

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法 VI2017 楠岡成雄

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限って、特に記載のない限り、クリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下で利用することができます。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



- 1 測度論からの準備
- 2 測度論的確率論

### 3 条件付き期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間とする.

**命題 3.1**  $X$  は非負値確率変数、 $\mathcal{G}$  は部分  $\sigma$ -加法族とする。この時、次の 2 条件を満たす非負値確率変数  $Y$  が存在する。

- (1)  $Y$  は  $\mathcal{G}$ -可測。
- (2) 任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対し  $E[Y, A] = E[X, A]$  が成立する。  
さらに  $Y'$  も (1), (2) を満たすならば  $P(Y = Y') = 1$  となる。

記法  $Q(\omega)$  が  $\omega \in \Omega$  に関する命題であり  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  が存在して、 $P(\Omega_0) = 1$  であり  $\omega \in \Omega_0$  ならば  $Q(\omega)$  が成立する時、 $Q$  *a.s.* と表す。*a.s.* は *alomst surely* の略である。

上記命題の  $Y$  は *a.s.* に一意に定まる。これを  $E[X|\mathcal{G}]$  で表し、 $X$  の  $\mathcal{G}$  の下での条件付き期待値と呼ぶ。

また、確率変数  $X : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  が可積分、すなわち、 $E[|X|] < \infty$  である時、

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X \vee 0|\mathcal{G}] - E[(-X) \vee 0|\mathcal{G}]$$

で定義する。

**命題 3.2**  $X$  は可積分な確率変数、 $\mathcal{G}$  は部分  $\sigma$ -加法族とする。この時、 $E[X|\mathcal{G}]$  は  $\mathcal{G}$ -可測かつ可積分であり、任意の  $A \in \mathcal{G}$  に対し  $E[Y, A] = E[X, A]$  が成立する。

**命題 3.3**  $X, Y$  を非負値確率変数、 $a \geq 0$ ,  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  を部分  $\sigma$ -加法族とする。この時以下が成立する。

- (1)  $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]$ .
- (2)  $E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$  *a.s.* また  $E[X + Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$  *a.s.*
- (3)  $X \geq Y$  *a.s.* ならば  $E[X|\mathcal{G}] \geq E[Y|\mathcal{G}]$  *a.s.*
- (4) (tower property)  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  ならば  $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$  *a.s.*

**命題 3.4**  $X_n, n = 1, 2, \dots$  を非負値確率変数、 $\mathcal{G}$  を部分  $\sigma$ -加法族とする。この時以下が成立する。

- (1) すべての  $n = 1, 2, \dots$  に対して  $X_n \leq X_{n+1}$  *a.s.* が成立すると仮定する。この時、

$$E[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n|\mathcal{G}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n|\mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

- (2)  $E[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n|\mathcal{G}] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n|\mathcal{G}]$  *a.s.*

**命題 3.5**  $X, Y$  は非負値確率変数、 $\mathcal{G}$  は部分  $\sigma$ -加法族とし、 $Y$  は  $\mathcal{G}$ -可測と仮定する。この時

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成立する。

**命題 3.6**  $X, Y$  を可積分確率変数、 $a \in \mathbf{R}$ ,  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  を部分  $\sigma$ -加法族とする。この時、以下が成立する。

- (1)  $E[X|\emptyset, \Omega] = E[X]$ .
- (2)  $E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$  *a.s.*  $E[X + Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$  *a.s.*
- (3)  $X \geq Y$  *a.s.* ならば  $E[X|\mathcal{G}] \geq E[Y|\mathcal{G}]$  *a.s.*
- (4)  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  ならば  $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$  *a.s.*

**命題 3.7**  $X, Y$  は確率変数、 $\mathcal{G}$  は部分  $\sigma$ -加法族とし、 $Y$  は  $\mathcal{G}$ -可測と仮定する。さらに、 $X$  及び  $XY$  が可積分とする。この時

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \text{ a.s.}$$

が成立する。

**命題 3.8**  $X$  は非負値確率変数、 $\mathcal{G}$  を部分  $\sigma$ -加法族であり、 $\sigma\{X\}$  と  $\mathcal{G}$  は独立とする。この時、

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \text{ a.s.}$$

**証明.**  $A \in \mathcal{G}$  に対して

$$E[X, A] = E[X1_A] = E[X]E[1_A] = E[E[X], A]$$

$E[X]$  は  $\mathcal{G}$ -可測であるので主張を得る。

**命題 3.9**  $X$  は可積分確率変数、 $\mathcal{H}$  を部分  $\sigma$ -加法族であり、 $\sigma\{X\}$  と  $\mathcal{H}$  は独立とする。この時、

$$E[X|\mathcal{H}] = E[X] \text{ a.s.}$$

以後、条件付き期待値を扱うことが多く、*a.s.* をいちいち書くのが煩雑であるので *a.s.* を省略することが多い。