数理手法 VI　講義資料 1

1　測度論からの準備

1.1　σ-加法族、Dynkin 族

定義 1.1 $\mathcal{G}$ が集合 S 上の σ-加法族 (σ-*algebra*) であるとは、以下の条件を満たすこと
(0) $\mathcal{G}$ は S の部分集合からなる族
(1) $\emptyset \in \mathcal{G}$
(2) $A \in \mathcal{G}$ ならば $A^c = S \setminus A \in \mathcal{G}$
(3) $A_n \in \mathcal{G}$, $n = 1, 2, \ldots,$ ならば　$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$

$(S, \mathcal{G})$ が可測空間であるとは、S が集合、$\mathcal{G}$ が S 上の σ-加法族であることをいう.

命題 1.2 $\mathcal{G}$ が集合 S 上の σ-加法族ならば以下が成立する.
(1) $S \in \mathcal{G}$
(2) $A, B \in \mathcal{G}$ ならば $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{G}$
(3) $A_n \in \mathcal{G}$, $n = 1, 2, \ldots,$ ならば、$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$

命題 1.3 $\mathcal{C}$ を 集合 S の部分集合よりなる族とする. $\Sigma_{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ を含む集合 S 上の σ-加法族全体の集合とし、

$$\sigma\{\mathcal{C}\} = \bigcap_{\mathcal{G} \in \Sigma_{\mathcal{C}}} \mathcal{G}$$

とおくと、$\sigma\{\mathcal{C}\}$ は集合 S 上の σ-加法族となる. 特に、$\sigma\{\mathcal{C}\}$ は $\mathcal{C}$ を含む S 上の σ-加法族であり、$\mathcal{C}$ を含む任意の S 上の σ-加法族 $\mathcal{G}$ に対して $\sigma\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{G}$ が成立する.

$\sigma\{\mathcal{C}\}$ を $\mathcal{C}$ の生成する σ-加法族と呼ぶ.
実数の集合 $\mathbf{R}$ において、$\{[a, b);\ a, b \in \mathbf{R},\ a < b\}$ の生成する σ-加法族を $\mathbf{R}$ 上のボレル加法族と呼び $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ で表す.
また、$[-\infty, \infty]$ において、$\{[a, b)\ a, b \in \mathbf{R},\ a < b\}$ の生成する σ-加法族を $[-\infty, \infty]$ 上のボレル加法族と呼び $\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ で表す.

定義 1.4 μ が可測空間 $(S, \mathcal{G})$ 上の測度であるとは
(0) μ は $\mathcal{G}$ から $[0, \infty]$ への写像
(1) $\mu(0) = 0$.
(2) $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots,$ が互いに素、すなわち $A_n \cap A_m =, n \neq m,$ であれば

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成立する.

定義 1.5 集合 S の部分集合の族　$\mathcal{C}$ が S 上の π 系であるとは、任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $A \cap B \in \mathcal{C}$ となることをいう.

定義 1.6 S の部分集合の族 $\mathcal{D}$ が *Dynkin* 系 であるとは以下の 3 条件を満たすことをいう.
(1) $S \in \mathcal{D}$.
(2) $A, B \in \mathcal{D}$ が $A \subset B$ をみたすならば $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ が増大する集合の列、則ち $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

命題 1.7 集合 S の部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して次の 2 条件は同値である.
(1) $\mathcal{A}$ は S 上の σ-加法族
(2) $\mathcal{A}$ は S 上の π-系でありかつ *Dynkin* 系である.

証明. (1) ならば (2) であることは明らか. また、 (1) を仮定すると、$A, B \in \mathcal{A}$ に対して

$$A \cup B = S \setminus ((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) \in \mathcal{A}$$

となるので $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots,$ に対して $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ とおくと $B_n \in \mathcal{A}$ であり $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ であるので $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ であることがわかり、$\mathcal{A}$ が σ-加法族であることがわかる.

∎

命題 1.8 (1) $\mathcal{D}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, が集合 S 上の *Dynkin* 系ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_\lambda$ も S 上の *Dynkin* 系となる.
(2) $\mathcal{C}$ を 集合 S の部分集合よりなる族とすると、$\mathcal{C}$ を含む S 上の最小の *Dynkin* 系 $d\{\mathcal{C}\}$ が存在する. 則ち、 $d\{\mathcal{C}\}$ は $\mathcal{C}$ を含む S 上の *Dynkin* 系であり、$\mathcal{C}$ を含む任意の S 上の *Dynkin* 系 $\mathcal{D}$ に対して $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ が成立する.

証明. (1) は明らか. (2) は $\mathbf{D}$ を $\mathcal{C}$ を含み Dynkin 系となる S の部分集合よりなる族 $\mathcal{A}$ 全体の集合とすると、$\mathcal{D} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbf{D}} \mathcal{A}$ も Dynkin 系であるので、$\mathcal{D}$ が最小なものとなる.

∎

定理 1.9 (Dynkin) S は集合、$\mathcal{C}$ は S 上の π 系とする. この時、$\mathcal{D}$ が S 上の *Dynkin* 系で $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ を満たすならば $\sigma\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ が成立する.

証明. 明らかに $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ である.
　$A \in d\{\mathcal{C}\}$ に対して

$$\mathcal{D}_A = \{D \in d\{\mathcal{C}\};\ D \cap A \in d\{\mathcal{C}\}\}$$

とおく. 次の 2 つの主張は容易に示せる.
主張 1. $\mathcal{D}_A$ は Dynkin 系
主張 2. $A \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$
　よって $A \in \mathcal{C}$ に対して $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}_A$ となることがわかる. これより、$A \in \mathcal{C}$, $B \in d\{\mathcal{C}\}$ ならば $A \cap B \in d\{\mathcal{C}\}$ となることがわかる. 従って、$B \in d\{\mathcal{C}\}$ に対して $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_B$ がわかる. これより、$B \in d\{\mathcal{C}\}$ に対して $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}_B$, 則ち $A, B \in d\{\mathcal{C}\}$ ならば $A \cap B \in d\{\mathcal{C}\}$ となり、$d\{\mathcal{C}\}$ が π 系となることがわかる.
　よって、$d\{\mathcal{C}\}$ が σ-加法族であることがわかり、$\sigma\{\mathcal{C}\} \subset d\{\mathcal{C}\}$ を得る.

∎

1.2　測度

定義 1.10 (S,Σ) を可測空間とする．μ が可測空間 (S,Σ) 上の測度であるとは、μ は Σ から $[0,\infty]$ への写像であり、以下が成り立つことをいう．
(1) $\mu(0)=0$.
(2) $A_n\in\Sigma$, $n=1,2,\dots,$ が互いに素、すなわち $A_n\cap A_m=,\ n\neq m,$ であれば

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

が成立する．

定理 1.11 可測空間 $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の測度で $\mu([a,b))=b-a,\ a<b,$ となるものがただ 1 つ存在する．

この測度をルベーグ (Lebesgue) 測度と呼ぶ．

命題 1.12 μ_1,μ_2 は可測空間 (S,Σ) 上の測度、$\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}\subset\Sigma$ を満たす π 系であるとする．今、次の 2 条件
(i)　$\mu_1(S)=\mu_2(S)<\infty$
(ii) $\mu_1(A)=\mu_2(A)$ がすべての $A\in\mathcal{A}$ で成立する
を満たすならば $\mu_1(B)=\mu_2(B)$ がすべての $B\in\sigma\{\mathcal{A}\}$ で成立する.

証明． $(S,\mathcal{B})$ は可測空間、μ_1,μ_2 は $(S,\mathcal{B})$ 上の測度であった．

$$\mathcal{D}=\{D\in\mathcal{B};\ \mu_1(D)=\mu_2(D)\}$$

とおくと、$S\in\mathcal{D}$ であり、$\mathcal{D}$ が Dynkin 系となることも容易にわかる．仮定より $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}$ であり、$\mathcal{C}$ は π- 系なので定理 **??** より $\sigma\{\mathcal{C}\}\subset\mathcal{D}$ を得、主張が示された．

例． $\mathbf{R}$ 上で考える．$\mathcal{C}=\{(-\infty,x];\ x\in\mathbf{R}\}$ は π 系で $\sigma\{\mathcal{C}\}=\mathcal{B}(\mathcal{C})$. よって、$(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 上の有限測度 $\mu_1,\ \mu_2$ に対して

$$\mu_1((-\infty,x])=\mu_2((-\infty,x]),\qquad x\in\mathbf{R}$$

ならば

$$\mu_1(A)=\mu_2(A),\qquad A\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$$

1.3　可測関数、可測写像

定義 1.13 $(S_1,\Sigma_1),(S_2,\Sigma_2)$ を可測空間とする．以下の条件が成立する時、写像 $f:S_1\to S_2$ は Σ_1/Σ_2-可測であるという．
任意の $A\in\Sigma_2$ に対して $f^{-1}(A)\in\Sigma_1$.

定義 1.14 (S,Σ) を可測空間とする．関数 $f:S\to[-\infty,\infty]$ が Σ-可測であるとは、$f:S\to[-\infty,\infty]$ が $\Sigma/\mathcal{B}([-\infty,\infty])$-可測であることをいう．

命題 1.15 (S, Σ) を可測空間とする．
(1) $f_i : S \to [-\infty, \infty]$, $i = 1, 2$, が Σ-可測であり、$f_i(s) \geqq 0$, $s \in S$, $i = 1, 2$, と仮定する．$a_i \in [0, \infty]$, $i = 1, 2$, であれば $a_1 f_1 + a_2 f_2 : S \to [-\infty, \infty]$ も Σ-可測である．
(2) $f_n : S \to [-\infty, \infty]$, $n \geqq 1$ が Σ-可測であれば、$\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ も Σ-可測である．

2 測度論的確率論

2.1 基本概念

定義 2.1 $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ が確率空間であるとは
(1) Ω は集合
(2) $(\Omega, \mathcal{F})$ は可測空間、すなわち $\mathcal{F}$ は Ω 上の σ-加法族
(3) P は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度で $P(\Omega) = 1$
となることをいう．

以下では確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ を固定して考える．
$\mathcal{G}$ が部分 σ-加法族であるとは $\mathcal{G}$ が Ω 上の σ-加法族であり、$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ となることをいう．

定義 2.2 X が確率変数 (random variable) であるとは、$X : \Omega \to \mathbf{R}$ が $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 可測関数、すなわち、$B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ となることをいう．
しばしば、確率変数の値として $-\infty, \infty$ を許す場合がある．この時、$X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が確率変数であるとは、が $\mathcal{F}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ 可測関数となることである．

確率変数の族 $X_\lambda : \Omega \to [-\infty, \infty]$, $\lambda \in \Lambda$, に対して

$$\sigma\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} = \sigma\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{X_\lambda^{-1}(A)\,;\ A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])\}\}$$

と定義する．$\sigma\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ は $\mathcal{F}$ の部分-σ-加法族となる．これを確率変数の族 $X_\lambda : \Omega \to [-\infty, \infty]$, $\lambda \in \Lambda$, の生成する σ-加法族という．
確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$, 部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ に対して、$X^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ がすべての $A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ に対して成立する時、すなわち $\sigma\{X\} \subset \mathcal{G}$ が成り立つ時、確率変数 X は $\mathcal{G}$-可測であるという．
確率変数 X が $\mathcal{G}$-可測であることは、$(\Omega, \mathcal{G})$ を可測空間と考える時、$X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が $\mathcal{G}$-可測であることと同値であることに注意．
確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が非負値、すなわち $X(\omega) \geqq 0$, $\omega \in \Omega$, ならば積分

$$\int_\Omega X(\omega) P(d\omega) \in [0, \infty]$$

が定義される．確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が可積分であるとは

$$\int_\Omega |X(\omega)| P(d\omega) < \infty$$

となることである．確率変数 X が可積分ならば積分

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) \in \mathbf{R}$$

が定義される．

確率論では積分に対して特別な記法を用いる．確率変数 X に対して

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$$

を $E[X]$ で表し、確率変数 X の期待値と呼ぶ．また、 $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A X(\omega)P(d\omega)$$

を $E[X,A]$ で表す．また、複数の確率空間や確率測度を扱う場合に、確率測度として何を考えているかがわかるように、$E[X]$ を $E^P[X]$ で、$E[X,A]$ を $E^P[X,A]$ で表すことがある．

定数 $c \in \mathbf{R}$ に対して、$Y(\omega) = c,\ \omega \in \Omega,$ で定義される確率変数 Y を単に c で表すことにする．

期待値は以下のような性質を持つ．

命題 2.3 (1) $E[1] = 1.$ また、X, Y が非負値確率変数であり、$a, b \in [0,\infty]$ ならば $aX+bY$ も非負値確率変数であり

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

(2)(期待値の線形性) X, Y が可積分確率変数であり、$a, b \in \mathbf{R}$ ならば、$aX + bY$ も可積分確率変数であり

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

(3) X が非負値確率変数であり、$A_n \in \mathcal{F},\ n = 1, 2, \ldots,$ が互いに素ならば

$$E[X, \bigcup_{n=1}^\infty A_n] = \sum_{n=1}^\infty E[X, A_n]$$

命題 2.4 $X_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ が非負値確率変数とする．

(1)

$$E[\sum_{n=1}^\infty X_n] = \sum_{n=1}^\infty E[X_n]$$

(2) (単調収束定理) $X_{n+1}(\omega) \geqq X_n(\omega),\ \omega \in \Omega,\ n = 1, 2, \ldots$ である時、

$$E[\lim_{n\to\infty} X_n] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

(3) (Fatou の補題)

$$E[\varliminf_{n\to\infty} X_n] \leqq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n]$$

命題 2.5 (有界収束定理) X_n, $n = 1, 2, \ldots,$ が非負値確率変数とし、以下を仮定する.
(i)　ある定数 M が存在して

$$|X_n| \leqq M \ a.s.$$

(ii)　ある確率変数 X_∞ が存在して

$$X_n \to X_\infty,\ n \to \infty,\ a.s.$$

この時、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X_\infty]$$

が成立する.

2.2　独立性

定義 2.6 (1) $\mathcal{F}$ の 部分集合族の族 $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (ただし $|\Lambda| \geqq 2$) が独立であるとは、任意の $n \geqq 2$, 任意の相異なる $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$, 及び任意の $A_j \in \mathcal{A}_{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, n$, に対して

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n)$$

となることをいう.
(2) 確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が独立であるとは各確率変数の生成する σ-加法族の族 $\{\sigma\{X_\lambda\}\}_{\lambda\in\Lambda}$ が独立であることをいう.

命題 2.7 (1) $n \geqq 2$ とする. $\mathcal{F}$ の 部分集合族の族 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が独立であり、$\mathcal{A}_1$ が π-系ならば、$\sigma\{\mathcal{A}_1\}, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が独立となる.
　特に、$\mathcal{F}$ の 部分集合族の族 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が独立であり、$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が π-系であるならば、$\sigma\{\mathcal{A}_1\}, \ldots, \sigma\{\mathcal{A}_n\}$, は独立となる.
(2) $\mathcal{F}$ の 部分集合族の族 $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (ただし $|\Lambda| \geqq 2$) が独立であり、各 $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, が π-系であるならば、$\{\sigma\{\mathcal{A}_\lambda\};\ \lambda \in \Lambda\}$ も独立となる.

証明. $C_m \in \mathcal{A}_m$, $m = 2, \ldots, n$, を固定する. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 μ_1, μ_2 を

$$\mu_1(B) = P(B \cap \bigcap_{m=2}^{n} C_m), \quad \mu_2(B) = P(B)P(\bigcap_{m=2}^{n} C_m), \qquad B \in \mathcal{F}$$

で定めると、$\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) = P(\bigcap_{m=2}^{n} C_m) < \infty$ であり、独立性の仮定よりすべての $A \in \mathcal{A}_1$ に対して $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ となる. よって命題 **??** よりすべての $B \in \sigma\{\mathcal{A}_1\}$ に対して $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ となる. これより主張を得る.

∎

命題 2.8 確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が独立であるとする. 今、$\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ であり、Λ_n, $n = 1, 2 \ldots,$ は互いに素、すなわち $\Lambda_n \cap \Lambda_m =, n \neq m,$ とする. この時、$\{\sigma\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda_n\};\ n = 1, 2, \ldots\}$ は独立となる.

証明． $\mathcal{A}_n,\, n=1,2\ldots,$ を

$$\mathcal{A}_n = \{\bigcap_{k=1}^{m} B_k;\ B_k \in \sigma\{X_{\lambda_k}\},\ \lambda_k \in \Lambda_n\}$$

とおくと、$\mathcal{A}_n$ は π-系であり、$\sigma\{\mathcal{A}_n\} = \sigma\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda_n\}$ となる．また、$\{\mathcal{A}_n;\ n\ 1,2,\ldots\}$ が独立となることも容易にわかるので、前命題より主張を得る．

∎

命題 2.9 $\rho_n : [0,\infty] \to [0,n],\, n=1,2,\ldots,$ を

$$\rho_n(t) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n}, & t \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}), k=1,\ldots,n2^n, \\ n, & t \in [n,\infty] \end{cases}$$

で定める．

この時、$\rho_n(t) \leqq \rho_{n+1}(t) \leqq t,\, n \geqq 1,\, t \in [0,\infty],$ であり、$\rho_n(t) \uparrow t,\, n \to \infty,$ がすべての $t \in [0,\infty]$ に対して成立する．

独立な確率変数については、以下が成立する．

命題 2.10 $n \geqq 2$ であり、$X_m,\, m=1,\ldots,n$ が独立な非負値確率変数の族であれば

$$E[\prod_{m=1}^{n} X_m] = \prod_{m=1}^{n} E[X_m]$$

が成立する．

証明． $r \geqq 1$ に対して

$$E[\prod_{m=1}^{n} \rho_r(X_m)] = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{r2^r} \prod_{m=1}^{n} (\frac{i_m}{2^r}) P(\bigcap_{m=1}^{n} \{\rho_r(X_m) = \frac{i_m}{2^r}\}).$$

$\{\rho_r(X_m) = \frac{i_m}{2^r}\} \in \sigma\{X_m\}$ であるので独立性の定義より

$$E[\prod_{m=1}^{n} \rho_r(X_m)] = \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{r2^r} \prod_{m=1}^{n} (\frac{i_m}{2^r}) \prod_{m=1}^{n} P(\{\rho_r(X_m) = \frac{i_m}{2^r}\}) = \prod_{m=1}^{n} E[\rho_r(X_m)]$$

を得る．$r \to \infty$ とすることで主張を得る．

∎

以下では、実数 a,b に対して

$$a \vee b = \max\{a,b\}, \qquad a \wedge b = \min\{a,b\},$$

という記法を使う．

命題 2.11 $X_n, n = 1, 2, \ldots,$ が非負値確率変数で $P(X_n < \infty) = 1, n \geqq 1,$ とする．

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n \wedge 1] < \infty$$

ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_n < \infty \ a.s.$$

が成立する．特に $X_n \to 0, n \to \infty, a.s.$

証明． まず、命題 **??** より

$$E[\sum_{n=1}^{\infty}(X_n \wedge 1)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n \wedge 1] < \infty$$

より $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n \wedge 1) < \infty \ a.s.$ がわかる．この時、 $X_n \geqq 1$ となる n は有限個でなければならないので $\sum_{k=1}^{\infty} X_n < \infty \ a.s.$ であることがわかる．

∎

確率論における収束概念についても述べておく．

定義 2.12 X は確率変数、$X_n, n - 1, 2, \ldots,$ は確率変数の列とする．
(1) 確率変数列 $X_n, n = 1, 2, \ldots,$ が確率変数 X に確率収束するとは $P(|X| < \infty) = 1$ であり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(|X - X_n| > \varepsilon) \to 0, \qquad n \to \infty$$

が成立することをいう．
(2) 確率変数列 $X_n, n = 1, 2, \ldots,$ が確率変数 X に概収束する、あるいは確率 1 で収束するとは $P(|X| < \infty) = 1$ であり、

$$P(\varlimsup_{n\to\infty} |X - X_n| = 0) = 1$$

となることをいう．