1　測度論からの準備

2　測度論的確率論

数理手法 VI　講義資料 2

3　条件付き期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．

命題 3.1 X は非負値確率変数、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族とする。この時、次の 2 条件を満たす非負値確率変数 Y が存在する。
(1) Y は $\mathcal{G}$-可測。
(2) 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対し $E[Y, A] = E[X, A]$ が成立する。
さらに Y' も (1), (2) を満たすならば $P(Y = Y') = 1$ となる。

記法 $Q(\omega)$ が $\omega \in \Omega$ に関する命題であり $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ が存在して、$P(\Omega_0) = 1$ であり $\omega \in \Omega_0$ ならば $Q(\omega)$ が成立する時、Q $a.s.$ と表す。$a.s.$ は alomst surely の略である。

上記命題の Y は $a.s.$ に一意に定まる。これを $E[X|\mathcal{G}]$ で表し、X の $\mathcal{G}$ の下での条件付き期待値と呼ぶ。

また、確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が可積分、すなわち、$E[|X|] < \infty$ である時、

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X \vee 0|\mathcal{G}] - E[(-X) \vee 0|\mathcal{G}]$$

で定義する。

命題 3.2 X は可積分な確率変数、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族とする。この時、$E[X|\mathcal{G}]$ は $\mathcal{G}$-可測かつ可積分であり、任意の $A \in \mathcal{G}$ に対し $E[Y, A] = E[X, A]$ が成立する。

命題 3.3 X, Y を非負値確率変数、$a \geqq 0$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族とする．この時以下が成立する．
(1) $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]$.
(2) $E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$ $a.s.$ また $E[X + Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$
(3) $X \geqq Y$ $a.s.$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \geqq E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$
(4) (tower property) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ならば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ $a.s.$

命題 3.4 X_n, $n = 1, 2, \ldots$ を非負値確率変数、$\mathcal{G}$ を部分 σ-加法族とする．この時以下が成立する．
(1) すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して $X_n \leqq X_{n+1}$ $a.s.$ が成立すると仮定する．この時、

$$E[\lim_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] \ a.s.$$

(2) $E[\varliminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leqq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]$ $a.s.$

命題 3.5 X, Y は非負値確率変数、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族とし、Y は $\mathcal{G}$-可測と仮定する．この時

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \ a.s.$$

が成立する．

命題 3.6 X, Y を可積分確率変数、$a \in \mathbf{R}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族とする．この時、以下が成立する．
(1) $E[X|\emptyset, \Omega] = E[X]$.
(2) $E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$ $a.s.$ $E[X+Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$
(3) $X \geqq Y$ $a.s.$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \geqq E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$
(4) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ならば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ $a.s.$

命題 3.7 X, Y は確率変数、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族とし、Y は $\mathcal{G}$-可測と仮定する．さらに、X 及び XY が可積分とする．この時

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \ a.s.$$

が成立する．

命題 3.8 X は非負値確率変数、$\mathcal{G}$ を部分 σ-加法族であり、$\sigma\{X\}$ と $\mathcal{G}$ は独立とする．この時、

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \ a.s.$$

証明． $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$E[X, A] = E[X1_A] = E[X]E[1_A] = E[E[X], A]$$

$E[X]$ は $\mathcal{G}$-可測であるので主張を得る。

命題 3.9 X は可積分確率変数、$\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族であり、$\sigma\{X\}$ と $\mathcal{H}$ は独立とする．この時、

$$E[X|\mathcal{H}] = E[X] \ a.s.$$

以後、条件付き期待値を扱うことが多く、$a.s.$ をいちいち書くのが煩雑であるので $a.s.$ を省略することが多い。