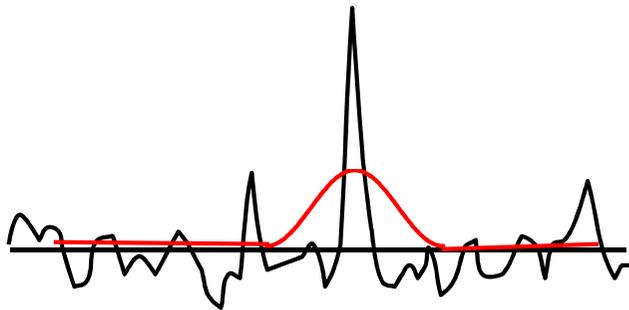
構造変化



非対称分布



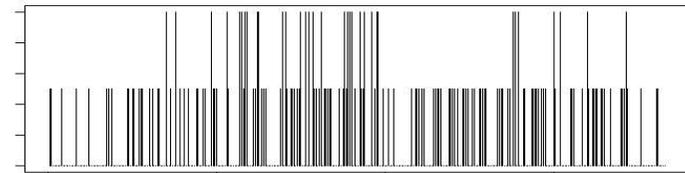
異常値 (外れ値)



非線形性

$$x_n = f(x_{n-1}) + v_n$$

離散過程



状態空間モデルの拡張

線形・ガウス型

$$x_n = Fx_{n-1} + Gv_n$$

$$y_n = Hx_n + w_n$$

非線形・非ガウス型

$$x_n = f(x_{n-1}, v_n)$$

$$y_n = h(x_n, w_n)$$

関数：非線形
分布：非ガウス型

$$x_n = f(x_{n-1}, v_n)$$

$$y_n = h(x_n) + w_n$$

x_n : 状態

y_n : 時系列

v_n : システムノイズ

$$v_n \sim q(v)$$

w_n : 観測ノイズ

$$w_n \sim r(w)$$

$$y_n = h(x_n, w_n)$$

ただし, $h(x, w)$ の逆関数 $g(y, x)$ が存在して

- $w_n = g(y_n, x_n)$
- y で微分可能 ($\partial g / \partial y$ が存在)

$$\text{(例)} \quad y_n = e^{x_n} w_n$$

$$w_n = e^{-x_n} y_n \equiv g(y_n, x_n)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{-x_n}$$

- ボラティリティのモデリングなどで有用

非線形・非ガウス型状態空間モデル

非線形関数の例

$$x_n = f(x_{n-1}, v_n)$$

$$y_n = h(x_n, w_n)$$

$f(x)$ 非線形変換

$f(x, v)$ 積型

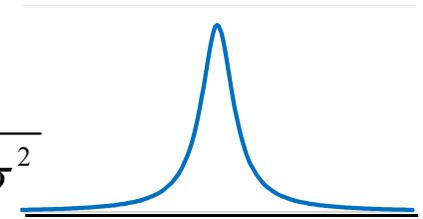
$h(x, w)$ 積型 (e^{xw} など)

- $y=h(x, w)$ から $w=k(y, x)$ と書ける必要がある。
- $h(x)+w$ の方が簡単

非ガウス型分布の例

- コーシー分布

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{(x - \mu)^2 + \sigma^2}$$



- ピアソン分布族

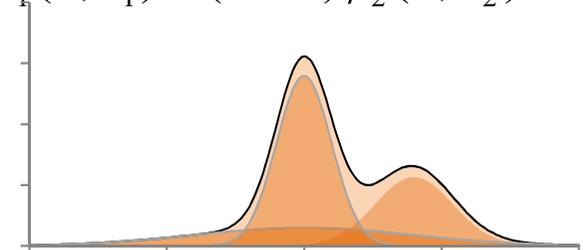
$$p(x) = C \left((x - \mu)^2 + \sigma^2 \right)^{-b}$$

$$C = \frac{\tau^{2b-1} \Gamma(b)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(b - \frac{1}{2})}$$

- 二重指数分布

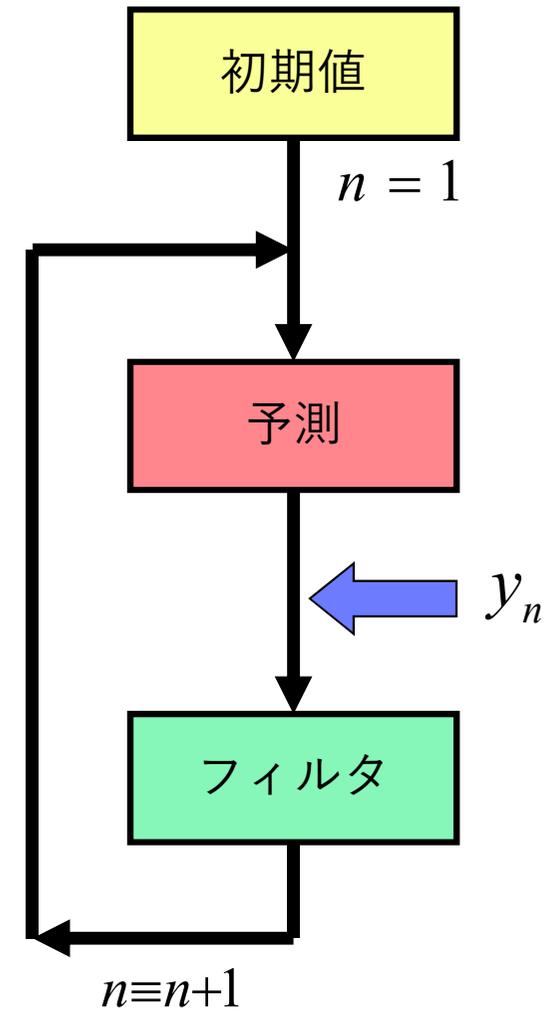
- 混合分布

$$p(x) = \alpha \varphi_1(x, \theta_1) + (1 - \alpha) \varphi_2(x, \theta_2)$$



状態推定

	カルマンフィルタ	非線形
予測	$x_{n n-1}, V_{n n-1}$	$p(x_n Y_{n-1})$
フィルタ	$x_{n n}, V_{n n}$	$p(x_n Y_n)$



非ガウス型予測の導出

$$p(x_n | Y_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n, x_{n-1} | Y_{n-1}) dx_{n-1}$$

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$$

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n-1} | Y_{n-1}) &= p(x_n | x_{n-1}, Y_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) \\ &= p(x_n | x_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) \end{aligned}$$

$$p(x, y) = p(x | y) p(y)$$

$$p(x_n | x_{n-1}, Y_{n-1}) = p(x_n | x_{n-1})$$

$$p(x_n | Y_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n | x_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) dx_{n-1}$$

非ガウス型フィルタの導出

$$\begin{aligned} p(x_n | Y_n) &= p(x_n | Y_{n-1}, y_n) \\ &= \frac{p(y_n, x_n | Y_{n-1})}{p(y_n | Y_{n-1})} \\ &= \frac{p(y_n | x_n, Y_{n-1}) p(x_n | Y_{n-1})}{p(y_n | Y_{n-1})} \\ &= \frac{p(y_n | x_n) p(x_n | Y_{n-1})}{p(y_n | Y_{n-1})} \end{aligned}$$

$$Y_n = \{y_1, \dots, y_n\} = \{Y_{n-1}, y_n\}$$

$$\begin{aligned} p(x | y) &= \frac{p(x, y)}{p(y)} \\ &= \frac{p(y | x) p(x)}{p(y)} \end{aligned}$$

$$p(y_n | x_n, Y_{n-1}) = p(y_n | x_n)$$

$$p(x_n | Y_n) = \frac{p(y_n | x_n) p(x_n | Y_{n-1})}{p(y_n | Y_{n-1})}$$

非ガウス型平滑化の導出

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1} | Y_N) &= p(x_{n+1} | Y_N) p(x_n | x_{n+1}, Y_N) \\ &= p(x_{n+1} | Y_N) p(x_n | x_{n+1}, Y_n) \\ &= p(x_{n+1} | Y_N) \frac{p(x_{n+1}, x_n | Y_n)}{p(x_{n+1} | Y_n)} \\ &= p(x_{n+1} | Y_N) \frac{p(x_{n+1} | x_n, Y_n) p(x_n | Y_n)}{p(x_{n+1} | Y_n)} \\ &= p(x_{n+1} | Y_N) \frac{p(x_{n+1} | x_n) p(x_n | Y_n)}{p(x_{n+1} | Y_n)} \end{aligned}$$

$$p(x, y) = p(y) p(x | y)$$

$$p(x_n | x_{n+1}, Y_N) = p(x_n | x_{n+1}, Y_n)$$

$$\begin{aligned} p(x | z) &= \frac{p(z, x)}{p(z)} \\ &= \frac{p(z | x) p(x)}{p(z)} \end{aligned}$$

$$p(x_{n+1} | x_n, Y_n) = p(x_{n+1} | x_n)$$

$$\begin{aligned} p(x_n | Y_N) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n, x_{n+1} | Y_N) dx_{n+1} \\ &= p(x_n | Y_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x_{n+1} | x_n) p(x_{n+1} | Y_N)}{p(x_{n+1} | Y_n)} dx_{n+1} \end{aligned}$$

一期先予測

$$p(x_n | Y_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_n | x_{n-1}) p(x_{n-1} | Y_{n-1}) dx_{n-1}$$

フィルタ

$$p(x_n | Y_n) = \frac{p(y_n | x_n) p(x_n | Y_{n-1})}{p(y_n | Y_{n-1})}$$

平滑化

$$p(x_n | Y_N) = p(x_n | Y_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x_{n+1} | x_n) p(x_{n+1} | Y_N)}{p(x_{n+1} | Y_n)} dx_{n+1}$$

分布の近似

0. 線形・正規モデル近似

カルマンフィルタ・平滑化

1. 正規分布近似

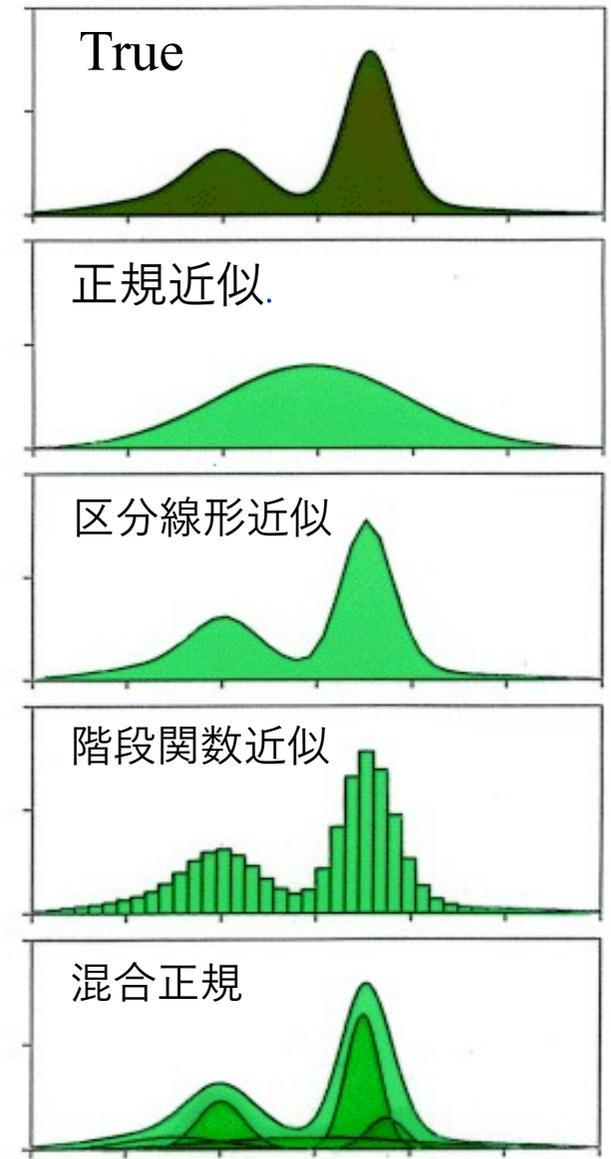
拡張カルマンフィルタ・平滑化

2. 区分線形（階段）近似

非ガウス型フィルタ・平滑化

3. 混合正規分布近似

ガウス和フィルタ・平滑化



予測

$$x_{n|n-1} = f_n(x_{n-1|n-1})$$

$$V_{n|n-1} = F_n V_{n-1|n-1} F_n^T + G_n Q_n G_n^T$$

フィルタ

$$K_n = V_{n|n-1} H_n^T (H_n V_{n|n-1} H_n^T + R_n)^{-1}$$

$$x_{n|n} = x_{n|n-1} + K_n (y_n - h_n(x_{n|n-1}))$$

$$V_{n|n} = (I - K_n H_n) V_{n|n-1}$$

$$F_n = \left[\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right]_{x_n = x_{n-1|n-1}}$$

$$G_n = \left[\frac{\partial g_n}{\partial x_n} \right]_{x_n = x_{n-1|n-1}}$$

$$H_n = \left[\frac{\partial h_n}{\partial x_n} \right]_{x_n = x_{n|n-1}}$$

密度関数の数値近似

密度関数	近似	記号
$p(x_n Y_{n-1})$	$\{d; t_0, \dots, t_d; p_1, \dots, p_d\}$	$p(t)$
$p(x_n Y_n)$	$\{d; t_0, \dots, t_d; f_1, \dots, f_d\}$	$f(t)$
$p(x_n Y_N)$	$\{d; t_0, \dots, t_d; s_1, \dots, s_d\}$	$s(t)$
$q(v_n)$	$\{2d+1; t_{-d}, \dots, t_d; q_{-d}, \dots, q_d\}$	$q(t)$

数値積分による実現（予測）

1次トレンドモデルの場合

$$t_n = t_{n-1} + v_n$$

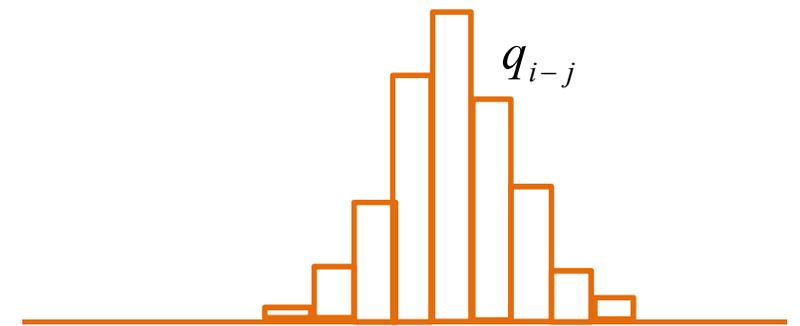
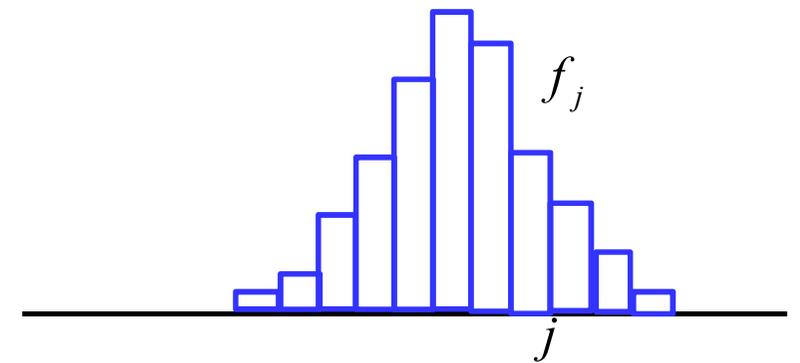
$$y_n = t_n + w_n$$

一期先予測

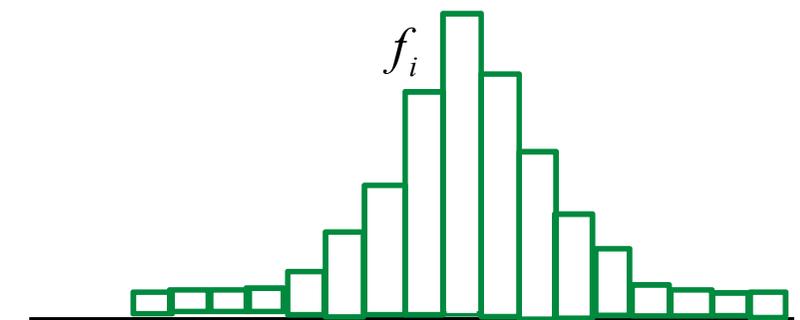
$$p_i = p(t_i) = \int_{t_0}^{t_d} q(t_i - s) f(s) ds$$

$$= \sum_{j=1}^d \int_{t_{j-1}}^{t_j} q(t_i - s) f(s) ds$$

$$= \Delta t \sum_{j=1}^d q_{i-j} f_j$$



数値積分
(畳み込み積分)



数値積分による実現（フィルタ）

フィルタ

$$\begin{aligned} f_i = f(t_i) &= \frac{r(y_n - t_i)p(t_i)}{C} \\ &= \frac{r(y_n - t_i)p_i}{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_{t_0}^{t_d} r(y_n - t)p(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^d \int_{t_{j-1}}^{t_j} r(y_n - t)p(t)dt \\ &= \Delta t \sum_{j=1}^d r(y_n - t)p_j \end{aligned}$$

各ステップの後で密度関数の全積分が1になるように規格化する

数値積分による実現(平滑化)

平滑化

$$\begin{aligned} s_i = s(t_i) &= f(t_i) \int_{t_0}^{t_d} \frac{q(t_i - u)s(u)}{p(u)} du \\ &= f(t_i) \sum_{j=1}^d \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{q(t_i - u)s(u)}{p(u)} du \\ &= \Delta t \cdot f(t_i) \sum_{j=1}^d \frac{q_{i-j} s_j}{p_j} \end{aligned}$$

各ステップの後で密度関数の全積分が1になるように規格化する