クレジット：
UTokyo Online Education 数理手法Ⅵ 2018 楠岡成雄

数理手法 VI　2018年度講義ノート

楠岡成雄

平成 30 年 12 月 7 日

第1章　測度論的確率論の復習

1.1　σ-加法族、Dynkin 族

定義 1.1.1 Σ が集合 S 上の σ-加法族 (σ-*algebra*) であるとは、以下の条件を満たすこと
(0) Σ は S の部分集合からなる族
(1) $\emptyset \in \Sigma$
(2) $A \in \Sigma$ ならば $A^c = S \setminus A \in \Sigma$
(3) $A_n \in \Sigma,\ n = 1, 2, \ldots,$ ならば　$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

(S, Σ) が可測空間であるとは、S が集合、Σ が S 上の σ-加法族であることをいう.

命題 1.1.2 Σ が集合 S 上の σ-加法族ならば以下が成立する.
(1) $S \in \Sigma$
(2) $A, B \in \Sigma$ ならば $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \Sigma$
(3) $A_n \in \Sigma,\ n = 1, 2, \ldots,$ ならば、$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

命題 1.1.3 $\mathcal{C}$ を 集合 S の部分集合よりなる族とする. $\Sigma_{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ を含む集合 S 上の σ-加法族全体の集合とし、

$$\sigma\{\mathcal{C}\} = \bigcap_{\Sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}}} \Sigma$$

とおくと、$\sigma\{\mathcal{C}\}$ は集合 S 上の σ-加法族となる. 特に、$\sigma\{\mathcal{C}\}$ は $\mathcal{C}$ を含む S 上の σ-加法族であり、$\mathcal{C}$ を含む任意の S 上の σ-加法族 Σ に対して $\sigma\{\mathcal{C}\} \subset \Sigma$ が成立する.

$\sigma\{\mathcal{C}\}$ を $\mathcal{C}$ の生成する σ-加法族と呼ぶ.
実数の集合 $\mathbf{R}$ において、$\{[a, b);\ a, b \in \mathbf{R},\ a < b\}$ の生成する σ-加法族を $\mathbf{R}$ 上のボレル加法族と呼び $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ で表す.
また、$[-\infty, \infty]$ において、$\{[a, b)\ a, b \in \mathbf{R},\ a < b\}$ の生成する σ-加法族を $[-\infty, \infty]$ 上のボレル加法族と呼び $\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ で表す.

定義 1.1.4 μ が可測空間 (S, Σ) 上の測度であるとは
(0) μ は Σ から $[0, \infty]$ への写像
(1) $\mu(0) = 0$.
(2) $A_n \in \Sigma,\ n = 1, 2, \ldots,$ が互いに素、すなわち $A_n \cap A_m =,\ n \neq m,$ であれば

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成立する.

定義 1.1.5 集合 S の部分集合の族　$\mathcal{C}$ が S 上の π 系であるとは、任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $A \cap B \in \mathcal{C}$ となることをいう.

定義 1.1.6 S の部分集合の族 $\mathcal{D}$ が *Dynkin* 系 であるとは以下の 3 条件件を満たすことをいう.
(1) $S \in \mathcal{D}$.
(2) $A, B \in \mathcal{D}$ が $A \subset B$ をみたすならば $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
(3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ が増大する集合の列、則ち $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

命題 1.1.7 集合 S の部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して次の 2 条件は同値である.
(1) $\mathcal{A}$ は S 上の σ-加法族
(2) $\mathcal{A}$ は S 上の π-系でありかつ *Dynkin* 系である.

証明. (1) ならば (2) であることは明らか. また、 (1) を仮定すると、$A, B \in \mathcal{A}$ に対して

$$A \cup B = S \setminus ((S \setminus A) \cap (S \setminus B)) \in \mathcal{A}$$

となるので $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots,$ に対して $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ とおくと $B_n \in \mathcal{A}$ であり $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ であるので $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ であることがわかり、$\mathcal{A}$ が σ-加法族であることがわかる.

∎

命題 1.1.8 (1) $\mathcal{D}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, が集合 S 上の *Dynkin* 系ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_\lambda$ も S 上の *Dynkin* 系となる.
(2) $\mathcal{C}$ を 集合 S の部分集合よりなる族とすると、$\mathcal{C}$ を含む S 上の最小の *Dynkin* 系 $d\{\mathcal{C}\}$ が存在する. 則ち、 $d\{\mathcal{C}\}$ は $\mathcal{C}$ を含む S 上の *Dynkin* 系であり、$\mathcal{C}$ を含む任意の S 上の *Dynkin* 系 $\mathcal{D}$ に対して $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ が成立する.

証明. (1) は明らか. (2) は $\mathbf{D}$ を $\mathcal{C}$ を含み Dynkin 系となる S の部分集合よりなる族 $\mathcal{A}$ 全体の集合とすると、$\mathcal{D} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathbf{D}} \mathcal{A}$ も Dynkin 系であるので、$\mathcal{D}$ が最小なものとなる.

∎

定理 1.1.9 (Dynkin) S は集合、$\mathcal{C}$ は S 上の π 系とする. この時、$\mathcal{D}$ が S 上の *Dynkin* 系で $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ を満たすならば $\sigma\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ が成立する.

証明. 明らかに $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ である.
$A \in d\{\mathcal{C}\}$ に対して

$$\mathcal{D}_A = \{D \in d\{\mathcal{C}\};\ D \cap A \in d\{\mathcal{C}\}\}$$

とおく. 次の 2 つの主張は容易に示せる.
主張 1. $\mathcal{D}_A$ は Dynkin 系
主張 2. $A \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$
よって $A \in \mathcal{C}$ に対して $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}_A$ となることがわかる. これより、$A \in \mathcal{C}, B \in d\{\mathcal{C}\}$ ならば $A \cap B \in d\{\mathcal{C}\}$ となることがわかる. 従って、$B \in d\{\mathcal{C}\}$ に対して $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_B$ がわかる. これより、$B \in d\{\mathcal{C}\}$ に対して $d\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}_B$, 則ち $A, B \in d\{\mathcal{C}\}$ ならば $A \cap B \in d\{\mathcal{C}\}$ となり、$d\{\mathcal{C}\}$ が π 系となることがわかる.
よって、$d\{\mathcal{C}\}$ が σ-加法族であることがわかり、$\sigma\{\mathcal{C}\} \subset d\{\mathcal{C}\}$ を得る.

∎

1.2 測度

定義 1.2.1 (S, Σ) を可測空間とする. μ が可測空間 (S, Σ) 上の測度であるとは、μ は Σ から $[0, \infty]$ への写像であり、以下が成り立つことをいう.

(1) $\mu(0) = 0$.
(2) $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, が互いに素、すなわち $A_n \cap A_m =$, $n \neq m$, であれば

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が成立する.

定理 1.2.2 可測空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の測度で $\mu([a, b)) = b - a$, $a < b$, となるものがただ 1 つ存在する.

この測度をルベーグ (Lebesgue) 測度と呼ぶ.

命題 1.2.3 μ_1, μ_2 は可測空間 (S, Σ) 上の測度、$\mathcal{A}$ は $\mathcal{A} \subset \Sigma$ を満たす π 系であるとする. 今、次の 2 条件
(i) $\mu_1(S) = \mu_2(S) < \infty$
(ii) $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ がすべての $A \in \mathcal{A}$ で成立する
を満たすならば $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ がすべての $B \in \sigma\{\mathcal{A}\}$ で成立する.

証明. $(S, \mathcal{B})$ は可測空間、μ_1, μ_2 は $(S, \mathcal{B})$ 上の測度であった.

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{B};\ \mu_1(D) = \mu_2(D)\}$$

とおくと、$S \in \mathcal{D}$ であり、$\mathcal{D}$ が Dynkin 系となることも容易にわかる. 仮定より $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ であり、$\mathcal{C}$ は π-系なので定理 1.1.9 より $\sigma\{\mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}$ を得、主張が示された.

例. $\mathbf{R}$ 上で考える. $\mathcal{C} = \{(-\infty, x];\ x \in \mathbf{R}\}$ は π 系で $\sigma\{\mathcal{C}\} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$. よって、$(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})$ 上の有限測度 μ_1, μ_2 に対して

$$\mu_1((-\infty, x]) = \mu_2((-\infty, x]), \qquad x \in \mathbf{R}$$

ならば

$$\mu_1(A) = \mu_2(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

1.2.1 可測関数、可測写像

定義 1.2.4 (S_1, Σ_1), (S_2, Σ_2) を可測空間とする. 以下の条件が成立する時、写像 $f : S_1 \to S_2$ は Σ_1/Σ_2-可測であるという.
任意の $A \in \Sigma_2$ に対して $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

定義 1.2.5 (S, Σ) を可測空間とする. 関数 $f : S \to [-\infty, \infty]$ が Σ-可測であるとは、$f : S \to [-\infty, \infty]$ が $\Sigma/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$-可測であることをいう.

命題 1.2.6 (S, Σ) を可測空間とする.
(1) $f_i : S \to [-\infty, \infty]$, $i = 1, 2$, が Σ-可測であり、$f_i(s) \geqq 0$, $s \in S$, $i = 1, 2$, と仮定する. $a_i \in [0, \infty]$, $i = 1, 2$, であれば $a_1 f_1 + a_2 f_2 : S \to [-\infty, \infty]$ も Σ-可測である.
(2) $f_n : S \to [-\infty, \infty]$, $n \geqq 1$ が Σ-可測であれば、$\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ も Σ-可測である.

1.3　測度論的確率論

1.3.1　基本概念

定義 1.3.1 $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ が確率空間であるとは
(1) Ω は集合
(2) $(\Omega, \mathcal{F})$ は可測空間、すなわち $\mathcal{F}$ は Ω 上の σ-加法族
(3) P は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度で $P(\Omega) = 1$
となることをいう．

以下では確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ を固定して考える．
$\mathcal{G}$ が部分 σ-加法族であるとは $\mathcal{G}$ が Ω 上の σ-加法族であり、$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ となることをいう．

定義 1.3.2 X が確率変数 (random variable) であるとは、$X : \Omega \to \mathbf{R}$ が $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 可測関数、すなわち、$B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ となることをいう．
しばしば、確率変数の値として $-\infty, \infty$ を許す場合がある．この時、$X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が確率変数であるとは、が $\mathcal{F}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ 可測関数となることである．

確率変数の族 $X_\lambda : \Omega \to [-\infty, \infty], \lambda \in \Lambda,$ に対して

$$\sigma\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} = \sigma\{\bigcup_{\lambda \in \Lambda}\{X_\lambda^{-1}(A)\,;\ A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])\}\}$$

と定義する．$\sigma\{X_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ は $\mathcal{F}$ の部分-σ-加法族となる．これを確率変数の族 $X_\lambda : \Omega \to [-\infty, \infty], \lambda \in \Lambda,$ の生成する σ-加法族という．

確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$, 部分 σ-加法族 Σ に対して、$X^{-1}(A) \in \mathcal{G}$ がすべての $A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ に対して成立する時、すなわち $\sigma\{X\} \subset \mathcal{G}$ が成り立つ時、確率変数 X は $\mathcal{G}$-可測であるという．

確率変数 X が $\mathcal{G}$-可測であることは、$(\Omega, \mathcal{G})$ を可測空間と考える時、$X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が $\mathcal{G}$-可測であることと同値であることに注意.

確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が非負値、すなわち $X(\omega) \geqq 0, \omega \in \Omega,$ ならば積分

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) \in [0, \infty]$$

が定義される．確率変数 $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ が可積分であるとは

$$\int_\Omega |X(\omega)|P(d\omega) < \infty$$

となることである．確率変数 X が可積分ならば積分

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) \in \mathbf{R}$$

が定義される．

確率論では積分に対して特別な記法を用いる．確率変数 X に対して

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$$

を $E[X]$ で表し、確率変数 X の期待値と呼ぶ．また、 $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A X(\omega)P(d\omega)$$

を $E[X, A]$ で表す．また、複数の確率空間や確率測度を扱う場合に、確率測度として何を考えているかがわかるように、$E[X]$ を $E^P[X]$ で、$E[X, A]$ を $E^P[X, A]$ で表すことがある．

定数 $c \in \mathbf{R}$ に対して、$Y(\omega) = c, \omega \in \Omega,$ で定義される確率変数 Y を単に c で表すことにする．

期待値は以下のような性質を持つ．

命題 1.3.3 (1) $E[1]=1$. また、X, Y が非負値確率変数であり、$a, b \in [0,\infty]$ ならば $aX+bY$ も非負値確率変数であり

$$E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$$

(2)(期待値の線形性) X, Y が可積分確率変数であり、$a, b \in \mathbf{R}$ ならば、$aX+bY$ も可積分確率変数であり

$$E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$$

(3) X が非負値確率変数であり、$A_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\ldots,$ が互いに素ならば

$$E[X, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n]=\sum_{n=1}^{\infty} E[X, A_n]$$

命題 1.3.4 X_n, $n=1,2,\ldots,$ が非負値確率変数とする.
(1)

$$E[\sum_{n=1}^{\infty} X_n]=\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

(2) (単調収束定理) $X_{n+1}(\omega) \geqq X_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $n=1,2,\ldots$ である時、

$$E[\lim_{n\to\infty} X_n]=\lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

(3) (Fatou の補題)

$$E[\varliminf_{n\to\infty} X_n] \leqq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n]$$

命題 1.3.5 (有界収束定理) X_n, $n=1,2,\ldots,$ が確率変数、Y は非負値確率変数とし、以下を仮定する.
(i)　$E[Y]<\infty$ かつ $|X_n| \leqq Y\ a.s.$
(ii)　ある確率変数 X_∞ が存在して

$$X_n \to X_\infty,\ n\to\infty,\ a.s.$$

この時、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n]=E[X_\infty]$$

が成立する.

1.4　独立性

定義 1.4.1 $\mathcal{G}$ が部分 σ-加法族であるとは $\mathcal{G}$ が Ω 上の σ-加法族であり、$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ となることをいう。

定義 1.4.2 (1) $\mathcal{F}$ の 部分集合族の族 $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ (ただし $|\Lambda| \geqq 2$) が独立であるとは、任意の $n \geqq 2$, 任意の相異なる $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \Lambda$, 及び任意の $A_j \in \mathcal{A}_{\lambda_j}$, $j=1,\ldots,n$, に対して

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdots P(A_n)$$

となることをいう。
(2) 確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が独立であるとは各確率変数の生成する σ-加法族の族 $\{\sigma\{X_\lambda\}\}_{\lambda\in\Lambda}$ が独立であることをいう。

命題 1.4.3 (1) $n \geqq 2$ とする。$\mathcal{F}$ の 部分集合族の族 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が独立であり、$\mathcal{A}_1$ が π-系ならば、$\sigma\{\mathcal{A}_1\}$, $\mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が独立となる。
　特に、$\mathcal{F}$ の 部分集合族の族 $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が独立であり、$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_n$ が π-系であるならば、$\sigma\{\mathcal{A}_1\}$, $\ldots$, $\sigma\{\mathcal{A}_n\}$, は独立となる。
(2) $n, m \geqq 1$ とする。$\mathcal{F}$ の 部分 σ-加法族の族 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2, \ldots \mathcal{G}_{n+m}$ が独立であるならば、$\sigma\{\bigcup_{k=1}^n \mathcal{G}_k\}$, $\sigma\{\bigcup_{k=n+1}^{n+m} \mathcal{G}_k\}$ は独立となる。

独立な確率変数については、以下が成立する。

命題 1.4.4 $n \geqq 2$ であり、$X_m,\ m = 1, \ldots, n$ が独立な非負値確率変数の族であれば

$$E[\prod_{m=1}^{n} X_m] = \prod_{m=1}^{n} E[X_m]$$

が成立する。

1.5 条件付き期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。

定理 1.5.1 $\mathcal{G}$ を部分 σ-加法族とし、X は非負値確率変数とする。この時、次の条件を満たす非負値確率変数 Y が存在する。
(1) 確率変数 Y は $\mathcal{G}$-可測。
(2) $E[Y, B] = E[X, B]$ がすべての $B \in \mathcal{G}$ に対して成立する。
また、 Y' が上記の Y と同じ条件を満たすならば $Y' = Y\ a.s.$ が成立する。
また、$E[X] < \infty$ であれば $E[Y] < \infty$ となる。

ここで $Y = Y'\ a.s.$ とは

$$P(\{\omega \in \Omega;\ Y(\omega) = Y'(\omega)\}) = 1$$

を意味する。
上記の定理の Y を積分を $E[X|\mathcal{G}]$ で表す。

命題 1.5.2 X, Y は非負値確率変数、$a, b \in [0, \infty)$, $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ は部分 σ-加法族とする。この時、以下が成立する。
(1) $E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]\ a.s.$
(2) $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}].\ a.s.$
(3) $X \leqq Y\ a.s.$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \leqq E[Y|\mathcal{G}]\ a.s.$
(4) (*tower property*) $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$ ならば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]\ a.s.$

条件付き期待値についても単調収束定理や Fatou の補題が成り立つ。

命題 1.5.3 $X_n,\ n = 1, 2, \ldots$ を非負値確率変数、$\mathcal{G}$ を部分 σ-加法族とする。この時以下が成立する。
(1)（単調収束定理) すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して $X_n \leqq X_{n+1}\ a.s.$ が成立すると仮定する。この時、

$$E[\lim_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]\ a.s.$$

(2)(Fatou の補題) $E[\varliminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}] \leqq \varliminf_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]\ a.s.$

命題 1.5.4 X, Y は非負値確率変数、$\mathcal{G}$ は部分加法族とする。もし、Y が $\mathcal{G}$-可測でならば

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]\ a.s.$$

が成立する。

系 1.5.5 $\mathcal{G}$ を部分 σ-加法族とし、X は可積分な確率変数とする。この時、次の条件を満たす可積分な確率変数 Y が存在する。
(1) 確率変数 Y は $\mathcal{G}$-可測。
(2) $E[Y, B] = E[X, B]$ がすべての $B \in \mathcal{G}$ に対して成立する。
また、 Y' が上記の Y と同じ条件を満たすならば $Y' = Y\ a.s.$ が成立する。

この確率変数 Y も $E[X|\mathcal{G}]$ で表し、共に確率変数 X の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ の下での条件付き期待値と呼ぶ。条件付き期待値は確率変数を確率変数に移す作用素と見なせる。

命題 1.5.6 X, Y を可積分確率変数、$a \in \mathbf{R}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族とする。この時、以下が成立する。
(1) $E[X|\emptyset, \Omega] = E[X]$.
(2) $E[aX|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}]$ $a.s.$ $E[X+Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$
(3) $X \geqq Y$ $a.s.$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \geqq E[Y|\mathcal{G}]$ $a.s.$
(4) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ならば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$ $a.s.$

命題 1.5.7 X_∞, X_n, $n = 1, 2, \ldots$ を可積分確率変数、$\mathcal{G}$ を部分 σ-加法族とする。もし、$E[|X_\infty - X_n|] \to 0$, $n \to \infty$ ならば、$E[|E[X_\infty|\mathcal{G}] - E[X_n|\mathcal{G}]|] \to 0$, $n \to \infty$, が成立する。

命題 1.5.8 X, Y は確率変数、$\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族とし、Y は $\mathcal{G}$-可測と仮定する。さらに、 X 及び XY が可積分とする。この時

$$E[YX|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}] \ a.s.$$

が成立する。

命題 1.5.9 X は非負値確率変数、$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族であり、$\sigma\{\sigma\{X\} \cup \mathcal{G}\}$ と $\mathcal{H}$ は独立とする。この時、

$$E[X|\sigma\{\mathcal{G} \cup \mathcal{H}\}] = E[X|\mathcal{G}] \ a.s.$$

系 1.5.10 X は非負値確率変数、$\mathcal{H}$ を部分 σ-加法族であり、$\sigma\{X\}$ と $\mathcal{H}$ は独立とする。この時、

$$E[X|\mathcal{H}] = E[X] \ a.s.$$

条件付き期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ は定義の性質上、$a.s.$ にしか決まらない。このため、条件付き期待値に関する式はすべて $a.s.$ にしか成立しない。しかし、$a.s.$ といちいち記すのは面倒であるので、以下ではしばしば $a.s.$ を省略する。

命題 1.5.11 (Jensen の不等式) $\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族、X は可積分な確率変数とする。
$\varphi : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ は 連続微分可能な関数で $\varphi' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は単調非減少関数であるとする。この時、

$$E[\varphi(X)|\mathcal{G}] \geqq \varphi(E[X|\mathcal{G}])$$

系 1.5.12 $\mathcal{G}$ は部分 σ-加法族、X は可積分な確率変数、$p \in (1, \infty)$ とする。この時、

$$E[|X|^p|\mathcal{G}] \geqq |E[X|\mathcal{G}]|^p$$

が成立する。

第2章　離散時間マルチンゲール

2.1　マルチンゲールの定義

定義 2.1.1 $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ がフィルトレーションであるとは、
(1) $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, は $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族
(2) すべての $n \geqq 0$ に対して $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$
が成り立つことをいう。

すなわちフィルトレーションとは「情報」の増大していく様を表している。

定義 2.1.2 $\{\mathcal{F}_t\}_{n=0}^{\infty}$ はフィルトレーションとする。$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$-マルチンゲールであるとは
(1) 各 $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して、X_n は $\mathcal{F}_n$-可測な可積分確率変数
(2) $n, m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $n \geqq m$ ならば

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m \ a.s.$$

が成り立つことをいう。

定義 2.1.3 $\{\mathcal{F}_t\}_{n=0}^{\infty}$ はフィルトレーションとする。$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\{\mathcal{F}\}_{n=0}^{\infty}$-劣（優）マルチンゲールであるとは
(1) 各 $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して、X_n は $\mathcal{F}_n$-可測な可積分確率変数
(2) $n, m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $n \geqq m$ ならば

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] \geqq (\leqq) X_m \ a.s.$$

が成り立つことをいう。

以下では煩わしいので、$a.s.$ を省略する。

命題 2.1.4 $\{\mathcal{F}_t\}_{n=0}^{\infty}$ はフィルトレーションとする。$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は可積分確率変数の列で、各 $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して、X_n は $\mathcal{F}_n$-可測であるとする。この時以下が成立する。
(1) 次の 2 条件は同値。
(i) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{n=0}^{\infty}$-マルチンゲール。
(ii) 任意の $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$$

が成立する。
(2) 次の 2 条件は同値。
(i) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{n=0}^{\infty}$-劣（優）マルチンゲール。
(ii) 任意の $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geqq (\leqq) X_n$$

が成立する。

どのフィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の下で考えているかが明らかな時、$\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$-マルチンゲールを単にマルチンゲールと呼ぶ。

命題 2.1.5 (1) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y = \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールであり、$a, b \in \mathbf{R}$ ならば $aX + bY = \{aX_n + bY_n\}_{n=0}^{\infty}$ もマルチンゲールである。
(2) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $Y = \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ が劣（優）マルチンゲールであり、$a, b \geqq 0$ ならば $aX + bY = \{aX_n + bY_n\}_{n=0}^{\infty}$ も劣（優）マルチンゲールである。

命題 2.1.6 (1) $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が劣マルチンゲールならば、$\{X_n \vee 0\}_{n=0}^{\infty}$ も劣マルチンゲールである。
(2) $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールならば、$\{|X_n|\}_{n=0}^{\infty}$ は劣マルチンゲールである。

2.2 Doob の不等式

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及びフィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を固定して考える。

命題 2.2.1 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が劣マルチンゲールならば

$$\lambda P(\max_{k=0,\ldots,n} X_k > \lambda) \leqq E[X_n, \{\max_{k=0,\ldots,n} X_k > \lambda\}] \qquad \lambda > 0$$

が成立する。

命題 2.2.2 (Doob の不等式) $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルチンゲールであり、$E[M_n^2] < \infty$, $n = 1, 2, \ldots,$ とする。この時

$$E[\max_{k=0,1,\ldots,n} |M_k|^2] \leqq 4E[|M_n|^2], \qquad n \geqq 0$$

が成立する。

命題 2.2.3 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ をマルチンゲールとする.。さらに $E[M_n^2] < \infty$ と仮定する。この時、以下が成立する。
(1) $n > m \geqq 0$, に対して

$$E[(M_n - M_m)^2|\mathcal{F}_m] = E[M_n^2|\mathcal{F}_m] - M_m^2$$

特に

$$E[(M_n - M_m)^2|] = E[M_n^2] - E[M_m^2]$$

(2) $n \geqq 1$ に対して

$$E[M_n^2] = E[M_0^2] + \sum_{k=1}^{n} E[(M_k - M_{k-1})^2]$$

特に、

$$E[\max_{k=0,1,\ldots,n} M_k^2] \leqq 4(E[M_0^2] + \sum_{k=1}^{n} E[(M_k - M_{k-1})^2]), \qquad n \geqq 0$$

が成立する。

命題 2.2.4 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ をマルチンゲールであり、$\sup_n E[M_n^2] < \infty$ と仮定する。この時、確率変数 M_∞ 及び $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ で以下の条件を満たすものが存在する。
(1) $P(\Omega_0) < \infty$.
(2) $\omega \in \Omega_0$ に対して $M_n(\omega) \to M_\infty(\omega)$, $n \to \infty$.
(3) $E[M_\infty^2] < \infty$ かつ $E[(M_\infty - M_n)^2] \to 0$.
(4) $E[M_\infty|\mathcal{F}_n] = M_n$.

2.3　停止時刻

定義 2.3.1 σ が ($\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$-) 停止時刻であるとは、$\tau$ は Ω 上定義された値を $\mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ に値をとる関数で

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

が成り立つことをいう。

命題 2.3.2 $\tau : \Omega \to \mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ に対して次は同値。
(1) τ は停止時刻。
(2) 任意の $n \geqq 0$ に対して

$$\{\tau \leqq n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

命題 2.3.3 (1) $m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0} \cup \{\infty\}$ とする。$\tau \equiv m$、すなわち、τ は恒等的に値 m をとる関数とすると τ は停止時刻。
(2) σ, τ が停止時刻であれば $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$, $\sigma + \tau$ も停止時刻。ここで、$\sigma \wedge \tau$ はそれぞれ $(\sigma \wedge \tau)(\omega) = \sigma(\omega) \wedge \tau(\omega)$, $\omega \in \Omega$, で定義される関数である。$\sigma \vee \tau$, $\sigma + \tau$ も同様である。

定義 2.3.4 停止時刻 τ に対して、$\mathcal{F}$ の部分集合の族 $\mathcal{F}_\tau$ を

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F};\ \text{すべての } n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0} \text{ に対して } A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ が成立する }\}.$$

で定義する。

命題 2.3.5 (1) $\mathcal{F}_\tau$ は部分 σ-加法族である。
(2) τ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測な関数である。

命題 2.3.6 σ, τ を停止時刻とする。
(1) $A \in \mathcal{F}_\sigma$ ならば $A \cap \{\sigma \leqq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$ かつ $A \cap \{\sigma \leqq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.
(2) $\sigma(\omega) \leqq \tau(\omega)$ がすべての $\omega \in \Omega$ に対して成立するならば、$\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
(3) $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.
(4) $\{\tau < \sigma\}$, $\{\tau = \sigma\}$, $\{\tau > \sigma\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.

停止時刻 τ 及び確率過程 $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して確率過程 $X^\tau = \{X_n^\tau\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$X_n^\tau(\omega) = X_{n \wedge \tau(\omega)}(\omega), \qquad \omega \in \Omega,\ n \geqq 0$$

で定める。

命題 2.3.7 τ を停止時刻とする。
(1) 確率過程 $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が適合していれば X^τ も適合している。
(2) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールであれば X^τ もマルチンゲールとなる。
(3) $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が劣（優）マルチンゲールであれば X^τ も劣（優）マルチンゲールとなる。

命題 2.3.8 τ が停止時刻とする。
(1) 確率過程 $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ が適合しているならば X_n^τ, $n \geqq 0$, は $\mathcal{F}_\tau$-可測である。
(2) $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールならば

$$E[M_n | \mathcal{F}_\tau] = M_n^\tau, \qquad n \geqq 0$$

が成り立つ。

命題 2.3.9 $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ はマルチンゲール、σ, τ は停止時刻、$N \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ とする。さらに、すべての $\omega \in \Omega$ に対して $\sigma(\omega) \leqq \tau(\omega) \leqq N$ が成立すると仮定する。この時、

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma$$

が成立する。ここで M_τ は $M_{\tau(\omega)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, で定義される確率変数である。

命題 2.3.10 $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は劣マルチンゲール、σ, τ は停止時刻、$N \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ とし、$\sigma(\omega) \leqq \tau(\omega) \leqq N$, $\omega \in \Omega$ と仮定する。この時、

$$E[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geqq X_\sigma$$

第3章　ブラウン運動

3.1　ガウス系

以下では 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で考えていく.

定義 3.1.1 確率変数 X がガウス確率変数であるとは、以下の (1),(2) のどちらかを満たすことをいう.
(1) $m \in \mathbf{R}$, $v > 0$, が存在して、任意の有界な連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$E[f(X)] = (\frac{1}{2\pi v})^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-\frac{(x-m)^2}{2v}) dx$$

が成り立つ。
(2) $m \in \mathbf{R}$ が存在して、任意の有界な連続関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$E[f(X)] = f(m)$$

が成り立つ。

上記 (1) を満たす確率変数を 平均 m 分散 v のガウス確率変数、(2) を満たす確率変数を 平均 m 分散 0 のガウス確率変数 と呼ぶ。
確率変数 X が平均 $m \in \mathbf{R}$, 分散 $v \geqq 0$ のガウス確率変数である時

$$E[X] = m, \qquad E[(X-m)^2] = v$$

が満たされる。

命題 3.1.2 $m \in \mathbf{R}$, $v \geqq 0$ とする。確率変数 X に対して次の 2 条件は同値である。
(1) X は平均 m, 分散 v のガウス確率変数。
(2) 任意の $\xi \in \mathbf{R}$ に対して

$$E[\exp(\sqrt{-1}\xi X)] = \exp(\sqrt{-1} m\xi - \frac{v}{2}\xi^2)$$

が成立する。

証明は関数論とフーリエ変換によりわかるが省略する。

演習問題 1 上記の命題を証明せよ。

命題 3.1.3 X, Y は確率変数で $E[X^2] < \infty$, $E[Y^2] < \infty$, であれば

$$E[|XY|]^2 \leqq E[X^2]E[Y^2],$$

$$E[(X+Y)^2]^{1/2} \leqq E[X^2]^{1/2} + E[Y^2]^{1/2}$$

が成り立つ。

証明. まず

$$E[|X||Y|] \leqq E[\frac{1}{2}(X^2+Y^2)] < \infty$$

に注意。$t \in \mathbf{R}$ に対して

$$0 \leqq E[(t|X|+|Y|)^2] = t^2E[X^2] + 2tE[|X||Y|] + E[|Y|^2]$$

であるので、最初の不等式を得る。また、

$$E[(X+Y)^2] \leqq E[X^2] + E[Y^2] + 2E[|X||Y|] \leqq (E[X^2]^{1/2} + E[Y^2]^{1/2})^2$$

より後者の不等式を得る。

∎

命題 3.1.4 X_n, $n=1,\ldots,$ はガウス確率変数であるとする。X_∞ が確率変数であり、$E[(X_\infty - X_n)^2] \to 0$, $n \to \infty$, であるならば、X_∞ もガウス確率変数となる。

証明. $m_n = E[X_n]$, $v_n = E[(X_n - m_n)^2]$, $n = 1,2,\ldots,$ とおく。この時、$E[X_n] = v_n + m_n^2$ となる。また、

$$E[X_\infty^2] \leqq E[2((X_\infty - X_n)^2 + X_n^2)] \leqq 2E[(X_\infty - X_n)^2] + 2(v_n + m_n^2) < \infty$$

である。$m_\infty = E[X_\infty]$, $v_\infty = E[(X_\infty - m_\infty)^2]$ とおく。この時、 $E[X_\infty^2] = v_\infty + m_\infty^2$ となる。さらに

$$|m_\infty - m_n| \leqq E[|X_\infty - X_n|] \leqq E[(X_\infty - X_n)^2]^{1/2} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

$$|(v_\infty + m_\infty^2)^{1/2} - (v_n + m_n^2)^{1/2}| \leqq |E[X_\infty^2]^{1/2} - E[X_n^2]^{1/2}| \leqq E[(X_\infty - X_n)^2]^{1/2} \to 0, \qquad n \to \infty$$

であるので $m_n \to m_\infty$. $v_n \to v_\infty$, $n \to \infty$, を得る。

さらに、$\xi \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}|E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_\infty)E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_n)]| &\leqq |E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_\infty)(1-\exp(\sqrt{-1}\xi(X_n - X_\infty)]| \\ &\leqq E[|1-\exp(\sqrt{-1}\xi(X_n - X_\infty)|] \leqq E[|X_n - X_\infty|] \\ &\leqq E[(X_n - X_\infty)^2]^{1/2} \to 0 \qquad n \to \infty\end{aligned}$$

ここで

$$|\exp(\sqrt{-1}t) - 1| = |\int_0^t |\exp(\sqrt{-1}s)ds| \leqq |t|, \qquad t \in \mathbf{R}$$

という事実を使った。よって、

$$E[\exp(\sqrt{-1}\xi X_\infty)] = \exp(\sqrt{-1}m_\infty\xi - \frac{v_\infty}{2}\xi^2), \qquad \xi \in \mathbf{R}$$

を得、主張を得る。

∎

定義 3.1.5 $\mathcal{X}$ を確率変数の集合とする。以下の条件が成立する時、$\mathcal{X}$ はガウス系であるという。

$\mathcal{X}$ の元の一次結合、$Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, $n \geqq 1$, $a_1,\ldots,a_n \in \mathbf{R}$, $X_1,\ldots,X_n \in \mathcal{X}$, により得られる確率変数 Y がすべてガウス確率変数である。

命題 3.1.6 $\mathcal{X}$ をガウス系とする。今、$\mathcal{H}'$ を $\mathcal{X}$ の有限個の元の一次結合全体とする。さらに、$\mathcal{H}$ を以下の条件を満たす確率変数 X 全体の集合とする。

$Y_n \in \mathcal{H}'$, $n = 1,2,\ldots,$ が存在して $E[(X - Y_n)^2] \to 0$, $n \to \infty$ となる。

この時、$\mathcal{H}$ はガウス系である。

証明. 定義より $\mathcal{H}'$ はガウス系であることがわかる。さらに、$\mathcal{H}'$ はベクトル空間である。今、$X, X' \in \mathcal{H}$ ならば $Y_n, Y_n' \in \mathcal{H}'$ が存在して

$$E[|X-Y_n|^2] \to 0, \quad E[|X'-Y_n'|^2] \to 0, \qquad n \to 0$$

となる。この時、

$$E[((aX+a'X')-(aY_n+a'Y_n'))^2]^{1/2} \leqq |a|E[(X-X_n)^2]^{1/2} + |a'|E[(X'-Y_n')^2]^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty$$

であるので、$\mathcal{H}$ がベクトル空間であることがわかる。また、$X \in \mathcal{H}$ ならば X はガウス確率変数となるので主張を得る。

∎

命題 3.1.7 X_n, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ は独立なガウス確率変数であるとする。この時、$\mathcal{X} = \{X_n;\ n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}\}$ はガウス系である。

証明. $m_n = E[X_n]$, $v_n = E[(X_n - m_n)^2]$, $n \geqq 1$, とする。$a_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$E[\exp(\sqrt{-1}\xi(\sum_{k=1}^m a_n X_n))] = E[\prod_{n=1}^m \exp(\sqrt{-1}\xi a_n X_n)]$$

$$= \prod_{n=1}^m E[\exp(\sqrt{-1}\xi a_n X_n)] = \exp(\sqrt{-1}\xi(\sum_{n=1}^m a_n m_n - \frac{\xi^2}{2}\sum_{n=1}^m a_n^2 v_n)$$

となるので $\sum_{n=1}^m a_n X_n$ ガウス確率変数である。

∎

命題 3.1.8 $\mathcal{X}$ はガウス系とする。$n \geqq 2$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}$ であり、$E[X_k] = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $E[X_k X_\ell] = 0$, $k \neq \ell$, $k, \ell = 1, \ldots, n$, ならば $X_1, \ldots, X_n$ は独立である。

証明. $v_k = E[X_k^2] \geqq 0$, $k = 1, \ldots, n$, とおく。$\xi_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, n$, に対して、

$$E[\sum_{k=1}^n \xi_k X_k] = 0, \quad E[(\sum_{k=1}^n \xi_k X_k)^2] = \sum_{k,\ell=1}^n \xi_k \xi_\ell E[X_k X_\ell] = \sum_{k=1}^n \xi_k^2 v_k$$

となる。よって、

$$E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k X_k)] = \exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \xi_k^2 v_k) = \prod_{k=1}^n E[\exp(\sqrt{-1}\xi_k X_k)]$$

となる。$f_1, \ldots, f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, に対して

$$\hat{f}_k(\xi_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sqrt{-1}\xi_k x) f_k(x) dx, \qquad \xi_k \in \mathbf{R}$$

とおくと、

$$f_k(x_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sqrt{-1}\xi_k x_k)\hat{f}_k(\xi_k)) d\xi_k, \qquad x_k \in \mathbf{R}$$

となるので、

$$E[\prod_{k=1}^n f_k(X_k)] = (\frac{1}{2\pi})^n E[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n \hat{f}_k(\xi_k) \exp(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k X_k) d\xi_1 \cdots d\xi_n]$$

$$= (\frac{1}{2\pi})^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \cdots d\xi_n \prod_{k=1}^n \hat{f}_k(\xi_k) E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k X_k)]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E[(\frac{1}{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_k(\xi_k) \exp(\sqrt{-1}\xi_k X_k)] = \prod_{k=1}^{n} E[f_k(X_k)]$$

これより $a_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, n$, に対して

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}((-\infty, a_k)) = E[\prod_{k=1}^{n} 1_{(-\infty, a_k}(X_k)] = \prod_{k=1}^{n} E[1_{(-\infty, a_k)}(X_k)] = \prod_{k=1}^{n} P(X_k^{-1}((-\infty, a_k))$$

となり、独立であることがわかる。

∎

3.2　ブラウン運動とその存在

定義 3.2.1 確率過程 $B : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ が d-次元標準ブラウン運動（ウィナー過程とも呼ばれる）であるとは、$B(t, \omega) = (B^1(t, \omega), \ldots, B^d(t, \omega))$, $t \in [0, \infty)$, $\omega \in \Omega$, に対して以下の条件を満たすこと。
(1) $B^i(\cdot, \omega) \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, d$, $\omega \in \Omega$, が連続となること。
(2) $n \geqq 2$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ に対して $B^i(t_k) - B^i(t_{k-1})$, $i = 1, \ldots, d$, $k = 1, \ldots, n$, が独立となる。
(3) $B(0) = 0$ であり、任意の $t > s \geqq 0$, $i = 1, \ldots, d$, に対して $B^i(t) - B^i(s)$ は平均 0 分散 $t - s$ のガウス確率変数となる。

命題 3.2.2 $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F}$ は $[0, 1)$ に含まれるボレル集合全体の集合、P は $[0, 1)$ 上のルベーグ測度とする。この時、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に d-次元標準ブラウン運動は存在する。

以下にこれを証明する。

Step 1.　$\eta_n : \Omega \to \{0, 1\}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ を

$$\eta_n(\omega) = [2^n \omega] - 2[2^{n-1}\omega], \qquad \omega \in [0, 1)$$

で与える。ただし、$[x]$, $x \in \mathbf{R}$ は x 以下の最大整数。この時、

$$\{\omega \in \Omega;\ \eta_1(\omega) = i_1, \eta_2(\omega) = i_2, \ldots, \eta_n(\omega) = i_n\} = [\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{2^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{2^k} + \frac{1}{2^n}),$$

$n \geqq 1$, $i_1, \ldots, i_n = 0, 1$, が成立するので、

$$P(\eta_n = 0) = P(\eta_n = 1) = \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

であり、η_n, $n \in Z_{\geqq 1}$ が独立であることがわかる。

演習問題 2 これを証明せよ

また、

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_k(\omega), \qquad \omega \in [0, 1)$$

が成立する。よって、$Z_n : \Omega \to [0, 1]$, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ を

$$Z_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_{2^n(2k+1)}(\omega), \qquad \omega \in \Omega$$

で定義すれば、Z_n, $n \in \mathbf{Z}_{\geqq 1}$ は独立な確率変数列で

$$P(Z_n \in [0, x)) = x, \qquad x \in (0, 1)$$

が成立する。

演習問題 3 これを証明せよ

$\Phi:\mathbf{R}\to(0,1)$ を標準正規分布の分布関数

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{y^2}{2})dy,\qquad x\in\mathbf{R}$$

とすると $\Phi:\mathbf{R}\to(0,1)$ は真に単調増大な連続関数で全単射となる。よって、連続な逆関数 $\Phi^{-1}:(0,1)\to\mathbf{R}$ が存在する。

$W_{n,m,i}$, $n\in\mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $m\in\mathbf{Z}_{\geqq 1}$, $i=1,\dots,d$, を

$$W_{n,m,i}=\Phi^{-1}(Z_{2^n3^m5^i})$$

で定めると $W_{n,m,i}$, $n\in\mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $m\in\mathbf{Z}_{\geqq 1}$, $i=1,\dots,d$, は独立なガウス確率変数の族で、その平均は 0, 分散は 1 となる。

Step 2. $\psi_{n,m}:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $m\in\mathbf{Z}_{\geqq 1}$, を以下で定義する。

$$\psi_{0,m}(t)=\begin{cases}1, & t\in[m-1,m),\\ 0, & t\notin[m-1,m),\end{cases}\qquad m\geqq 1\,,$$

$$\psi_{n,m}(t)=\begin{cases}2^{(n-1)/2}, & t\in[\frac{2m-2}{2^n},\frac{2m-1}{2^n}),\\ -2^{(n-1)/2}, & t\in[\frac{2m-1}{2^n},\frac{2m}{2^n}),\\ 0, & t\notin[2^{-(n-1)}(m-1),2^{-(n-1)}m),\end{cases}\qquad n,m\geqq 1.$$

この時、$\{\psi_{n,m};\ n\geqq 0,\ m\geqq 1\}$ は $L^2([0,\infty),dt)$ の完全正規直交系をなす。すなわち、

$$\int_0^\infty \psi_{n,m}(t)\psi_{k,\ell}(t)dt=\begin{cases}1, & n=k,\ m=\ell \text{ の時}\\ 0, & \text{それ以外の時}\end{cases}$$

であり、$0\leqq a<b$ に対して

$$\int_0^\infty |1_{(a,b)}(t)-\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{N}(\int_a^b\psi_{n,m}(s)ds)\psi_{n,m}(t))|^2dt\to 0,\qquad N\to\infty$$

が成り立つ。

$\varphi_{n,m}:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{Z}_{\geqq 0}$, $m\in\mathbf{Z}_{\geqq 1}$, を以下で定義する。

$$\varphi_{n,m}(t)=\int_0^t\psi_{n,m}(s)ds,\qquad t\in[0,\infty),\ n\geqq 0,\ m\geqq 1.$$

容易に

$$|\varphi_{n.m}(t)|\leqq 2^{-n/2},\qquad t\in[0,\infty),\ n\geqq 0,\ m\geqq 1,$$

であり、

$$\varphi_{0,m}(t)=0,\qquad t\in[0,m-1],\ m\geqq 1,$$

かつ

$$\varphi_{n,m}(t)=0,\qquad t\notin[2^{-(n-1)}(m-1),2^{-(n-1)}m),\ n,m\geqq 1,$$

であることがわかる。従って、任意の $a_m\in\mathbf{R}$, $m\geqq 1$, に対して $\sum_{m=1}^\infty a_m\varphi_{n,m}(t)$ は有限和であり、任意の $N\in\mathbf{Z}_{\geqq 1}$ に対して

$$|\sum_{m=1}^\infty a_m\varphi_{0,m}(t)|\leqq\sum_{m=1}^N|a_m|,\qquad t\in[0,N],$$

$$|\sum_{m=1}^{\infty} a_m\varphi_{n,m}(t)| \leqq 2^{-n/2}\max\{|a_m|;\ m=1,\ldots,2^{n-1}N\}, \qquad t\in[0,N],\ n\geqq 1$$

となる。さて、$r \geqq 1$, $i=1,\ldots,d$, に対して確率過程 $X_r^i : [0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}$ を

$$X_r^i(t) = \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{\infty} W_{n,m,i}\varphi_{n,m}(t) \qquad t\in[0,\infty)$$

により定義する。明らかに $X_r^i(t,\omega)$ は t について連続である。さらに、$0\leqq s<t$ に対して

$$X_r^i(t)-X_r^i(s) = \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{\infty} W_{n,m,i}\int_s^t \psi_{n,m}(u)du$$

である。

$\mathcal{X}$ を $W_{n,m,i},\ n\geqq 0,\ m\geqq 1,\ i=1,\ldots,d,$ の一次結合全体の集合 とおくと、$\mathcal{X}$ はガウス系であり、$X_r(t)\in\mathcal{X}$ となる。

$b>a\geqq 0$ に対して

$$Y_r^i(a,b) = X_r^i(b)-X_r^i(b)$$

とおくと、$Y_r^i(a,b)\in\mathcal{X}$ であり、$E[Y_r^i(a,b)]=0$, $b>a\geqq 0$, $i=1,\ldots,d$, $E[Y_r^i(a,b)Y_r^j(a',b')]=0$, $i\neq j$, $i,j=1,\ldots,d$, $b>a\geqq 0$, $b'>a'\geqq 0$, である。

また、$b>a\geqq 0$, $d>c\geqq 0$, に対して

$$E[Y_r^i(a,b)Y_i^r(c,d)] = E[(\sum_{n,k=0}^{r}\sum_{m,\ell=0}^{\infty} W_{n,m,i}W_{k,\ell,i}(\int_a^b\psi_{n,m}(t)dt)(\int_c^d\psi_{k,\ell,i}(t)dt)]$$

$$= \sum_{n=0}^{r}\sum_{m=0}^{\infty}(\int_a^b\psi_{n,m}(t)dt)(\int_c^d\psi_{k,\ell,i}(t)dt)$$

となる。特に、$\varphi_{n,m}$ が完全正規直交系であったので

$$E[Y_r^i(a,b)Y_r^i(c,d)] \to \int_0^\infty 1_{(a,b)}(t)1_{(c,d)}(t)dt, \qquad r\to\infty$$

がわかる。

さて、 $N,r\in\mathbf{Z}_{\geqq 1}$ に対して

$$\sup_{t\in[0,N]}|X_{r+1}^i(t)-X_r^i(t)| = \sup_{t\in[0,N]}|\sum_{m=0}^{\infty} W_{r+1,m,i}\psi_{r+1,m}(t)| \leqq 2^{-r/2}\max\{|W_{r+1,m,i}|;\ m=1,\ldots,2^rN\}.$$

よって

$$E[\sup_{t\in[0,N]}|X_{r+1}^i(t)-X_r^i(t)|^4] \leqq 2^{-2r}E[\max\{|W_{r+1,m,i}|^4;\ m=1,\ldots,2^rN\}$$

$$\leqq 2^{-2r}\sum_{m=1}^{2^rN}E[|W_{r+1,m,i}|^4] = 3N2^{-r}$$

となるので

$$E[\sum_{r=1}^{\infty}\sup_{t\in[0,N]}|X_{r+1}^i(t)-X_r^i(t)|] \leqq \sum_{r=1}^{\infty}E[\sup_{t\in[0,N]}|X_{r+1}^i(t)-X_r^i(t)|^4]^{1/4} < \infty$$

がわかる。よって、$\Omega_0\in\mathcal{F}$ を

$$\Omega_0 = \bigcap_{i=1}^{d}\bigcap_{N=1}^{\infty}\{\sum_{r=1}^{\infty}\sup_{t\in[0,N]}|X_{r+1}^i(t)-X_r^i(t)|<\infty\}$$

とおけば、$P(\Omega_0)=1$ となることがわかる。さて、$B^i:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}$, $i=1,\dots,d$, を

$$B^i(t,\omega)=\begin{cases}\lim_{r\to\infty}X_r^i(t,\omega), & \omega\in\Omega_0,\\ 0, & \omega\notin\Omega_0,\end{cases}$$

で定めると、$B^i(t,\omega)$ は t について連続であることがわかり、任意の $n\geqq 1$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, $\xi_{i,k}\in\mathbf{R}$, $i=1,\dots,d$, $k=1,\dots,n$, に対して

$$E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^n\xi_{i,k}(B^i(t_k)-B^i(t_{k-1})))]$$

$$=\lim_{r\to\infty}E[\exp(\sqrt{-1}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^n\xi_{i,k}(X_r^i(t_k)-X_r^i(t_{k-1})))]$$

$$=\lim_{r\to\infty}\prod_{i=1}^d E[\exp(\sqrt{-1}\int_0^\infty(\sum_{k=1}^n\xi_{i,k}Y_r(t_{k-1},t_k)]$$

$$=\prod_{i=1}^d\exp(-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^n\xi_{i,k}^2(t_k,t_{k-1})(t))]=\exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^n\xi_{i,k}^2(t_k-t_{k-1}))$$

となることがわかる。よって、 $B=(B^1,\dots,B^d)$ は d-次元ブラウン運動である。

∎

3.3 確率空間の完備化

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とする。$\mathcal{N}_0=\mathcal{N}_0(\mathcal{F},P)\subset\mathcal{P}(\Omega)$ を以下で定義する。ただし、 $\mathcal{P}(\Omega)$ は Ω の部分集合全体の集合である。

$$\mathcal{N}_0=\{A\in\mathcal{P}(\Omega);\ \ P(B)=0 \text{ となる } B\in\mathcal{F} \text{ が存在して } A\subset B\}$$

必ずしも $\mathcal{N}_0\subset\mathcal{F}$ とは限らない。

さらに $\tilde{\mathcal{F}}\subset\mathcal{P}$ を

$$\tilde{\mathcal{F}}=\{A\in\mathcal{P}(\Omega);\ B_0\subset A\subset B_1,\ P(B_1\setminus B_2 \text{ となる } B_0,B_1\in\mathcal{F} \text{ が存在する }\}$$

とおく。この時、以下が成立する。

命題 3.3.1 (1) 次の 2 条件は同値。

(i) $A\in\tilde{\mathcal{F}}$.

(ii) $B\in\mathcal{F}$, $A_0\in\mathcal{N}_0$ で $A=B\cup A_0$ となるものが存在する。

(2) $\tilde{\mathcal{F}}$ は Ω 上の　σ-加法族で $\mathcal{F}\subset\tilde{\mathcal{F}}$ となる。

(3) $B_1,B_2\in\mathcal{F}$, $A_1,A_2\in\mathcal{N}_0$ が $B_1\cup A_1=B_2\cup A_2$ を満たせば $P(B_1)=P(B_2)$.

(4) $\tilde{P}:\tilde{\mathcal{F}}\to[0,1]$ を $\tilde{P}(B\cap A_0)=P(B)$, $B\in\mathcal{F}$, $A_0\in\mathcal{N}_0$, で定めると、$(\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ は確率空間となる。

演習問題 4 上記の命題を証明せよ。

$(\Omega,\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ の完備化と呼ぶ。

命題 3.3.2 $\mathcal{N}_0(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})=\mathcal{N}_0(\mathcal{F},P)$ となる。特に、$\mathcal{N}_0(\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})\subset\tilde{\mathcal{F}}$ となる。

$\mathcal{N}_0(\mathcal{F},P)\subset\mathcal{F}$ となる時、$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を完備な確率空間と呼ぶ。

3.4　ブラウニアンフィルトレーション

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間とする。$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F};\ P(B) = 0, 1\}$ とおくと $\mathcal{N}$ は部分 σ-集合族となる。

命題 3.4.1 X は確率変数、 $c \in \mathbf{R}$ とする。$X = c\ a.s.$ ならば X は $\mathcal{N}$-可測である。

証明。 $A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ に対して $c \in A$ ならば $P(X^{-1}(A)) = 1$, $c \notin A$ ならば $P(X^{-1}(A)) = 0$, となるのでいずれの場合も $X^{-1}(A) \in \mathcal{N}$ となり主張を得る。

∎

$B(t) = (B^1(t), \ldots, B^d(t))$, $t \geqq 0$, を d-次元標準ブラウン運動とする。今、$\mathcal{G}_t = \sigma\{B(s);\ s \in [0,t], t \geqq 0$, とおき、さらに、$\tilde{\mathcal{G}}_t = \sigma\{\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}\}$, $t \geqq 0$, とおく。

命題 3.4.2 (1) $t \geqq 0$ に対して $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$ であり、$B^i(t)$, $i = 1, \ldots, d$, は $\mathcal{G}_t$-可測。
(2) $0 \leqq s < t$, ならば $\tilde{\mathcal{G}}_s \subset \tilde{\mathcal{G}}_t$ であり、$\sigma\{B^i(t) - B^i(s);\ i = 1, \ldots, d\}$ と $\mathcal{G}_s$ は独立。
(3) $\tilde{\mathcal{G}}_{t+} = \bigcap_{s>t} \tilde{\mathcal{G}}_s = \tilde{\mathcal{G}}_t$

以下にこれを証明する。

主張 (1) と主張 (2) の前半は明らか。

今、$t \geqq 0$ に対して $\mathcal{H}_t = \sigma\{B^i(r) - B^i(t);\ r > t,\ i = 1, \ldots, d\}$ とおく。また、$t > s \geqq 0$ に対して $\Delta B^i(s,t) = B^i(t) - B^i(s)$ とおく。

仮定より任意の $t > 0$, $0 = s_0 < s_1 \cdots < s_n = t$, 及び $t = r_0 < r_1 < \cdots < r_m$, に対して $\Delta B^i(s_{k-1}, s_k)$, $i = 1, \ldots, d$, $k = 1, \ldots, n$, $\Delta B^i(r_{\ell-1}, s_\ell)$, $i = 1, \ldots, d$, $\ell = 1, \ldots, m$, は独立となる。よって、

$$\mathcal{K}_{s_0, \ldots, s_n} = \sigma\{\Delta^i(s_{k-1}, s_k),\ i = 1, \ldots, d,\ k = 1, \ldots, n\}$$

$$\mathcal{K}_{r_0, \ldots, r_m} = \sigma\{\Delta^i(r_{k-1}, r_k),\ i = 1, \ldots, d,\ k = 1, \ldots, m\}$$

とおくと、命題 2.8 より $\mathcal{K}_{s_0, \ldots, s_n}$ と $\mathcal{K}_{r_0, \ldots, r_m}$ とは独立となる。

さらに

$$\mathcal{A}_{t,0} = \bigcup\{\mathcal{K}_{s_0, \ldots, s_n};\ n \geqq 1,\ 0 = s_0 < s_1 \cdots < s_n = t\},$$

$$\mathcal{A}_{t,1} = \bigcup\{\mathcal{K}_{r_0, \ldots, r_m};\ m \geqq 1,\ t = r_0 < r_1 \cdots < r_m\}$$

とおくと、$\mathcal{A}_{t,0}$, $\mathcal{A}_{t,1}$ は独立で π-系となる。$\mathcal{G}_t = \sigma\{\mathcal{A}_{t,0}\}$, $\mathcal{H}_t = \sigma\{\mathcal{A}_{t,1}\}$ であるので、命題 2.7 より $\mathcal{G}_t$ と $\mathcal{H}_t$ は独立となる。

これより、$\mathcal{G}_t$, $\mathcal{H}_t$, $\mathcal{N}$ が独立となることが容易に示されるので、$\tilde{\mathcal{G}}_t$ と $\mathcal{H}_t$ は独立となる。

演習問題 5 これを証明せよ

これより (2) の後半がわかる。

また、$\tilde{\mathcal{H}}_t = \sigma\{\mathcal{H}_t \cup \mathcal{N}_0\}$ とおくと、 $\tilde{\mathcal{G}}_t$ と $\tilde{\mathcal{H}}_t$ も独立となることがわかる。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\tilde{\mathcal{G}}_{t+\varepsilon}$ と $\mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は独立。よって、$\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$ と $\mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は独立。よって、$\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$ と $\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は独立。$\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{t+\varepsilon}$ は π-系で

$$\mathcal{H}_t = \sigma\{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_{t+\varepsilon}\}$$

である。

演習問題 6 これを証明せよ

よって命題 2.7 より $\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$ と $\mathcal{H}_t$ は独立となる。

今、X は $\tilde{\mathcal{G}}_{t+}$-可測な有界な非負値確率変数とする。また、$\mathcal{A} = \{A \cap B;\ A \in \mathcal{G}_t,\ B \in \tilde{\mathcal{H}}_t\}$ とおく。この時、 $\mathcal{A}$ は π-系で $\tilde{\mathcal{G}}_{t+} \subset \sigma\{\mathcal{A}\}$ であることも容易にわかる。

この時、$A \in \mathcal{G}_t$, $B \in \tilde{\mathcal{H}}_t$ に対して

$$E[X, A \cap B] = E[X 1_A 1_B] = E[X 1_A] E[1_B] = E[E[X|\mathcal{G}_t] 1_A] E[1_B] = E[E[X|\mathcal{G}_t] A \cap B]$$

よって命題 1.12 より、

$$E[X, C] = E[E[X|\mathcal{G}_t], C] \qquad C \in \tilde{\mathcal{G}}_{t+}$$

となる。$n \geqq 1$ に対して

$$0 \leqq \frac{1}{n} P(X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n) = E[\frac{1}{n} 1_{\{X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n\}}] \leqq E[X, X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n] = 0$$

より $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] > 1/n) = 0$ がわかる。よって $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] > 0) = 0$ がわかる。同様にして $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] < 0) = 0$ がわかるので $P(X - E[X|\mathcal{G}_t] = 0) = 1$ を得る。

$C = \{X = E[X|\mathcal{G}]\}$ とおくと $P(\Omega \setminus C) = 0$, $C \in \mathcal{N}$ であり、

$$X = 1_C E[X|\mathcal{G}_t] + 1_{\Omega \setminus C} X$$

であるので、X が $\tilde{\mathcal{G}}_t$-可測であることがわかる。よって $\tilde{\mathcal{G}}_{t+} = \tilde{\mathcal{G}}_t$ が示された。

∎

第 4 章　連続時間マルチンゲール

4.1　連続過程

定義 4.1.1 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ が標準条件を満たすフィルター付き確率空間であるとは、以下の 4 条件を満たすこと。

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は完備な確率空間である。

(2) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ はフィルトレーションである。則ち、$\mathcal{F}_t$ は部分 σ-加法族であり、$0 \leqq s < t$ ならば $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

(3) $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F};\ P(A) = 0$ または $1\}$ とおくと $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$, $t \in [0, \infty)$.

(4) $\mathcal{F}_{t+} = \bigcup_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$, $t \in [0, \infty)$.

以後、特に断らない限り $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ が標準条件を満たすフィルター付き確率空間とする。
[記法] この講義では以下のような記号を用いる。

$\mathcal{X}_c$ は以下の条件 (1),(2) を満たす写像 $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ の集合

(1) すべての $\omega \in \Omega$ に対して $X(\cdot, \omega) : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ は連続。

(2) すべての $t \in [0, \infty)$ に対して $X(t, \cdot) : \Omega \to \mathbf{R}$ は $\mathcal{F}_t$-可測。

$\mathcal{X}_c^2$ は以下の条件を満たす $X \in \mathcal{X}_c$ の集合
任意の $T > 0$ に対して

$$E[\sup_{t\in[0,T]} X(t)^2] < \infty$$

が成立する。

$\mathcal{X}_c^\infty$ は以下の条件を満たす $X \in \mathcal{X}_c$ の集合
$M > 0$ が存在して

$$|X(t, \omega)| \leqq M, \qquad t \in [0, \infty),\ \omega \in \Omega$$

が成立する。

明らかに $\mathcal{X}_c^\infty \subset \mathcal{X}_c^2$ である。

命題 4.1.2 $X_n \in \mathcal{X}_c^2$, $n = 1, 2, \ldots,$ が次の条件を満たすとする。
すべての $T > 0$ に対して

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |X_n(t) - X_m(t)|^2] \to 0, \qquad n, m \to \infty.$$

この時、以下の条件を満たす $X \in \mathcal{X}_c^2$, $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, および部分列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する。

(1) $P(\Omega_0) = 1$ であり、$\omega \in \Omega_0$ ならば

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_{n_k}(t, \omega) - X(t, \omega)| \to 0,\ k \to \infty, \qquad T > 0.$$

(2) $E[\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - X_n(t)|^2] \to 0,\ n \to \infty, \qquad T > 0.$

証明. $k \geqq 1$ とする。仮定より $m_k \geqq 1$ が存在して

$$E[\sup_{t\in[0,k]} |X_n(t) - X_m(t)|^2] \leqq \frac{1}{4^k}, \qquad n, m \geqq m_k$$

が成立する。$n_k = m_1 + \cdots + m_k,\ k \geqq 1,$ とおくと

$$E[\sup_{t\in[0,k]} |X_{n_{k+1}}(t) - X_{n_k}(t)|] \leqq E[\sup_{t\in[0,k]} |X_{n_{k+1}}(t) - X_{n_k}(t)|^2]^{1/2} \leqq \frac{1}{2^k}$$

を得る。よって

$$E[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in[0,k]} |X_{n_{k+1}}(t) - X_{n_k}(t)|] \leqq 1$$

がわかる。$\Omega_0 \in \mathcal{F}$ を

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega;\ \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in[0,k]} |X_{n_{k+1}}(t) - X_{n_k}(t)| < \infty\}$$

とおくと $P(\Omega_0) = 1$ であり、$\omega \in \Omega_0$ ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in[0,T]} |X_{n_{k+1}}(t) - X_{n_k}(t)| < \infty \qquad T > 0$$

であることがわかる。よって、

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_{n_\ell}(t,\omega) - X_{n_k}(t,\omega)| \to 0,\ k, \ell \to \infty, \qquad T > 0$$

となる。従って

$$\tilde{X}(t,\omega) = \lim_{k\to\infty} X_{n_k}(t,\omega), \qquad t \in [0,\infty),\ \omega \in \Omega_0$$

とおくと、$\tilde{X}(\cdot,\omega) : [0,\infty) \to \mathbf{R},\ \omega \in \Omega_0,$ は連続。これより、$X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ を

$$X(t,\omega) = \begin{cases} \tilde{X}(t,\omega), & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases}$$

とおくと、$\Omega_0 \in \mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ であるので, $X(t)$ が $\mathcal{F}_t$-可測であることがわかり、$X \in \mathcal{X}_c$ となることがわかる。また、

$$\sup_{[0,T]} |X(t,\omega) - X_{n_k}(t,\omega)| \to 0,\ k, \to \infty, \qquad T > 0,\ \omega \in \Omega_0$$

である。

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - X_n(t)|^2] = E[\varliminf_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |X_{n_k}(t) - X_n(t)|^2]$$

$$\leqq \varliminf_{k\to\infty} E[\sup_{t\in[0,T]} |X_{n_k}(t) - X_n(t)|^2] \leqq \frac{1}{4^\ell}, \qquad n \geqq n_\ell,\ \ell > T$$

であるので

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - X_n(t)|^2] \to 0,\ n \to \infty, \qquad T > 0$$

がわかる。

∎

4.2 連続マルチンゲール

定義 4.2.1 $M : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ が ($\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,\infty)}$)- 連続マルチンゲールであるとは以下の 3 条件を満たすこと。
(1) $M \in \mathcal{X}_c$
(2) $E[|M(t)|] < \infty$, $t \in [0, \infty)$
(3) 任意の $t > s \geqq 0$ に対して

$$E[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s)$$

[記法] $\mathcal{M}_c^2$ は以下の条件を満たす M の集合とする。
(1) M は連続マルチンゲール
(2) $M(0) = 0$, $E[M(t)^2] < \infty$, $t \in [0, \infty)$.

命題 4.2.2 (1) $M \in \mathcal{M}_c^2$ ならば

$$E[\sup_{t \in [0,T]} M(t)^2] \leqq 4E[M(T)^2], \qquad T > 0.$$

特に $\mathcal{M}_c^2 \subset \mathcal{X}_c^2$.
(2) $M_n \in \mathcal{M}_c^2$, $n = 1, 2, \ldots,$ が

$$E[|M_n(t) - M_m(t)|^2] \to 0,\ n, m \to \infty, \qquad t \in [0, \infty)$$

を満たすならば、以下の条件を満たす $M \in \mathcal{M}_c^2$, $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, 部分列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する。
(i) $P(\Omega_0) = 1$ であり、$\omega \in \Omega_0$ ならば

$$\sup_{[0,T]} |M_{n_k}(t, \omega) - M(t, \omega)| \to 0,\ k \to \infty, \qquad T > 0.$$

(ii) $E[\sup_{t \in [0,T]} |M(t) - M_n(t)|^2] \to 0,\ n \to \infty, \qquad T > 0.$

証明. (1) $T > 0$ とする。$t_k = kT/2^n$, $k = 0, 1, 2 \ldots,$ とおくと

$$E[M(t_k)|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] = M(t_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

となるので $\{M(t_k)\}_{k=0}^\infty$ は $\{\mathcal{F}_{t_k}\}_{k=0}^\infty$-マルチンゲール。よって離散時間マルチンゲールに対する Doob の不等式より

$$E[\max_{k=0,1,\ldots,2^n} M(t_k)^2] \leqq 4E[M(t_{2^n})^2]$$

則ち

$$E[\max_{k=0,1,\ldots,2^n} M(\frac{k}{2^n}T)^2] \leqq 4E[M(T)^2]$$

となる。

$$\max_{k=0,1,\ldots,2^n} |M(\frac{k}{2^n}T)|^2 \uparrow \sup_{t \in [0,T]} M(t)^2,\ n \to \infty$$

であるので

$$E[\sup_{t \in [0,T]} M(t)^2] = \lim_{n \to \infty} E[\max_{k=0,1,\ldots,2^n} M(\frac{k}{2^n}T)^2] \leqq 4E[M(T)^2].$$

(2) 命題 4.1.2 より $M \in \mathcal{X}_c^2$ $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, 部分列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して以下が成立する。
(i) $P(\Omega_0) = 1$ であり、$\omega \in \Omega_0$ ならば

$$\sup_{t \in [0,T]} |M_{n_k}(t, \omega) - M(t, \omega)| \to 0,\ k \to \infty, \qquad T > 0.$$

(ii) $E[\sup_{t\in[0,T]}|M(t)-M_n(t)|^2]\to 0,\ n\to\infty,\qquad T>0.\ t>s\geqq\geqq 0$ に対して

$$E[|E[M(t)|\mathcal{F}_s]-M(s)|]=E[|E[M(t)-M_n(t)|\mathcal{F}_s]-(M(s)-M_n(s)|]$$

$$\leqq E[|E[M(t)-M_n(t)|\mathcal{F}_s]|]+E[|M(s)-M_n(s)|]\leqq E[|M(t)-M_n(t)|]+E[|M(s)-M_n(s)|]$$

$$\leqq E[|M(t)-M_n(t)|^2]^{1/2}+E[|M(s)-M_n(s)|^2]^{1/2}\to 0,\qquad n\to\infty$$

であるので

$$E[M(t)|\mathcal{F}_s]=M(s)\ a.s.$$

がわかる。よって M は連続マルチンゲールである。

∎

4.3 停止時刻

定義 4.3.1 $\tau:\Omega\to\mathbf{R}$ が ($\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$)- 停止時刻であるとは、任意の $t\in[0,\infty)$ に対して

$$\{\tau\leqq t\}\in\mathcal{F}_t$$

となること。

定義 4.3.2 Δ が $[0,\infty)$ の分割であるとは、$\Delta=\{t_n;\ n=0,1,2,\ldots\}\subset[0,\infty)$ であり、$0=t_0<t_1<t_2<\cdots$ かつ $t_n\to\infty,\ n\to\infty$ となること。

[記法] $[0,\infty)$ の分割 Δ に対して $\rho_\Delta:[0,\infty]\to[0,\infty]$ を

$$\rho_\Delta(t)=\begin{cases} t_{k+1}, & t\in[t_k,t_{k+1}),\ k=0,1,2\ldots \text{の時}, \\ \infty, & t=\infty \text{ の時}\end{cases},$$

により定める。

命題 4.3.3 停止時刻 τ および $[0,\infty)$ の分割 Δ に対して $\tau_\Delta:\Omega\to[0,\infty]$ を $\tau_\Delta(\omega)=\rho_\Delta(\tau(\omega)),\ \omega\in\Omega$ で定める。この時、τ_Δ は停止時刻。

証明. $\Delta\ \ \{t_k;\ k=0,1,2,\ldots\}$ とする。$t\in[t_{k-1},t_k),\ k=1,2,\ldots,$ ならば

$$\{\tau_\Delta\leqq t\}=\{\tau_\Delta\leqq t_{k-1}\}=\{\tau<t_{k-1}\}$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau\leqq t_{k-1}-\frac{1}{n}\}\in\mathcal{F}_{t_{k-1}}\subset\mathcal{F}_t$$

よって τ_Δ は停止時刻である。

∎

[記法] $X\in\mathcal{X}_c$, 停止時刻 τ に対して $X^\tau:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}$ を

$$X^\tau(t,\omega)=X(t\wedge\tau(\omega),\omega),\qquad t\in[0,\infty),\ \omega\in\Omega$$

により定める。

命題 4.3.4 $\Delta_n=\{\frac{k}{2^n};\ n=0,1,2,\ldots\},\ n\geqq 1,$ とおく。
(1) Δ_n は $[0,\infty)$ の分割である。また、$\rho_{\Delta_n}(t)\downarrow t,\ n\to\infty,\ t\in[0,\infty)$.
(2) $X\in\mathcal{X}_c,\ \tau$ は停止時刻とする。この時、$\tau_n=\tau_{\Delta_n}$ とおくと、$X^{\tau_n}\in\mathcal{X}_c$. さらに、$X^\tau\in\mathcal{X}_c$.

証明. (1) は明らか。(2) を示す。

$X^{\tau_n}(\cdot,\omega):[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $X^{\tau}(\cdot,\omega):[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $\omega\in\Omega$, が連続であることは明らか。

$n\geqq 1$ とする。$t\in[2^{-n}(k-1),2^{-n}k)$, $k=1,2,\ldots,$ の時

$$X^{\tau_n}(t)=\sum_{\ell=0}^{k-1}1_{\{\tau_n=2^{-n}\ell\}}X(2^{-n}\ell)+1_{\{\tau_n\geqq 2^{-n}k\}}X(t)$$

となる。

$$\{\tau_n=2^{-n}\ell\}=\{\tau_n\leqq 2^{-n}\ell\}\setminus\{\tau_n\leqq 2^{-n}(\ell-1)\}\in\mathcal{F}_{2^{-n}\ell},$$

$$\{\tau_n\geqq 2^{-n}k\}=\Omega\setminus\{\tau_n\leqq 2^{-n}(k-1)\}\in\mathcal{F}_{2^{-n}(k-1)}$$

であるので、$X^{\tau_n}(t)$ が $\mathcal{F}_t$-可測であることがわかる。

また、(1) より $n\to\infty$ の時

$$X^{\tau_n}(t,\omega)=X(t\wedge\rho_{\Delta_n}(\tau(\omega)),\omega)$$

$$\to X(t\wedge\tau(\omega),\omega)=X^{\tau}(t,\omega)$$

$t\in[0,\infty)$, $\omega\in\Omega$, であるので $X^{\tau}(t)$ も $\mathcal{F}_t$-可測であることがわかる。

これより (2) を得る。

∎

命題 4.3.5 M が連続マルチンゲール、τ は停止時刻とする。もし、

$$E[\sup_{t\in[0,T]}|M(t)|]<\infty$$

がすべての $T>0$ に対して成立するならば、M^{τ} も連続マルチンゲールとなる。

証明. 命題 4.3.4 より $M^{\tau}\in\mathcal{X}_c$ である。今、$0\leqq< s<t$ とする。$n\geqq 1$ とする。$\Delta_n=\{s,t\}\cup\{2^{-n}k;\ k=0,1,2,\ldots\}$ とおくと Δ_n は $[0,\infty)$ の分割である。今、$\Delta_n=\{t_k;\ k=0,1,2,\ldots\}$, $0=t_0<t_1<t_2<\cdots$, とする。また、$\tau_n=\rho_{\Delta_n}(\tau)$ とおく。τ_n は停止時刻である。

$N_k=M(t_k)$, $\mathcal{G}_k=\mathcal{F}_{t_k}$, $k=0,1,2,\ldots,$ とおくと $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ は $\{\mathcal{G}_k\}_{k=0}^{\infty}$-マルチンゲール。また、$\sigma:\Omega\to\mathbf{Z}_{\geqq 0}\cup\{\infty\}$ を

$$\sigma(\omega)=\begin{cases} k, & \tau_n=t_k \text{ の時 }, k=0,1,\ldots, \\ \infty, & \tau_n=\infty \text{ の時 }, k=0,1,\ldots, \end{cases}$$

で定めると

$$\{\sigma\leqq k\}=\{\tau_n\leqq t_k\}\in\mathcal{F}_{t_k}=\mathcal{G}_k$$

であるので σ は $\{\mathcal{G}_k\}_{k=0}^{\infty}$-停止時刻である。よって $\{N_k^{\sigma}\}_{k=0}^{\infty}$ は $\{\mathcal{G}_k\}_{k=0}^{\infty}$-マルチンゲール。さらに

$$M^{\tau_n}(t_k,\omega)=M(t_k\wedge\tau_n(\omega),\omega)=N(k\wedge\sigma(\omega),\omega)$$

であるので $0\leqq k<\ell$ ならば

$$E[M^{\tau_n}(t_k)|\mathcal{F}_{t_\ell}]=M^{\tau_n}(t_\ell)$$

であることがわかる。$s,t\in\Delta_n$ であるので

$$E[M^{\tau_n}(t)|\mathcal{F}_s]=M^{\tau_n}(s)$$

となることがわかる。

$M^{\tau_n}(t) \to M^{\tau}(t),\ n \to \infty,$ であり、

$$|M^{\tau_n}(t) - M^{\tau}(t)| \leqq 2 \sup_{r \in [0,t]} |M(r)|$$

であるので

$$E[|M^{\tau_n}(t) - M^{\tau}(t)|] \to 0, \qquad n \to \infty$$

がわかる。よって

$$E[|E[M^{\tau}(t)|\mathcal{F}_s] - M^{\tau}(s)|] = E[|E[M^{\tau}(t) - M^{\tau}_n(t)|\mathcal{F}_s] - (M^{\tau}(s) - M^{\tau}_n(s))|]$$

$$\leqq E[|E[M^{\tau}(t) - M^{\tau}_n(t)|\mathcal{F}_s]|] + E[|M^{\tau}(s) - M^{\tau}_n(s|)] \to 0, \qquad n \to \infty$$

であるので

$$E[M^{\tau}(t)|\mathcal{F}_s] = M^{\tau}(s)\ a.s.$$

を得る。よって M^{τ} が連続マルチンゲールであることがわかる。

∎

命題 4.3.6 $M \in \mathcal{M}^2_c,\ \tau$ は停止時刻とする。この時、$M^{\tau} \in \mathcal{M}^2_c$ である。

証明. Doob の不等式より

$$E[\sup_{r \in [0,t]} M(r)^2] \leqq 4E[M(t)^2] < \infty$$

となることがわかる。また、

$$E[\sup_{r \in [0,t]} |M(r)|] \leqq E[\sup_{r \in [0,t]} |M(r)|^2]^{1/2}$$

であるので命題 4.3.5 より M^{τ} が連続マルチンゲールであることがわかる。

また、

$$E[M^{\tau}(t)^2] \leqq E[\sup_{r \in [0,t]} |M(r)|^2] < \infty$$

であるので、 $M \in \mathcal{M}^2_c$ がわかる。

∎

命題 4.3.7 $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ に対して以下の 2 つの命題は同値である.。
(1) τ は停止時刻。
(2) 任意の $t > 0$ に対して $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ が成立する。

演習問題 7 上の命題を証明せよ。

命題 4.3.8 τ, σ が停止時刻であるならば $\tau \wedge \sigma,\ \tau \vee \sigma,\ \tau + \sigma$ も停止時刻となる。

演習問題 8 上の命題を証明せよ。

命題 4.3.9 $X \in \mathcal{X}_c,\ E[|X(t)|] < \infty,\ t \geqq 0,$ とする。また、$\Delta = \{t_k;\ k = 0,1,\ldots\}$ は $[0,\infty)$ の分割 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$) とする。もし、任意の $s < t,\ s,t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1,2,\ldots$ に対して

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$$

が成立するならば X は連続マルチンゲール。

証明. $t > s \geqq 0$ とする。この時、$\ell \leqq k$ で $s \in [t_{\ell-1}, t_\ell]$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$ となるものが存在する。$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$ であることを $k-\ell$ の帰納法で示す。

$k-\ell=0$ の時は仮定より明らか、$k-\ell=n$ の時成立すると仮定すると $k-\ell=n+1$ の時

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = E[E[E[X(t)|\mathcal{F}_{t_\ell}]|\mathcal{F}_s] = E[X(t_k)|\mathcal{F}_s] = X(s)$$

となることがわかる。

よって X が連続マルチンゲールであることがわかる。

∎

命題 4.3.10 $M, N \in \mathcal{M}_c^2$ とする。この時、以下が成立する。
(1) $t \geqq s \geqq 0$ に対して

$$E[(M(t)-M(s))(N(t)-N(s))|\mathcal{F}_s] = E[M(t)N(t)|\mathcal{F}_s] - M(s)N(s)$$

特に

$$E[(M(t)-M(s))^2|\mathcal{F}_s] = E[M(t)^2|\mathcal{F}_s] - M(s)^2.$$

(2) $n \geqq 1$, $t_n > t_{n-1} > \cdots > t_0 = 0$ に対して

$$E[M(t_n)^2] = \sum_{k=1}^n E[(M(t_k)-M(t_{k-1}))^2].$$

証明. (1) $E[(M(t)-M(s))(N(t)-N(s))|\mathcal{F}_s]$

$$= E[M(t)N(t) - M(s)N(t) - M(t)N(s) + M(s)N(s)|\mathcal{F}_s]$$

$$= E[M(t)N(t)|\mathcal{F}_s] - M(s)E[N(t)|\mathcal{F}_s] - N(s)E[M(t)|\mathcal{F}_s] + M(s)N(s) = E[M(t)N(t)|\mathcal{F}_s] - M(s)N(s).$$

より主張の前半を得る。後半はこれより明らか。

また、(1) より

$$E[(M(t_k)-M(t_{k-1}))^2] = E[M(t_k)^2] - E[M(t_{k-1})^2]$$

がわかるので (2) を得る。

∎

第5章　確率積分

5.1　準備

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ は標準的条件を満たすフィルター付き確率空間とする。

定義 5.1.1 $B : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ が d-次元 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$- 標準ブラウン運動であるとは以下の条件を満たすことをいう。
(1) $B(t) = (B^1(t), \ldots, B^d(t))$, $t \in [0,\infty)$ とおくと $B^k \in \mathcal{X}_c$, $k = 1, \ldots, d$.
(2) $0 \leqq s < t$ に対して $\mathcal{F}_s$, $\sigma\{B^k(t) - B^k(s)\}$, $k = 1, 2, \ldots, d$ は独立。
(3) $B(0) = 0$ であり $t > s \geqq 0$, $k = 1, \ldots, d$, に対して $B^k(t) - B^k(s)$ は平均 0 分散 $t - s$ のガウス確率変数。則ち

$$E[\exp(\sqrt{-1}z(B^k(t) - B^k(s)))] = \exp(\frac{t-s}{2}z^2), \qquad z \in \mathbf{R}.$$

以後、$B : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ が d-次元 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$- 標準ブラウン運動であるとする。命題 3.4.2 よりこのようなものは存在する。

定義 5.1.2 (1) $\mathcal{L}_0^2$ は以下の 3 条件を満たす関数 $f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ 全体の集合とする。
$n \geqq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = \infty$ 及び確率変数 ξ_m, $m = 0, 1, \ldots, n$, が存在して
(i) ξ_m, $m = 0, \ldots, n-1$, は $\mathcal{F}_{t_m}$- 可測であり、$E[\xi_m^2] < \infty$.
(ii)

$$f(t,\omega) = \sum_{m=1}^{n+1} \xi_k(\omega) 1_{[t_{m-1},t_m)}(t), \qquad \omega \in \Omega,\ t \in [0,\infty)]$$

が成立する。
(2) $f \in \mathcal{L}_0^2$ に対して $I_k(f) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$, $k = 1, \ldots, d$, を

$$I_k(f)(t,\omega) = \sum_{m=1}^{n+1} \xi_{m-1}(\omega)(B^k(t \wedge t_m, \omega) - B^k(t \wedge t_{m-1}, \omega)) \qquad \omega \in \Omega,\ t \in [0,\infty)]$$

で定める。

演習問題 9 $\mathcal{L}_0^2$ はベクトル空間であることを示せ。

演習問題 10 $f \in \mathcal{L}_0^2$ に対して

$$I_k(f)(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n2^{-n}} f((m-1)2^{-n}, \omega)(B^k(t\wedge(m2^{-n}), \omega) - B^k(t\wedge((m-1)2^{-n}), \omega)) \qquad \omega \in \Omega,\ t \in [0,\infty)]$$

が成立することを示せ。よって、 $I_k(f)$ の定義は f の表現に依存しないことがわかる。

また、I_k は線形であること、則ち $I_k(af + bg) = aI_k(f) + bI_k(g)$, $f, g \in \mathcal{L}_0^2$, $a, b \in \mathbf{R}$, となることもわかる。

命題 5.1.3 (1) $f \in \mathcal{L}_0^2$, $k = 1, \ldots, d$, に対して $I_k(f) \in \mathcal{M}_c^2$ となる。
(2) $f, g \in \mathcal{L}_0^2$, $k, \ell = 1, \ldots, d$, に対して

$$M(t) = I_k(f)(t) I_\ell(g)(t) - \delta_{k\ell} \int_0^t f(s)g(s)ds, \qquad t \in [0, \infty)$$

とおくと M は連続マルチンゲール。
　特に

$$E[I_k(f)(t) I_\ell(g)(t)] = \delta_{k\ell} E[\int_0^t f(s)g(s)ds], \qquad t \in [0, \infty).$$

証明. (1) $f \in \mathcal{L}_0^2$,

$$f(t, \omega) = \sum_{m=1}^{n+1} \xi_k(\omega) 1_{[t_{m-1}, t_m)}(t), \qquad \omega \in \Omega,\ t \in [0, \infty)$$

ξ_m, $m = 0, \ldots, n-1$, は $\mathcal{F}_{t_m}$- 可測であり、$E[\xi_m^2] < \infty$ とする。
　$I_k(f) \in \mathcal{X}_c$ となることは定義より明らか。
　$s, t \in [t_{m-1}, t_m)$, $m = 1, \ldots, n+1$, とする。この時、

$$I_k(t) = \sum_{r=1}^{m-1} \xi_r (B^k(t_r) - B^k(t_{r-1})) + \xi_{m-1}(B^k(t) - B^k(t_{m-1}))$$

である。ξ_{m-1} は $\mathcal{F}_s$-可測であることに注意。

$$E[(I_k(f)(t) - I_k(f)(s))^2] = E[\xi_{m-1}^2 (B^k(t) - B^k(s))^2]$$

$$= E[\xi_{m-1}^2 E[(B^k(t) - B^k(s))^2 | \mathcal{F}_s]] = (t-s) E[\xi_{m-1}^2] < \infty$$

であり、

$$E[I_k(f)(t) - I_k(f)(s) | \mathcal{F}_s] = E[\xi_{m-1}(B^k(t) - B^k(s)) | \mathcal{F}_s]$$

$$= E[\xi_{m-1} E[(B^k(t) - B^k(s)) | \mathcal{F}_s]] = E[\xi_{m-1}] E[B^k(t) - B^k(s)] = 0.$$

であるので、命題 4.3.9 より $I_k(f)$ は連続マルチンゲールであることがわかる。
　さらに

$$E[I_k(f)(t)^2]$$

$$= \sum_{r=1}^{m-1} E[(I_k(f)(t_r) - I_k(t_{r-1}))^2] + E[(I_k(t) - I_k(t_{m-1}))^2] < \infty$$

がわかるので $I_k(f) \in \mathcal{M}_c^2$ を得る。
　(2)　Step 1. まず、 $f \in \mathcal{L}_0^2$, $k, \ell = 1, \ldots, d$, に対して

$$M(t) = I_k(f)(t) I_\ell(f)(t) - \delta_{k\ell} \int_0^t f(s)^2(r) dr, \qquad t \in [0, \infty)$$

が連続マルチンゲールであることを示す。
　$s, t \in [t_{m-1}, t_m)$, $m = 1, \ldots, n+1$, とする時、

$$M(t) - M(s) = I_k(f)(t) I_\ell(f)(t) - I_k(f)(s) I_\ell(f)(s) - \delta_{k\ell} \int_s^t f(r)^2 dr$$

$$= (I_k(f)(t) - I_k(s))(I_\ell(f)(t) - I_\ell(f)(s)) - \delta_{k\ell} \int_s^t f(r)^2 dr + (I_k(f)(t) - I_k(s)) I_\ell(f)(s) + (I_\ell(f)(t) - I_\ell(f)(s)) I_k(s)$$

となる。よって

$$E[M(t) - M(s) | \mathcal{F}_s]$$

$$= E[\xi_{m-1}^2(B^k(t)-B^k(s))(B^\ell(t)-B^\ell(s))|\mathcal{F}_s] - \delta_{k\ell}E[(t-s)\xi_{m-1}^2|\mathcal{F}_s]$$
$$+I_\ell(f)(s)E[I_k(f)(t)-I_k(s)|\mathcal{F}_s] + I_k(f)(s)E[I_\ell(f)(t)-I_\ell(f)(s)|\mathcal{F}_s]$$
$$= \xi_{m-1}^2E[(B^k(t)-B^k(s))(B^\ell(t)-B^\ell(s))|\mathcal{F}_s] - \xi_{m-1}^2\delta_{k\ell}(t-s)$$
$$= \xi_{m-1}^2E[(B^k(t)-B^k(s))(B^\ell(t)-B^\ell(s))] - \xi_{m-1}^2\delta_{k\ell}(t-s) = 0$$

となり $M(t)$ が連続マルチンゲールであることがわかる。

Step 2. $f,g\in\mathcal{L}_0^2$, $k,\ell=1,\ldots,d$, に対して

$$M_{k,\ell}(f,g)(t) = I_k(f)(t)I_\ell(g)(t) - \delta_{k\ell}\int_0^t f(s)g(s)ds, \qquad t\in[0,\infty)$$

とおくと $M_{k,\ell}(\cdot,\cdot):\mathcal{L}_0^2\times\mathcal{L}_0^2\to\mathcal{X}_c$ は双線形である。よって、

$$M_{k,\ell}(f,g) = \frac{1}{4}(M_{k,\ell}(f+g,f+g) - M_{k,\ell}(f-g,f-g))$$

となるので $M_{k,\ell}(f,g)$ も連続マルチンゲールとなる。

∎

命題 5.1.4 $f\in\mathcal{L}_0^2$ であり、$M>0$ が存在して

$$|f(t,\omega)| \leqq M, \qquad t\in[0,\infty),\ \omega\in\Omega,$$

と仮定する。この時、$t>s\geqq 0$, $k=1,\ldots,d$, に対して

$$E[(I_k(f)(t)-I_k(f)(s))^4] \leqq 9M^4(t-s)^2$$

が成立する。

証明. $t>s\geqq 0$ を固定する。

$$f(r) = \sum_{m=1}^{n+1}\xi_{m-1}1_{[t_{m-1},t_m)}(r), \qquad r\in[0,\infty)$$

であるとする。$t\in(t_{m-1},t_m)$ であれば

$$\xi_{m-1}1_{[t_{m-1},t_m)}(r) = \xi_{m-1}1_{[t_{m-1},t)}(r) + \xi_{m-1}1_{[t,t_m)}(r)$$

であり、 ξ_{m-1} は $\mathcal{F}_t$-可測である。この考察より $s,t\in\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ と仮定してよい。

$s=t_i$, $t=t_j$, $0\leqq i<j\leqq n$, とする。この時、

$$I_k(f)(t)-I_k(f)(s) = \sum_{m=i+1}^{j}\xi_{m-1}(B^k(t_m)-B^k(t_{m-1}))$$

となる。簡単のために $Z_m=\xi_{m-1}(B^k(t_m)-B^k(t_{m-1}))$, $m=1,\ldots,n$, とおく。Z_m は $\mathcal{F}_{t_m}$-可測であることに注意。

$$(I_k(f)(t)-I_k(f)(s))^4 = \sum_{m_1,m_2,m_3,m_4=i+1}^{j} Z_{m_1}Z_{m_2}Z_{m_3}Z_{m_4}$$

となる。

$J=E[Z_{m_1}Z_{m_2}Z_{m_3}Z_{m_4}]$, $i+1\leqq m_1\leqq m_2\leqq m_3\leqq m_4\leqq j$, について調べる。

$m_1\leqq m_2\leqq m_3<m_4$ の時、

$$J = E[Z_{m_1}Z_{m_2}Z_{m_3}E[Z_{m_4}|\mathcal{F}_{t_{m_4-1}}]]$$

$$= E[Z_{m_1}Z_{m_2}Z_{m_3}\xi_{m_4-1}E[B^k(t_{m_4}) - B^k(t_{m_4-1}|\mathcal{F}_{t_{m_4-1}}]] = 0$$

となる。

$m_1 < m_2 = m_3 = m_4$ の時、

$$J = E[Z_{m_1}E[Z_{m_4}^3|\mathcal{F}_{t_{m_4-1}}]]$$
$$= E[Z_{m_1}\xi_{m_4-1}^3 E[(B^k(t_{m_4}) - B^k(t_{m_4-1}))^3|\mathcal{F}_{t_{m_4-1}}]] = 0$$

となる。

よって、$J = 0$ とならないのは $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ か $m_1, m_2 < m_3 = m_4$ の時に限られる。従って

$$E[(I_k(f)(t) - I_k(f)(s))^4] = \binom{4}{2} \sum_{m_4=i+2}^{j} \sum_{m_1,m_2=i+1}^{m_4} E[Z_{m_1}Z_{m_2}Z_{m_4}^2] + \sum_{m=i+1}^{j} E[Z_m^4]$$

$$= 6 \sum_{m_4=i+2}^{j} \sum_{m_1,m_2=i+1}^{m_4} E[Z_{m_1}Z_{m_2}\xi_{m_4-1}^2 E[(B^k(t_{m_4}) - B^k(t_{m_4-1})^2|\mathcal{F}_{t_{m_4-1}}]]$$

$$+ \sum_{m=i+1}^{j} E[\xi_{m_4-1}^4 E[(B^k(t_{m_4}) - B^k(t_{m_4-1}))^4|\mathcal{F}_{t_{m_4-1}}]]$$

$$= 6 \sum_{m_4=i+2}^{j} E[(\sum_{m=i+1}^{m_4} Z_m)^2 \xi_{m_4-1}^2](t_{m_4} - t_{m_4-1}) + \sum_{m=i+1}^{j} E[\xi_{m_4-1}^4]3(t_{m_4} - t_{m_4-1})^2$$

$$\leqq 6M^2 \sum_{m_4=i+2}^{j} E[(I_k(f)(t_{m_4}) - I_k(f)(t_i))^2](t_{m_4} - t_{m_4-1}) + 3M^4 \sum_{m=i+1}^{j} (t_{m_4} - t_{m_4-1})^2$$

$$\leqq 6M^2 E[\int_s^t f(r)^2 dr] \sum_{m_4=i+2}^{j} (t_{m_4} - t_{m_4-1}) + 3M^4(t-s) \sum_{m=i+1}^{j} (t_{m_4} - t_{m_4-1}) \leqq 9M^4(t-s)^2$$

を得るので命題は示された。

∎

5.2 確率積分

$X \in \mathcal{X}_c^2$ および $n \in \mathcal{Z}_{\geqq 1}$ に対して

$$f_{X,n}(t,\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} X(\frac{k-1}{2^n}, \omega) 1_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})}(t), \qquad (t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$$

とおくと、$f_{X,n} \in \mathcal{L}_0^2$, $n \geqq 1$, となる。

命題 5.2.1 任意の $X \in \mathcal{X}_c^2$ および $k = 1, 2, \ldots d,$ に対し

$$E[(I_k(f_{X,n})(T) - I_k(f_{X,m})(T))^2] \to 0, \qquad n, m \to \infty,\ T > 0$$

が成立する。

証明. 命題 5.1.3 より

$$E[(I_k(f_{X,n})(T) - I_k(f_{X,m})(T))^2] = E[I_k(f_{X,n} - f_{X,m})(T)^2] = E[\int_0^T (f_{X,n}(t) - f_{X,m}(t))^2 dt]$$

となる。一方、

$$\int_0^T (f_{X,n}(t) - f_{X,m}(t))^2 dt \leqq 4T \sup_{t\in[0,T]} X(t)^2$$

であり、

$$\int_0^T (f_{X,n}(t) - f_{X,m}(t))^2 dt \to 0, \qquad n, m \to \infty$$

であるので有界収束定理より主張を得る。

∎

$X \in \mathcal{X}_c^2$ および $k = 1, 2, \ldots d,$ に対し、命題 5.1.3(2) および命題 5.2.1 より $M \in \mathcal{M}_c^2$ で

$$E[\sup_{t\in[0,T]} (M(t) - I_k(f_{X,n}(t))^2] \to 0,\ n \to \infty \qquad T > 0$$

となるものが存在する。この M を $X \bullet B^k$ で表す。

$$(X \bullet B^k)(t) = \int_0^t X(s) dB^k(s)$$

とも表す。しばらくは $X \bullet B^k$ を用いる。

定理 5.2.2 (1) $X \in \mathcal{X}_c^2$ および $k = 1, 2, \ldots d,$ に対し、$X \bullet B^k \in \mathcal{M}_c^2$ である。
(2) $X, Y \in \mathcal{X}_c^2$ および $k, \ell = 1, 2, \ldots d,$ に対し、

$$M(t) = (X \bullet B^k)(t)(Y \bullet B^\ell)(t) - \delta_{k\ell} \int_0^t X(s)Y(s) ds, \qquad t \in [0, \infty)$$

は連続マルチンゲールであり、

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |M(t)|] < \infty, \qquad T > 0$$

が成り立つ。

特に、 $t > s \geqq 0$ に対して

$$E[((X \bullet B^k)(t) - (X \bullet B^k)(s))((Y \bullet B^\ell)(t) - (Y \bullet B^\ell)(s)) - \delta_{k\ell} \int_s^t X(r)Y(r) dr | \mathcal{F}_s] = 0.$$

(3) $X_k \in \mathcal{X}_c^2,\ k = 1, 2, \ldots, d,$ に対して

$$E[(\sum_{k=1}^d (X_k \bullet B^k)(t))^2] = E[\sum_{k=1}^d \int_0^t X_k(s)^2 ds].$$

証明. (1) は既に示した。(2) を示す。

$$E[|M(t) - (I_k(f_{X,n})(t) I_\ell(f_{Y,n})(t)) - \delta_{k\ell} \int_0^t f_{X,n}(s) f_{Y,n}(s) ds|]$$

$$\leqq E[|(X \bullet B^k)(t) Y \bullet B^\ell(t) - I_k(f_{X,n})(t) I_\ell(f_{Y,n})(t)|] + E[\int_0^t |X(s)Y(s) - f_{X,n}(s) f_{Y,n}(s)| ds]$$

である。しかし、

$$E[|(X \bullet B^k)(t)(Y \bullet B^\ell)(t) - I_k(f_{X,n})(t) I_\ell(f_{Y,n})(t)|]$$

$$\leqq E[|((X \bullet B^k)(t) - I_k(f_{X,n})(t))(Y \bullet B^\ell)(t)|] + E[|(X \bullet B^k)(t)((Y \bullet B^\ell)(t) - I_\ell(f_{Y,n})(t)))|]$$

$$+E[|((X \bullet B^k)(t) - I_k(f_{X,n})(t))((Y \bullet B^\ell)(t) - I_\ell(f_{Y,n})(t))|]$$

$$\leqq E[((X \bullet B^k)(t) - I_k(f_{X,n})(t))^2]^{1/2} E[(Y \bullet B^\ell)(t)^2]^{1/2} + E[(X \bullet B^k)(t)^2]^{1/2} E[(Y \bullet B^\ell)(t) - I_\ell(f_{Y,n})(t))^2]^{1/2}$$

$$+E[((X \bullet B^k)(t) - I_k(f_{X,n})(t))^2]^{1/2} E[(Y \bullet B^\ell(t) - I_\ell(f_{Y,n})(t))^2]^{1/2}$$
$$\to 0, \qquad n \to \infty$$

である。また、

$$\int_0^t |X(s)Y(s) - f_{X,n}(s)f_{Y,n}(s)|ds \leqq 2t(\sup_{s\in[0,t]}|X(s)|)(\sup_{s\in[0,t]}|Y(s)|)$$
$$E[(\sup_{s\in[0,t]}|X(s)|)(\sup_{s\in[0,t]}|Y(s)|)] \leqq E[\sup_{s\in[0,t]}|X(s)|^2]^{1/2} E[\sup_{s\in[0,t]}|Y(s)|^2]^{1/2} < \infty$$

および

$$\int_0^t |X(s)Y(s) - f_{X,n}(s)f_{Y,n}(s)|ds \to 0, \qquad n \to \infty$$

より

$$E[\int_0^t |X(s)Y(s) - f_{X,n}(s)f_{Y,n}(s)|ds] \to 0, \qquad n \to \infty$$

がわかる。

よって、命題 5.1.3 より $t > s \geqq 0$ に対して

$$E[M(t)|\mathcal{F}_s] = M(s)$$

がわかり、M が連続マルチンゲールであることがわかる。

また、

$$E[\sup_{t\in[0,T]}|M(t)|] \leqq E[(\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|)(\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|) + T(\sup_{t\in[0,T]}|X(t)|)(\sup_{t\in[0,T]}|Y(t)|)]$$
$$\leqq (T+1)E[\sup_{t\in[0,T]} X(t)^2]^{1/2} E[\sup_{t\in[0,T]} Y(t)^2]^{1/2} < \infty$$

である。

さらに、命題 4.3.10 より $t > s \geqq 0$ に対して

$$E[((X\bullet B^k)(t)-(X\bullet B^k)(s))(Y\bullet B^\ell)(t)-(Y\bullet B^\ell)(s))|\mathcal{F}_s] = E[(X\bullet B^k)(t)Y\bullet B^\ell)(t)-(X\bullet B^k)(s)Y\bullet B^\ell)(s)|\mathcal{F}_s]$$

であるので、 (2) の最後の式を得る。

(3) (2) より

$$E[(\sum_{k=1}^d (X_k \bullet B^k)(t))^2] = \sum_{k,\ell=1}^d E[(X_k \bullet B^k)(t))(X_\ell \bullet B^\ell)(t)] = \sum_{k=1}^d E[\int_0^t X_k(s)^2 ds]$$

がわかるので主張を得る。

∎

命題 5.2.3 $X, Y \in \mathcal{X}_c^2$, $a, b \in \mathbf{R}$, および $k = 1, \ldots, d$, に対し

$$(aX + bY) \bullet B^k = a(X \bullet B^k) + b(Y \bullet B^k).$$

演習問題 11 上記の命題を証明せよ。

命題 5.2.4 $X \in \mathcal{X}_c^2$, τ は停止時刻とする。この時、$k = 1, \ldots, d$, に対して

$$E[(X \bullet B^k)^\tau(t)^2] = E[\int_0^{t\wedge\tau} X(s)^2 ds], \qquad t \in [0, \infty).$$

が成り立つ。

証明. M を

$$M(t) = (X \bullet B^k)(t)^2 - \int_0^t X(s)^2 ds, \qquad t \in [0,\infty)$$

とおくと、定理 5.2.2 より M は連続マルチンゲールであり

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |M(t)|] < \infty, \qquad T > 0.$$

よって、命題 4.3.5 より M^τ は連続マルチンゲールであることがわかる。特に $E[M^\tau(t)] = 0.$

$$E[M^\tau(t)] = E[(X \bullet B^k)^\tau(t)^2 - \int_0^{t\wedge\tau} X(s)^2 ds]$$

であるので主張を得る。

∎

命題 5.2.5 $X \in \mathcal{X}_c^2$, τ は停止時刻とする。

$$(1_{\{\tau>0\}}X^\tau)(t,\omega) = \begin{cases} X(t\wedge\tau(\omega),\omega), & \tau(\omega) > 0 \text{ の時} \\ 0, & \tau(\omega) = 0 \text{ の時} \end{cases}$$

とおくと、$1_{\{\tau>0\}}X^\tau \in \mathcal{X}_c^2$ である。

さらに、$k = 1,\ldots,d,$ に対して

$$(X \bullet B^k)^\tau = ((1_{\{\tau>0\}}X^\tau) \bullet B^k)^\tau$$

が成り立つ。

証明. $\{\tau > 0\} = \Omega \setminus \{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0$ であるので、最初の主張は明らか。

命題 5.1.3 より

$$E[((X \bullet B^k)^\tau(t) - ((1_{\{\tau>0\}}X^\tau) \bullet B^k)^\tau(t))^2] = E[((X - (1_{\{\tau>0\}}X^\tau) \bullet B^k)^\tau(t)^2]$$

$$= E[\int_0^{t\wedge\tau} (X - (1_{\{\tau>0\}}X^\tau)(s)^2 ds] = 0$$

より後半の主張を得る。

∎

命題 5.2.6 $X \in \mathcal{X}_c^\infty$ とする。この時、 $C \in (0,\infty)$ が存在して

$$E[((X \bullet B^k)(t) - (X \bullet B^k)(s))^4] \leqq C(t-s)^4, \qquad t > s \geqq 0,\ k = 1,2,\ldots,d$$

が成立する。

証明. 仮定より $M > 0$ が存在して

$$|X(t,\omega)| \leqq M, \qquad t \in [0,\infty),\ \omega \in \Omega$$

が成り立つ。この時、

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |f_{X,n}(t)| \leqq \sup_{t\in[0,\infty)} |X(t)| \leqq M$$

が成り立つ。

命題 4.2.2 より $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ および部分列 $\{n_m\}_{m=0}^\infty$ が存在して $P(\Omega_0) = 1$ であり

$$I_k(f_{X,n_m})(t) \to (X \bullet B^k)(t),\ m \to \infty, \qquad t \in [0,\infty),\ \omega \in \Omega_0$$

が成り立つ。また、命題 5.1.4 より

$$E[(I_k(f_{n_m})(t) - (I_k(f_{n_m})(s))^4] \leqq 9M^4(t-s)$$

よって

$$E[(X \bullet B^k)(t) - (X \bullet B^k)(s))^4] = E[1_{\Omega_0}(X \bullet B^k)(t) - (X \bullet B^k)(s))^4]$$

$$= E[\lim_{m\to\infty} 1_{\Omega_0}(I_k(f_{n_m})(t) - (I_k(f_{n_m})(s))^4] \leqq \lim_{m\to\infty} E[1_{\Omega_0}(I_k(f_{n_m})(t) - (I_k(f_{n_m})(s))^4] \leqq 9M^4(t-s)$$

となるので主張を得る。

∎

5.3 確率微分方程式

確率微分方程式の定義は様々であり、目的に応じて定義を変えることが多い。ここでは 1942 年の伊藤の考えに基づいていく。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ は標準的条件を満たすフィルター付き確率空間、$B : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ は d-次元 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ブラウン運動、$\sigma_k : [0,\infty) \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $k = 0, 1, \ldots, d$, は連続関数とする。

$\xi : \Omega \to \mathbf{R}^N$ は $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数で $E[|\xi|^2] < \infty$ を満たすものとする。

確率微分方程式

$$dX(t) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(t, X(t))dB^k(t) + \sigma_0(t, X(t))dt$$

$$X(0) = \xi$$

を考える。

定義 5.3.1 $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^N$ が上記の確率微分方程式の解であるとは以下の 3 条件を満たすこと。
(1) $X \in \mathcal{X}_c^2$.
(2) $\sigma_k(\cdot, X(\cdot)) \in \mathcal{X}_c^2$, $k = 0, 1, \ldots, d$.
(3) $X^i(t)$

$$= \xi^i + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \sigma_k^i(s, X(t))dB^k(s) + \int_0^t \sigma_0^i(t, X(s))ds, \qquad i = 1, \ldots, N,\ t \in [0,\infty).$$

ここで $Y \in \mathcal{X}_c^2$ に対して

$$(Y \bullet B^k)(t) = \int_0^t Y(s)dB^k(s)$$

と表記した。

命題 5.3.2 連続関数 $\sigma_k : [0,\infty) \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $k = 0, 1, \ldots, d$, が次のリプシッツ条件を満たすとする。
(条件) $C \in (0,\infty)$ で

$$|\sigma_k(t,x) - \sigma_k(t,y)| \leqq C|x-y|, \qquad t \in [0,\infty),\ x, y \in \mathbf{R}^N,\ k = 0, 1, \ldots, d$$

となるものが存在する。

この時確率微分方程式の解は存在してただ一つである。

証明. まず

$$V = \{X = (X^1, \dots, X^N);\ X^i \in \mathcal{X}_c^2, i = 1, \dots, N\}$$

とおく。

$T > 0$ とすると、$t \in [0,T]$, $x \in \mathbf{R}^N$ に対して

$$|\sigma_k(t,x)|^2 \leqq (\sup_{t\in[0,T]} |\sigma_k(t,0)| + |\sigma_k(t,x) - \sigma_k(t,0)|)^2$$

$$\leqq 2(\sup_{t\in[0,T]} |\sigma_k(t,0)|^2 + C^2|x|^2)$$

となるので $X \in V$ ならば $\sigma_k(\cdot, X(\cdot)) \in V$, $k = 0, 1, \dots, d$, となることがわかる。よって、$X \in V$ ならば

$$\int_0^t \sigma_k(s, X(s))dB^k(s) = (\sigma_k^i(\cdot, X(\cdot)) \bullet B^k)(t))_{i=1,\dots,N} \in V, \qquad k = 1, \dots, d$$

であることがわかる。また、

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t \sigma_0(s, X(s))ds|^2] \leqq E[(\int_0^T |\sigma_0(s, X(s))|ds)^2]$$

$$\leqq E[T\int_0^T |\sigma_0(s, X(s))|^2 ds] \leqq T^2 E[\sup_{t\in[0,T]} |\sigma_0(t, X(t))|^2]$$

である。

$X \in V$ に対して

$$\Phi(X)(t)$$

$$= \xi + \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma_k(s, X(t))dB^k(s) + \int_0^t \sigma_0(t, X(s))ds, \qquad t \in [0,\infty)$$

と定めると、$\Phi(X) \in V$ であることがわかる。

まず以下の主張を示す。

主張. 任意の $T > 0$ に対して $C_T \in (0,\infty)$ が存在して

$$E[\sup_{s\in[0,t]} |\Phi(X)(s) - \Phi(Y)(s)|^2] \leqq C_T \int_0^t E[\sup_{r\in[0,s]} |X(r) - Y(r)|^2]ds, \qquad t \in [0,T],\ X, Y \in V$$

が成立する。

主張を証明する。$T > 0$ とする。$X, Y \in \mathcal{X}_c^2$, $t \in [0,T]$, に対して

$$E[\sup_{s\in[0,t]} |\Phi(X)(s) - \Phi(Y)(s)|^2]$$

$$= E[\sup_{s\in[0,t]} \sum_{i=1}^N (\sum_{k=1}^d \int_0^s (\sigma_k^i(r, X(r)) - \sigma_k^i(r, Y(r)))dB^k(r) + \int_0^s (\sigma_0^i(r, X(r)) - \sigma_0^i(r, Y(r)))dr)^2]$$

$$\leqq \sum_{i=1}^N E[\sup_{s\in[0,t]} (\sum_{k=1}^d \int_0^s (\sigma_k^i(r, X(r)) - \sigma_k^i(r, Y(r)))dB^k(r) + \int_0^s (\sigma_0^i(r, X(r)) - \sigma_0^i(r, Y(r)))dr)^2]$$

$$\leqq 2\sum_{i=1}^N E[\sup_{s\in[0,t]} (\sum_{k=1}^d \int_0^s (\sigma_k^i(r, X(r)) - \sigma_k^i(r, Y(r)))dB^k(r))^2] + 2\sum_{i=1}^N E[\sup_{s\in[0,t]} (\int_0^s (\sigma_0^i(r, X(r)) - \sigma_0^i(r, Y(r)))dr)^2]$$

$$\leqq 2\sum_{i=1}^N 4E[(\sum_{k=1}^d \int_0^t (\sigma_k^i(s, X(s)) - \sigma_k^i(s, Y(s)))dB^k(s))^2] + 2\sum_{i=1}^N E[(\int_0^t |\sigma_0^i(s, X(s)) - \sigma_0^i(s, Y(s))|ds)^2]$$

$$\leqq 8\sum_{i=1}^N E[(\sum_{k=1}^d \int_0^t (\sigma_k^i(s,X(s))-\sigma_k^i(s,Y(s)))^2 ds]+2\sum_{i=1}^N E[(\int_0^t |\sigma_0^i(s,X(s))-\sigma_0^i(s,Y(s))|^2 ds)(\int_0^t 1ds)]$$

$$=8E[\sum_{k=1}^d \int_0^t |\sigma_k(s,X(s))-\sigma_k(s,Y(s))|^2 ds]+2tE[\int_0^t |\sigma_0(s,X(s))-\sigma_0(s,Y(s))|^2 ds]$$

$$\leqq 8E[\sum_{k=1}^d \int_0^t C^2|X(s)-Y(s)|^2 ds]+2tE[\int_0^t C^2|X(s)-Y(s)|^2 ds]$$

$$\leqq (8d+2T)C^2E[\int_0^t C^2|X(s)-Y(s)|^2 ds]$$

となることよりわかる。

さて、今、 $X_0(t)=\xi,\ t\in[0,\infty),$ とおくと $X_0\in V$ となる。$X_n\in V,\ n=1,2,\dots,$ を帰納的に $X_n=\Phi(X_{n-1}),\ n=1,2,\dots,$ で定める。この時、

$$a_n(t)=E[\sup_{s\in[0,t]}|X_n(s)-X_{n-1}(s)|^2],\qquad t\in[0,\infty),\ n=1,2,\dots,$$

とおくと、

$$a_{n+1}(t)=E[\sup_{s\in[0,t]}|\Phi(X_n)(s)-\Phi(X_{n-1})(s)|^2]\leqq C_T\int_0^t a_n(s)ds\qquad t\in[0,T],\ T>0$$

が成立する。

$a_0(t)\leqq a_0(T),\ t\in[0,T],$ であるので、数学的帰納法により

$$a_n(t)\leqq \frac{C_T^n t^n}{n!}a_0(T),\qquad t\in[0,T],\ n=0,1,\dots$$

を示すことができる。

特に、$n\geqq m\geqq 1$ に対して

$$E[\sup_{s\in[0,T]}|X_n(s)-X_m(s)|^2]^{1/2}\leqq E[(\sum_{k=m+1}^n \sup_{s\in[0,T]}|X_k(s)-X_{k-1}(s)|)^2]^{1/2}$$

$$\leqq \sum_{k=m+1}^n E[\sup_{s\in[0,T]}|X_k(s)-X_{k-1}(s)|^2]^{1/2}\leqq \sum_{k=m+1}^n (\frac{C_T^k T^k}{k!})^{1/2}a_0(T)^{1/2}\to 0,\qquad n,m\to\infty.$$

であるので、命題 4.1.2 より $X\in V$ で

$$E[\sup_{t\in[0,T]}|X(t)-X_n(t)|^2]\to 0,\qquad n\to\infty,\ T>0$$

となるものが存在する。この時、主張より

$$E[\sup_{[0,T]}|\Phi(X)(t)-X_{n+1}(t)|^2]\to 0,\qquad n\to\infty,\ T>0$$

となることがわかり、$\Phi(X)(t)=X(t)\ a.s.,\ t\in[0,\infty),$ がわかる。よって、 X は確率微分方程式の解となる。

もし、$X,Y\in V$ が共に解であれば、$\Phi(X)=X,\ \Phi(Y)=Y,$ が成り立つ。

$$a(t)=E[\sup_{s\in[0,t]}|X(s)-Y(s)|^2],\qquad t\in[0,\infty)$$

とおくと

$$a(t)\leqq C_T\int_0^t a(s)ds\qquad t\in[0,T]$$

がわかる。よって、帰納的に

$$a(t) \leqq C_T^n \frac{t^n}{n!} a(T) \qquad t \in [0, T]$$

がわかるので、$a(t) = 0$, $t \in [0, \infty)$, がわかる。従って解は一意的である。

∎

第6章　伊藤の公式

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ は標準的条件を満たすフィルター付き確率空間、$B : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ は d 次元 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-ブラウン運動とする。

6.1　伊藤過程

命題 6.1.1 $Y \in \mathcal{X}_c^\infty$ に対して

$$Z(t) = \int_0^t Y(s)ds, \qquad t \in [0,\infty)$$

とおくと、

$$E[\sum_{k=1}^{n2^n} |Z((\frac{k}{2^n}) \wedge t) - Z((\frac{k-1}{2^n}) \wedge t)|^2] \to 0,\ n \to \infty, \qquad t \in [0,\infty)$$

が成立する。

証明. $Y \in \mathcal{X}_c^\infty$ であるので $M = \sup_{t\in[0,\infty),\omega\in\Omega} |Y(t,\omega)| < \infty$ である。

$$\sum_{k=1}^{n2^n} |Z((\frac{k}{2^n}) \wedge t) - Z((\frac{k-1}{2^n}) \wedge t)|^2$$

$$\leqq (\max_{k=1,\ldots,n2^n} |Z((\frac{k}{2^n}) \wedge t) - Z((\frac{k-1}{2^n}) \wedge t)|) \sum_{k=1}^{n2^n} |Z((\frac{k}{2^n}) \wedge t) - Z((\frac{k-1}{2^n}) \wedge t)|$$

$$\leqq (2^{-n} \sup_{s\in[0,t]} |Y(s)|) \int_0^t |Y(s)|ds \leqq 2^{-n} M^2 t$$

であるので、主張を得る。

∎

命題 6.1.2 $Y_k \in \mathcal{X}_c^\infty$, $k = 0, 1, \ldots, d$, および $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数 ξ とする。もし

$$\xi + \sum_{k=1}^{d} (Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds = 0\ a.s. \qquad t \in [0,\infty)$$

であるならば、$\xi = 0\ a.s.$, $Y_k(t) = 0\ a.s.$, $k = 0, 1, \ldots, d$, $t \in [0,\infty)$, が成立する。

証明.

$$Z(t) = \xi + \sum_{k=1}^{d} (Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds \qquad t \in [0,\infty)$$

とおく。まず $\xi = Z(0) = 0$ であることがわかる。

　また、

$$Z_0(t) = \int_0^t Y_0(s)ds, \qquad Z_1(t) = \sum_{k=1}^{d} (Y_k \bullet B^k)(t)$$

とおくと、 $t > s \geqq 0$ に対して

$$E[|Z_1(t) - Z_1(s)|^2] = E[|Z_0(t) - Z_0(s)|^2]$$

がわかる。$Z_1 \in \mathcal{M}_c^2$ であるので $t > n$ ならば

$$E[Z_1(t)^2] = E[\sum_{k=1}^{n2^n}(Z_1((\frac{k}{2^n}) \wedge t) - Z_1((\frac{k-1}{2^n}) \wedge t))^2]$$

$$= E[\sum_{k=1}^{n2^n}(Z_0((\frac{k}{2^n}) \wedge t) - Z_0((\frac{k-1}{2^n}) \wedge t))^2] \to 0,\ n \to \infty$$

であるので

$$0 = E[Z_1(t)^2] = E[\sum_{k=1}^{d}\int_0^t Y_k(s)^2 ds]$$

となる。よって、 $Y_k(t) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, がわかる。これより

$$Z_0(t) = \int_0^t Y_0(s) = 0, \qquad t \in [0, \infty)$$

がわかり $Y_0(t) = 0$, $t \in [0, \infty)$, がわかる。

∎

定義 6.1.3 $\mathcal{I}_b$ は以下の条件を満たす $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ の全体の集合とする。
$Y_k \in \mathcal{X}_c^\infty$, $k = 0, 1, \ldots, d$, および $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数 ξ で $\sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)| < \infty$ となるものが存在して、

$$X(t) = \xi + \sum_{k=1}^{d}(Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds, \qquad t \in [0, \infty)$$

を満たす。

命題 6.1.2 より $X \in \mathcal{I}_b$ に対して

$$X(t) = \xi + \sum_{k=1}^{d}(Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds, \qquad t \in [0, \infty)$$

と表わされる $Y_k \in \mathcal{X}_c^\infty$, $k = 0, 1, \ldots, d$, および $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数 ξ は一意に決まる。

演習問題 12 $\mathcal{I}_b$ はベクトル空間であることを示せ。

定義 6.1.4 $X \in \mathcal{I}_b$ および $Z \in \mathcal{X}_c^\infty$ に対して $Z \bullet X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ を

$$(Z \bullet X)(t) = \sum_{k=1}^{d}((ZY_k) \bullet B^k)(t) + \int_0^t Z(s)Y_0(s)ds, \qquad t \in [0, \infty)$$

で定める。ただし $Y_k \in \mathcal{X}_c^\infty$, $k = 0, 1, \ldots, d$, であり、

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{d}(Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds, \qquad t \in [0, \infty)$$

である。明らかに、$Z \bullet X \in \mathcal{I}_b$ となる。

以後、$B^0 : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbf{R}$ を $B^0(t) = t$, $t \in [0,\infty)$, で定める。$B^0(t) = \int_0^t 1 ds$, $t \in [0,\infty)$, であるので $B^0 \in \mathcal{I}_b$ であり

$$(Z \bullet B^0)(t) = \int_0^t Z(s)ds, \qquad t \in [0,\infty)$$

となる。よって、$X \in \mathcal{I}_b$ に対して

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^d (Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds, \qquad t \in [0,\infty)$$

は

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=0}^d (Y_k \bullet B^k)(t)$$

と表わすことができる。

定義 6.1.5 $\mathcal{L}_0^\infty$ を以下で定める。

$$\mathcal{L}_0^\infty = \{f \in \mathcal{L}_0^2; \sup_{t\in[0,\infty),\omega\in\Omega} |f(t,\omega)| < \infty\}.$$

明らかに $\mathcal{L}_0^\infty$ はベクトル空間となる。

$f \in \mathcal{L}_0^\infty$ とする。この時 $n \geqq 1$, $0 = t_0 < \cdots < t_n < t_{n+1} = \infty$ および確率変数 ξ_k, $k = 0,1,\ldots,n$, で ξ_k, $k = 0,1,\ldots,n$, は $\mathcal{F}_{t_k}$-可測で $\sup_{\omega\in\Omega} |\xi_k(\omega)| < \infty$ であり

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \xi_{k-1} 1_{[t_{k-1},t_k)}(t), \qquad t \in [0,\infty)$$

となるものが存在する。

$X \in \mathcal{I}_b$ に対して

$$I(f,X)(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \xi_{k-1}(X(t_k \wedge t) - X(t_{k-1} \wedge t)), \qquad t \in [0,\infty)$$

とおく。$I(f,X) \in \mathcal{X}_c$ であり、

$$I(f,X)(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n2^n} f(\frac{k-1}{2^n})(X((\frac{k}{2^n}) \wedge t) - X((\frac{k-1}{2^n}) \wedge t)), \qquad t \in [0,\infty)$$

となるので $I(f,X)$ は f の表現によらず一意に定まる。また、$k = 1,\ldots,d$ に対して $I(f,B^k) = I_k(f)$ であり、

$$I(f,B^0)(t) = \int_0^t f(s)ds \qquad t \in [0,\infty)$$

であることがわかる。

$Z \in \mathcal{X}_c^\infty$ に対して $f_{Z,n} \in \mathcal{L}_0^\infty$ である。ただし、

$$f_{Z,n}(t) = \sum_{k=1}^{n2^n} f(\frac{k-1}{2^n}) 1_{[(k-1)2^{-n},k2^{-n})}(t) \qquad t \in [0,\infty)$$

であった。

命題 6.1.6 $X \in \mathcal{I}_b$, $Z \in \mathcal{X}_c^\infty$ ならば

$$E[((Z \bullet X)(t) - I(f_{Z,n},X)(t))^2] \to 0,\ n \to \infty, \qquad t \in [0,\infty).$$

証明. $C = \sup_{t\in[0,\infty),\omega\in\Omega} |Z(t,\omega)| < \infty$ とおく。
$Y_k \in \mathcal{X}_c^\infty$, $k = 0, 1, \ldots, d$, であり、

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=0}^{d} (Y_k \bullet B^k)(t) \qquad t \in [0,\infty)$$

とする。この時

$$(Z \bullet X)(t) = \sum_{k=0}^{d} ((ZY_k) \bullet B^k)(t)$$

であるので、各 $k = 0, 1, \ldots, d$ に対して

$$E[(((ZY_k) \bullet B^k)(t) - I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)(t))^2] \to 0,\ n \to \infty \tag{6.1}$$

を示せばよい。
場合 1. $k = 1, \ldots, d$ の場合。
$(m-1)2^{-n} \leqq s < t \leqq m2^{-n}$, $m = 1, \ldots, n2^n$, に対して

$$I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)(t) - I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)(s) = Z(\frac{m-1}{2^n})((Y_k \bullet B^k)(t) - (Y_k \bullet B^k)(s))$$

であり

$$E[I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)(t) - I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)(s)|\mathcal{F}_s] = Z(\frac{m-1}{2^n})E[(Y_k \bullet B^k)(t) - (Y_k \bullet B^k)(s)|\mathcal{F}_s] = 0$$

となるので、$I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k) \in \mathcal{M}_c^2$ であることが容易にわかる。
また、$ZY_k \in \mathcal{X}_c^\infty$ であるので

$$E[(((ZY_k) \bullet B^k)(t) - I_k(f_{ZY_k})(t))^2] \to 0,\ n \to \infty$$

である。

$$M_n(t) = I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)(t) - I_k(f_{ZY_k})(t),$$
$$N_n(t) = (Y_k \bullet B^k)(t) - I_k(f_{Y_k})(t)$$

とおくと

$$E[M_n(t)^2] = \sum_{m=1}^{n2^n} E[(M_n(m2^{-n} \wedge t) - M_n((m-1)2^{-n} \wedge t)^2]$$

であり、

$$\begin{aligned}
&M_n(m2^{-n} \wedge t) - M_n((m-1)2^{-n} \wedge t) \\
&= (I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)(m2^{-n} \wedge t) - I_k(f_{ZY_k})(m2^{-n} \wedge t)) - (I(f_{Z,n}, Y_k \bullet B^k)((m-1)2^{-n} \wedge t) - I_k(f_{ZY_k})((m-1)2^{-n} \wedge t)) \\
&= Z((m-1)2^{-n})((Y_k \bullet B^k)(m2^{-n} \wedge t) - (Y_k \bullet B^k)((m-1)2^{-n} \wedge t)) \\
&\quad - Z((m-1)2^{-n})Y_k((m-1)2^{-n})(B^k(m2^{-n} \wedge t)) - B^k((m-1)2^{-n} \wedge t))) \\
&= Z((m-1)2^{-n})(N_n(m2^{-n} \wedge t)) - N_n((m-1)2^{-n} \wedge t))
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$|M_n(m2^{-n} \wedge t) - M_n((m-1)2^{-n} \wedge t)|^2 \leqq C^2(N_n(m2^{-n} \wedge t)) - N_n((m-1)2^{-n} \wedge t))^2$$

であるので

$$E[M_n(t)^2] \leqq C^2 \sum_{m=1}^{n2^n} E[(N_n(m2^{-n} \wedge t) - N_n((m-1)2^{-n} \wedge t)^2]$$

$$= C^2E[N_n(t)^2] = C^2E[((Y_k \bullet B^k)(t) - I_k(f_{Y_k})(t))^2] \to 0,\ n \to \infty$$

を得る。これより 式 (6.1) がわかる。

場合２．$k = 0$ の場合。

$$E[(((ZY_0) \bullet B^0)(t) - I(f_{Z,n}, Y_0 \bullet B^0)(t))^2] = E[(\int_0^t f_{ZY_0,n}(s)ds - \int_0^t f_{Z,n}(s)Y_0(s)ds)^2]$$

$$= E[\int_0^t f_{Z,n}(s)f_{Y_0,n}(s)ds - \int_0^t f_{Z,n}(s)Y_0(s)ds)^2] \leqq C^2E[(\int_0^t (f_{Y_0,n}(s) - Y_0(s))ds)^2]$$

であるので、式 (6.1) は容易に示される。

これらにより主張を得る。

∎

6.2　二次変分

定義 6.2.1 $X, \tilde{X} \in \mathcal{I}_b$ に対して $\langle X, \tilde{X}\rangle \in \mathcal{X}_c$ を

$$\langle X, \tilde{X}\rangle(t) = \sum_{k=1}^d \int_0^t Y_k(s)\tilde{Y}_k(s)ds, \qquad t \in [0,\infty)$$

により定める。ただし、$Y_k, \tilde{Y}_k \in \mathcal{X}_c^\infty$, $k = 0, 1, \ldots, d$,

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=0}^d (Y_k \bullet B^k)(t),$$

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(0) + \sum_{k=0}^d (\tilde{Y}_k \bullet B^k)(t)$$

である。明らかに、$\langle X, \tilde{X}\rangle \in \mathcal{I}_b$ である。

命題 6.2.2 $X, Y \in \mathcal{I}_b$, $Z \in \mathcal{X}_c^\infty$ に対して

$$E[(\sum_{m=1}^\infty Z(\frac{m-1}{2^n})(X((\frac{m}{2^n})\wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n})\wedge t))(Y((\frac{m}{2^n})\wedge t) - Y((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)) - (Z\bullet\langle X, Y\rangle)(t))^2] \to 0,\ n \to \infty,$$

$t \in [0,\infty)$, が成立する。

証明.

$$I_n(X,Y)(t) = \sum_{m=1}^\infty Z(\frac{m-1}{2^n})(X((\frac{m}{2^n}) \wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n}) \wedge t))(Y((\frac{m}{2^n}) \wedge t) - Y((\frac{m-1}{2^n}) \wedge t))$$

とおく。$I_n(X,Y)(t) - (Z \bullet \langle X, Y\rangle)(t)$ は X, Y について双線形である。よって、$X = \tilde{X} \bullet B^k$, $Y = \tilde{Y} \bullet B^\ell$, $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}_c^\infty$, $k, \ell = 0, 1, \ldots, d$, の時に示せばよい。

$$M = \sup_{t\in[0,\infty),\omega\in\Omega} (|\tilde{X}(t,\omega)| + |\tilde{Y}(t,\omega)| + |Z(t,\omega)|) < \infty$$

とおく。

場合１．$k = 0$ の場合。

$$|I_n(X,Y)| \leqq M \sum_{m=1}^\infty |\int_{(m-1)2^{-n}\wedge t}^{m2^{-n}\wedge t} \tilde{X}(s)ds||Y(m2^{-n} \wedge t) - Y((m-1)2^{-n} \wedge t)|$$

$$\leqq M^2 \sum_{m=1}^{\infty} |(m2^{-n} \wedge t) - ((m-1)2^{-n} \wedge t)) \sup_{k \geqq 1} |Y(k2^{-n} \wedge t) - Y((k-1)2^{-n} \wedge t)|$$

$$\leqq M^2 t \sup_{s,r \in [0,t], |s-r| \leqq 2^{-n}} |Y(s) - Y(r)|$$

より

$$|I_n(X,Y)(t)| \to 0,\ n \to \infty$$

がわかる。また、

$$|I_n(X,Y)|^2 \leqq 4M^4 t^2 \sup_{s \in [0,t]} |Y(s)|^2$$

であり、

$$E[\sup_{s \in [0,t]} |Y(s)|^2] < \infty$$

であるので、

$$E[|I_n(X,Y)|^2] \to 0,\ n \to \infty$$

がわかり主張を得る。

場合２．　$\ell = 0$ の場合。場合 1 と同様。

場合３．　$k, \ell = 1, \ldots, d,$ の場合。

$$M(t) = X(t)Y(t) = (\tilde{X} \bullet B^k)(t)(\tilde{Y} \bullet B^\ell)(t) - \delta_{k\ell} \int_0^t \tilde{X}(s)\tilde{Y}(s)ds$$

とおくと、M は連続マルチンゲールであり、命題 5.2.6 より

$$E[M(t)^2] \leqq 2E[(\tilde{X} \bullet B^k)(t)^2 (\tilde{Y} \bullet B^\ell)(t)^2] + 2E[|\int_0^t \tilde{X}(s)\tilde{Y}(s)ds|^2]$$

$$\leqq 2E[(\tilde{X} \bullet B^k)(t)^4]^{1/2} E[(\tilde{Y} \bullet B^\ell)(t)^4]^{1/2} + 2t^2 M^4 < \infty$$

であるので $M \in \mathcal{M}_c^2$ がわかる。また $X, Y \in \mathcal{M}_c^2$ である。

よって、 $t > s \geqq 0$ に対して

$$0 = E[M(t) - M(s)|\mathcal{F}_s] = E[X(t)Y(t) - X(s)Y(s)|\mathcal{F}_s] - \delta_{k\ell} E[\int_s^t \tilde{X}(r)\tilde{Y}(r)dr|\mathcal{F}_s]$$

$$= E[(X(t) - X(s))(Y(t) - Y(s)) - (\langle X, Y \rangle(t) - \langle X, Y \rangle(s))|\mathcal{F}_s]$$

となる。

$$J_n(t) = I_n(X,Y)(t) - \sum_{m=1}^{\infty} Z(\frac{(m-1)}{2^n})(\langle X, Y \rangle((\frac{m}{2^n}) \wedge t) - \langle X, Y \rangle((\frac{m-1}{2^n}) \wedge t))$$

とおくと

$$J_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} Z(\frac{m-1}{2^n}) \Delta_{n,m}(t).$$

ただし、

$$\Delta_{n,m}(t)$$

$$= (X((\frac{m}{2^n}) \wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n}) \wedge t))(Y((\frac{m}{2^n}) \wedge t) - Y((\frac{m-1}{2^n}) \wedge t)) - (((\langle X, Y \rangle((\frac{m}{2^n}) \wedge t) - \langle X, Y \rangle((\frac{m-1}{2^n}) \wedge t)),$$

$k = 1, \ldots,$ である。$\Delta_{n,k}(t)$ は $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$-可測であり、$E[\Delta_{n,k}(t)|\mathcal{F}_{(k-1)2^{-n}}] = 0$ となる。よって

$$E[J(t)^2] = E[\sum_{m=1}^{\infty} Z(\frac{m-1}{2^n})^2 \Delta_{n,m}(t)^2 + 2 \sum_{1 \leqq m < r < \infty} Z(\frac{m-1}{2^n}) \Delta_{n,m}(t) Z(\frac{r-1}{2^n}) \Delta_{n,r}(t)]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} E[Z(\frac{m-1}{2^n})^2 \Delta_{n,m}(t)^2] + 2 \sum_{1 \leqq m < r < \infty} E[Z(\frac{m-1}{2^n})\Delta_{n,m}(t) Z(\frac{r-1}{2^n}) E[\Delta_{n,r}(t)|\mathcal{F}_{(r-1)2^{-n}}]]$$

$$\leqq M^2 \sum_{m=1}^{\infty} E[\Delta_{n,m}(t)^2]$$

となる。命題 5.2.6 より

$$E[\Delta_{n,m}(t)^2]$$

$$\leqq 2E[(X((\frac{m}{2^n})\wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n})\wedge t))^2 (Y((\frac{m}{2^n})\wedge t) - Y((\frac{m-1}{2^n})\wedge t))^2] + 2E[(\int_{(m-1)2^{-n}\wedge t}^{m2^{-n}\wedge t} \tilde{X}(s)\tilde{Y}(s)ds)^2]$$

$$\leqq 2E[(X((\frac{m}{2^n})\wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n})\wedge t))^4]^{1/2} E[(Y((\frac{m}{2^n})\wedge t) - Y((\frac{m-1}{2^n})\wedge t))^4]^{1/2} + 2M^4((m2^{-n}\wedge t) - ((m-1)2^{-n}\wedge t))^2$$

$$\leqq C((m2^{-n}\wedge t) - ((m-1)2^{-n}\wedge t))^2$$

を得る。よって、

$$E[J_n(t)^2] \leqq M^2 C \sum_{m=1}^{\infty} ((m2^{-n}\wedge t) - ((m-1)2^{-n}\wedge t))^2$$

$$\leqq M^2 C t 2^{-n} \to 0, \ n \to \infty$$

を得る。よって、命題 6.1.6 より

$$E[(I_n(X,Y)(t) - (Z \bullet \langle X, Y\rangle)(t))^2]$$

$$\leqq 2E[J_n(t)^2] + 2E[(\sum_{m=1}^{\infty} Z(\frac{n-1}{2^n})((\langle X,Y\rangle((\frac{m}{2^n})\wedge t) - \langle X,Y\rangle((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)) - (Z\bullet\langle X,Y\rangle)(t))^2] \to 0, \ n \to \infty$$

がわかり、主張を得る。

∎

命題 6.2.3 $X \in \mathcal{I}_b$ ならば

$$E[\sum_{m=1}^{\infty} |X((\frac{m}{2^n})\wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)|^3] \to 0, \ n \to \infty, \qquad t \in [0, \infty)$$

が成り立つ。

証明. $X = \tilde{X} \bullet B^k,\ k = 0, 1, \ldots, d,\ \tilde{X} \in \mathcal{X}_c^\infty$ の時示せばよい。$M = \sup_{t,\omega} |\tilde{X}(t,\omega)| < \infty$ とおく。

場合 1． $k = 0$ の場合。

$$|X((\frac{m}{2^n})\wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)|^3 \leqq M^3 |((\frac{m}{2^n})\wedge t) - ((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)|^3 \leqq M^3 2^{-n} (((\frac{m}{2^n})\wedge t) - ((\frac{m-1}{2^n})\wedge t))$$

であることからわかる。

場合 2． $k = 1, \ldots, d$ の場合。

非負値確率変数 Y に対して

$$E[Y^3] = E[Y^2 Y] \leqq E[Y^4]^{1/2} E[Y^2 1]^{1/2} \leqq E[Y^4]^{1/2} E[Y^4]^{1/4} E[1]^{1/4} = E[Y^4]^{3/4}$$

に注意。よって

$$E[|X((\frac{m}{2^n})\wedge t) - X((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)|^3] \leqq E[(|\tilde{X}\bullet B^k)((\frac{m}{2^n})\wedge t) - \tilde{X}\bullet B^k)((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)|^4]^{3/4}$$

$$\leqq (C|((\frac{m}{2^n})\wedge t) - ((\frac{m-1}{2^n})\wedge t)|^2)^{3/4} \leqq C^{3/4} 2^{-n/4} (((\frac{m}{2^n})\wedge t) - ((\frac{m-1}{2^n})\wedge t))$$

となることからわかる。

∎

6.3 伊藤の公式

命題 6.3.1 $N \geqq 1,\ f \in C_b^3(\mathbf{R}^N)$ とする。則ち、$f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ は C^3-級で

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)| < \infty, \qquad \alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}^N,\ |\alpha| \leqq 3$$

を満たす。さらに、 $X_1, \ldots, X_N \in \mathcal{I}_b$ とする。この時 $f(X_1, \ldots, X_N) \in \mathcal{I}_b$ であり

$$f(X_1(t), \cdots, X_N(t))$$
$$= f(X_1(0), \cdots, X_N(0)) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X(s))dX^i(s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X(s))d\langle X^i, X^j\rangle(s)$$

が成立する。

証明. まず、

$$f(X_1(t), \cdots, X_N(t)) - f(X_1(0), \cdots, X_N(0))$$
$$= \sum_{m=1}^\infty (f(X_1((m2^{-n}) \wedge t), \cdots, X_N((m2^{-n}) \wedge t)) - f(X_1(((m-1)2^{-n}) \wedge t), \cdots, X_N(((m-1)2^{-n}) \wedge t)))$$

であることに注意。$\varphi \in C^3(\mathbf{R})$ に対して以下の Taylor の公式が成り立つ。

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \sum_{k=1}^2 \frac{t^k}{k!}\frac{d^k\varphi}{dt^k}(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\frac{d^3\varphi}{ds^3}(s)ds.$$

よって

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = f(\vec{x} + 1(\vec{y} - \vec{x})) - f(\vec{x} + 0(\vec{y} - \vec{x}))$$
$$= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x})(y^i - x^i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\vec{x})(y^i - x^i)(y^j - x^j) + R(\vec{y}, \vec{x})$$

ただし、

$$R(\vec{y}, \vec{x}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\frac{d^3}{ds^3}f(\vec{x} + s(\vec{y} - \vec{x}))ds.$$

であり

$$|R(\vec{y}, \vec{x})|$$
$$\leqq \sup_{s \in [0,1]} \sum_{i,j,k=1}^N |\frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}(\vec{x} + s(\vec{y} - \vec{x})(y^i - x^i)(y^j - x^j)(y^k - x^k)|$$
$$\leqq C|\vec{x} - \vec{y}|^3$$

となる。よって、

$$f(X_1((m2^{-n}) \wedge t), \cdots, X_N((m2^{-n}) \wedge t) - f(X_1(((m-1)2^{-n}) \wedge t), \cdots, X_N(((m-1)2^{-n}) \wedge t)$$
$$= \sum_{i=1}^N I_{i,n,m}(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \tilde{I}_{ij,n,m}(t) + R(\vec{X}((m2^{-n}) \wedge t), \vec{X}(((m-1)2^{-n}) \wedge t))$$

ただし

$$I_{i,n,m} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{X}(((m-1)2^{-n}) \wedge t)(X_i((m2^{-n}) \wedge t) - X_i(((m-1)2^{-n}) \wedge t))$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{X}(((m-1)2^{-n})(X_i((m2^{-n}) \wedge t) - X_i(((m-1)2^{-n}) \wedge t)),$$

$$\tilde{I}_{ij,n,m}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\vec{X}((m-1)2^{-n})(X_i((m2^{-n})\wedge t)-X_i(((m-1)2^{-n})\wedge t))(X_j((m2^{-n})\wedge t)-X_j(((m-1)2^{-n})\wedge t))$$

である。

$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{X}(\cdot)) \in \mathcal{X}_c^\infty$, $i = 1, \ldots, N$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\vec{X}(\cdot)) \in \mathcal{X}_c^\infty$, $i,j = 1, \ldots, N$, であるので命題 6.1.6, 6.2.2, 6.2.3 より

$$E[(\sum_{m=1}^\infty I_{i,n,m} - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{X}(s))dX_i(s))^2] \to 0,\ n \to \infty,$$

$$E[(\sum_{m=1}^\infty I_{ij,n,m} - \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\vec{X}(s))d\langle X_i, X_j\rangle(s))^2] \to 0,\ n \to \infty,$$

$$E[(\sum_{m=1}^\infty R(\vec{X}((m2^{-n})\wedge t), \vec{X}(((m-1)2^{-n})\wedge t))^2]$$

$$\leqq 3^N C E[\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^\infty |X_i((m2^{-n})\wedge t) - X_i(((m-1)2^{-n})\wedge t)|^3] \to 0,\ n \to \infty$$

がわかるので主張を得る。

∎

定理 6.3.2 $N \geqq 1$, $f \in C_b^2(\mathbf{R}^N)$ とする。さらに、 $X_1, \ldots, X_N \in \mathcal{I}_b$ とする。この時 $f(X_1, \ldots, X_N)\ in \mathcal{I}_b$ であり

$$f(X_1(t), \cdots, X_N(t))$$
$$= f(X_1(0), \cdots, X_N(0)) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X(s))dX^i(s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X(s))d\langle X^i, X^j\rangle(s)$$

が成立する。

証明. $g : (0, \infty) \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ を

$$g(t,x) = (\frac{1}{2\pi t})^{N/2}\exp(-\frac{|x|^2}{2t}), \qquad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^N$$

とおくと

$$\int_{\mathbf{R}^N} g(t,x)dx = 1, \qquad t > 0$$

となる。$f_n : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $n \geqq 1$, を

$$f_n(x) = \int_{\mathbf{R}^N} g(\frac{1}{n}, x-y)f(y)dy, \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

で定めると $f_n \in C_b^3(\mathbf{R}^N)$, $n \to \infty$, であり $\alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}^N$, $|\alpha| \leqq 2$, に対して

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N, n \geqq 1} |\frac{\partial^{|\alpha|} f_n}{\partial x^\alpha}(x)| < \infty, \qquad \alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}^N,\ |\alpha| \leqq 2,$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N} |\frac{\partial^{|\alpha|} f_n}{\partial x^\alpha}(x) - \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)| \to 0,\ n \to \infty, \qquad \alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}^N,\ |\alpha| \leqq 1,$$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^N, |x| \leqq R} |\frac{\partial^{|\alpha|} f_n}{\partial x^\alpha}(x) - \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)| \to 0,\ n \to \infty, \qquad R > 0, \quad \alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}^N,\ |\alpha| = 2,$$

が成立する。命題 6.3.1 より

$$f_n(X_1(t), \cdots, X_N(t))$$

$$= f_n(X_1(0), \cdots, X_N(0)) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x^i}(X(s))dX^i(s)$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial^2 f_{\mathrm{n}}}{\partial x^i \partial x^j}(X(s))d\langle X^i, X^j\rangle(s)$$

であるので $n \to \infty$ とすれば主張を得る。

∎

演習問題 13 上記証明の最後の部分をチェックせよ。

命題 6.3.3 $f \in C_b^2(\mathbf{R})$ とする。この時、

$$E[(\sum_{m=1}^{\infty} f(B_1((m-1)2^{-n}))(B_1((m2^{-n}) \wedge t) - B_1(((m-1)2^{-n}) \wedge t)) - \int_0^t f(B_1(s))dB_1(s))^2] \to 0,$$

$n \to \infty$,

$$E[(\sum_{m=1}^{\infty} f(B_1(m2^{-n}))(B_1((m2^{-n}) \wedge t) - B_1(((m-1)2^{-n}) \wedge t)) - (\int_0^t f(B_1(s))dB_1(s) + \int_0^t f'(B_1(s)ds))^2] \to 0,$$

$n \to \infty$ が成立する。

証明. 前半は命題 6.1.6 より明らか。$X(t) = f(B_1(t))$ とおくと、定理 6.3.2 より $X \in \mathcal{I}_b$ となり、

$$X(t) = f(B_1(0)) + \int_0^t f'(B_1(s))dB_1(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_1(s))ds$$

より

$$\langle X, B_1\rangle(t) = \int_0^t f'(B_1(s))ds, \qquad t \in [0, \infty)$$

がわかる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(B_1(m2^{-n}))(B_1((m2^{-n}) \wedge t) - B_1(((m-1)2^{-n}) \wedge t))$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} f(B_1((m-1)2^{-n}))(B_1((m2^{-n}) \wedge t) - B_1(((m-1)2^{-n}) \wedge t))$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (X((m2^{-n}) \wedge t) - X(((m-1)2^{-n}) \wedge t))(B_1((m2^{-n}) \wedge t) - B_1(((m-1)2^{-n}) \wedge t))$$

であることに注意すると、命題 6.1.6, 6.2.2 より主張を得る。

∎

第7章　伊藤の公式の応用

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ を標準的条件を満たすフィルター付き確率空間とし、$B : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ を d-次元 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ ブラウン運動とする。

7.1　確率微分方程式との関係

$N \geqq 1$, $\sigma_k : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, $k = 0, 1, \ldots, d,$ は連続関数で以下の条件を満たすとする。
（条件）$C \in (0,\infty)$ が存在して
(i) $|\sigma_k(x) - \sigma_k(y)| \leqq C|x-y|$, $x, y \in \mathbf{R}^N$, $k = 1, \ldots, d,$
(ii) $|\sigma_k(x)| \leqq C$, $x \in \mathbf{R}^N$, $k = 1, \ldots, d.$

今、任意の $x \in \mathbf{R}^N$ に対して確率微分方程式

$$dX(t) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(X(t))dB^k(t) + \sigma_0(X(t))dt$$

$$X(0) = x$$

の解は命題 5.3.2 よりただ一つ存在する。これを $X^x(t)$ で表すことにする。

$$X^{x,i}(t) = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \sigma_k(X(s))dB^k(s) + \int_0^t \sigma_0(X(s))ds$$

であるので、$X^{x,i} \in \mathcal{I}_b$ となる。$f \in C_b^2(\mathbf{R}^N)$ に対して伊藤の公式より

$$\begin{aligned} & f(X^x(t)) \\ = & f(X^x(0)) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X^x(s))dX^{x,i}(s) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X^x(s))d\langle X^{x,i}, X^{x,j}\rangle(s) \end{aligned}$$

ある。

$$a^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k^i(x)\sigma_k^j(x), \qquad x \in \mathbf{R}^N$$

とおくと

$$\langle X^{x,i}, X^{x,j}\rangle(t) = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \sigma_k^i(X^x(s))\sigma_k^j(X^x(s))ds = \int_0^t a^{ij}(X^x(s))ds$$

となる。２階の偏微分作用素 L を

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{N} \sigma_0^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

で定めると

$$f(X^x(t)) = f(x) + M^{f,x}(t) + \int_0^t (Lf)(X^x(s))ds,$$

ただし

$$M^{f,x}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma_k^i(X^x(s)) \frac{\partial f}{\partial x^i}(X^x(s))dB^k(s)$$

を得る。$M^{f,x} \in \mathcal{M}_c^2$ であるので、

$$E[f(X^x(t))] = f(x) + \int_0^t E[(Lf)(X^x(s))]ds$$

となることがわかる。特に

$$\frac{\partial}{\partial t}E[f(X^x(t))] = E[(Lf)(X^x(t))]$$

を得る。これをコルモゴロフの後退方程式と呼ぶ。

命題 7.1.1 (最大値原理) D を $\mathbf{R}^N$ の有界な開集合とし、$x \in D$ とする。
(1) $\tau_x = \inf\{t > 0;\ X^x(t) \in \mathbf{R}^N \setminus D\}$ とおくと、τ_x は停止時刻である。
(2) $P(\tau_x < \infty) = 1$ とする。$u \in C_b^2(\mathbf{R}^N)$ であり D 上で $Lu \geqq 0$ ならば

$$u(x) \leqq \max\{u(y);\ y \in \partial D\}$$

ただし ∂D は D の境界。

証明. (1) $d(y) = \inf\{|y - z|;\ z \in \mathbf{R}^N \setminus D\}.\ y \in \mathbf{R}^N,$ とおくと $d : \mathbf{R}^N \to [0, \infty)$ は連続であり、$d(y) = 0$ となることと $y \in \mathbf{R}^N \setminus D$ は同値となる。

演習問題 14 上記のことを証明せよ。

$\tau_x = \inf\{t > 0;\ d(X^x(t)) = 0\}$ となることより τ_x が停止時刻であることがわかる。
(2)

$$u(X^x(t)) - u(x) = M^{u,x}(t) + \int_0^t Lu(X^x(s))ds$$

であるので

$$u(X^x(t \wedge \tau_x)) - u(x) = M^{u,x}(t \wedge \tau_x) + \int_0^{t \wedge \tau_x} Lu(X^x(s))ds \geqq M^{u,x}(t \wedge \tau_x)$$

となる。$M^{u,x} \in \mathcal{M}_c^2$ であるので、$E[M^{u,x}(t \wedge \tau_x)] = 0$ を得る。よって、

$$u(x) \leqq E[u(X^x(t \wedge \tau_x))]$$

仮定より確率 1 で $u(X^x(t \wedge \tau_x)) \to u(\tau_x),\ t \to \infty,$ であるので有界収束定理より

$$u(x) \leqq E[u(X^x(\tau_x))]$$

がわかる。
$\tau_x(\omega) < \infty$ ならば $X^x(\tau_x) \in \partial D$ であるので $u(X^x(\tau_x)) \leqq \max\{u(y);\ y \in \partial D\}.$

∎

7.2　ブラウン運動の性質

命題 7.2.1 $x \in \mathbf{R}^d$, $f \in C_b^2(\mathbf{R}^{1+d})$ とする。この時、

$$f(t, x + B(t)) = f(0, x) + M(t) + A(t), \qquad t \in [0, \infty).$$

ここで

$$M(t) = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, x + B(s)) dB^k(s),$$

$$A(t) = \int_0^t (\frac{\partial f}{\partial t}(s, x + B(s)) + \frac{1}{2}(\triangle f)(s, x + B(s))) ds$$

である。

証明. $X^0(t) = t$, $X^k(t) = x^k + B^k(t)$, $k = 1, \ldots, d$, $t \in [0, \infty)$, とする。この時、

$$\langle X^k, X^\ell \rangle(t) = \begin{cases} t, & k = \ell,\, k = 1, \ldots, d, \text{ の時}, \\ 0, & \text{それ以外の時 }, \end{cases}$$

であるので、伊藤の公式より

$$f(t, x + B(t)) = f(0, x) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, x + B(s)) ds + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, x + B(s)) dB^k(s)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^k}(s, x + X(s)) ds$$

を得る。これよりわかる。

∎

命題 7.2.2 $a > 0$ とし

$$\sigma_a = \inf\{t > 0;\ B^1(t) = a\}$$

とおく。この時 $\sigma_a : \Omega \to [0, \infty]$ は停止時刻である。さらに $P(\sigma_a < \infty) = 1$, であり、

$$E[\exp(-\lambda \sigma_a)] = \exp(-\sqrt{2\lambda} a), \qquad \lambda > 0$$

が成り立つ。

証明. $\sigma_a : \Omega \to [0, \infty]$ が停止時刻であることは、容易にわかる。
$\exp(-\lambda t + \sqrt{2\lambda} x^1) \leqq \exp(+\lambda + \sqrt{2\lambda}(a + 1))$, $t \geqq -1$, $x^1 \leqq a + 1$, であるので $f \in C_b^2(\mathbf{R}^{1+d})$ で

$$f(t, x^1) = \exp(-\lambda t + \sqrt{2\lambda} x^1) \qquad t \geqq -1/2,\ x^1 \leqq a + 1/2$$

となるものが存在する。

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}(\triangle f)(t, x) = 0 \qquad t > -1/2,\ x^1 < a + 1/2$$

が成り立つことに注意。

$$f(t, B(t)) = f(0, 0) + M(t) + A(t), \qquad t \in [0, \infty).$$

$$M(t) = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^k}(s, B(s)) dB^k(s),$$

$$A(t) = \int_0^t (\frac{\partial f}{\partial t}(s, B(s)) + \frac{1}{2}(\triangle f)(s, B(s)))ds$$

である。

$$A^{\sigma_a}(t) = \int_0^{t\wedge\sigma_a} (\frac{\partial f}{\partial t}(s + x + B(s)) + \frac{1}{2}(\triangle f)(s, x + B(s)))ds = 0$$

に注意。$M \in \mathcal{M}_c^2$ であるので、$M^{\sigma_a} \in \mathcal{M}_c^2$ であるので

$$E[f(t \wedge \sigma_a, B(t \wedge \sigma_a))] = f(0, 0) = 1$$

すなわち

$$E[\exp(-\lambda(t \wedge \sigma_a) + \sqrt{2\lambda}B^1(t \wedge \sigma_a))] = 1$$

となる。$\lambda > 0$ に対して

$$\exp(-\lambda(t \wedge \sigma_a) + \sqrt{2\lambda}B^1(t \wedge \sigma_a)) \leqq \exp(\sqrt{2\lambda}a)$$

であり、

$$\exp(-\lambda(t \wedge \sigma_a) + \sqrt{2\lambda}B^1(t \wedge \sigma_a)) \to 1_{\{\sigma_a<\infty\}} \exp(-\lambda\sigma_a + \sqrt{2\lambda}a),\ t \to \infty,$$

であるので

$$E[\exp(-\lambda(t \wedge \sigma_a) + \sqrt{2\lambda}B^1(t \wedge \sigma_a))] \to E[1_{\{\sigma_a<\infty\}} \exp(-\lambda\sigma_a + \sqrt{2\lambda}a)],\ t \to \infty$$

となる。よって

$$E[\exp(-\lambda\sigma_a + \sqrt{2\lambda}a), \sigma_a < \infty] = 1$$

を得る。則ち、

$$E[\exp(-\lambda\sigma_a), \sigma_a < \infty] = \exp(-\sqrt{2\lambda}a), \qquad \lambda > 0.$$

また、

$$E[\exp(-\lambda\sigma_a + \sqrt{2\lambda}a), \sigma_a < \infty] \to P(\sigma_a < \infty), \qquad \lambda \downarrow 0$$

であるので $P(\sigma_a < \infty) = 1$ がわかる。

∎

（注意）$E[\sigma_a] = \infty$.

$d \geqq 1$ に対して $h_d : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ を

$$h_r(s) = \begin{cases} s, & d = 1 \text{ の時} \\ \log s, & d = 2 \text{ の時} \\ s^{-(d-1)}, & d \geqq 3 \text{ の時} \end{cases}$$

で定める。この時，$f_d : (\mathbf{R}^d \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}$ を $f_d(x) = h_d(|x|)), x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, で定めると

$$(\triangle f_d)(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$$

となることに注意。

命題 7.2.3 $x_0 \in \mathbf{R}^d$, $x_0 \neq 0$ とし、$r \geqq 0$ に対して

$$\tau_r = \inf\{t > 0;\ |x_0 + B(t)| = r\}$$

とおく。この時、τ_r は停止時刻となる。更に、以下が成立する。
(1) $R > |x_0| > r > 0$ ならば

$$P(\tau_r < \tau_R) = \frac{h_d(|x_0|) - h_d(R)}{h_d(r) - h_d(R)}$$

$$P(\tau_r > \tau_R) = \frac{h_d(r) - h_d(|x_0|)}{h_d(r) - h_d(R)}$$

(2) $d = 1, 2$ ならば $r \in (0, |x_0|)$ に対して

$$P(\tau_r < \infty) = 1.$$

(3) $d \geqq 3$ ならば $r \in (0, |x_0|)$ に対して

$$P(\tau_r < \infty) = \frac{h_d(|x_0|)}{h_d(r)} = (\frac{|x_0|}{r})^{d-1}.$$

(4) $d \geqq 2$ ならば

$$P(\tau_0 < \infty) = 0.$$

証明. (1) $R > |x_0| > r$ とする。この時、 $f \in C_b^2(\mathbf{R})$ で

$$f(x) = f_d(x), \qquad r/2 < |x| < 2R$$

となるものが存在する。この時

$$f(x_0 + B(t)) = f(x_0) + M(t) + A(t)$$

$$M(t) = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0 + B(s)) dB^k(s),$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (\triangle f)(x_0 + B(s)))ds$$

となる。$M \in \mathcal{M}_c^2$ であるので $M^{\tau_r \wedge \tau_R} \in \mathcal{M}_c^2$. また、

$$A^{\tau_r \wedge \tau_R}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau_r \wedge \tau_R} (\triangle f)(x_0 + B(s)))ds = 0$$

よって

$$E[f_d(x_0 + B(t \wedge \tau_r \wedge \tau_R))] = f_d(x_0) = h_d(|x_0|)$$

前命題より $P(\tau_R < \infty) = 1$. よって

$$E[f_d(x_0 + B(t \wedge \tau_r \wedge \tau_R))] = E[f_d(x_0 + B(t \wedge \tau_r \wedge \tau_R)), \tau_r < \tau_R] + E[f_d(x_0 + B(t \wedge \tau_r \wedge \tau_R)), \tau_r > \tau_R]$$

$$\to h_d(r)P(\tau_r < \tau_R) + h_d(R)P(\tau_r > \tau_R), \qquad t \to \infty$$

であるので

$$h_d(r)P(\tau_r < \tau_R) + h_d(R)P(\tau_r > \tau_R) = h(|x_0|).$$

また、

$$P(\tau_r < \tau_R) + P(\tau_r > \tau_R) = 1$$

であるので、主張を得る。

(2) $d = 1, 2$ ならば $h_d(R) \to \infty$, $R \to \infty$. また、$\tau_R \to \infty$, $R \to \infty$, であるので

$$P(\tau_r < \infty) = \lim_{R \to \infty} P(\tau_r < \tau_R) = 1$$

となる。

(3)　$d \geqq 3$ ならば $h_d(R) \to 0$, $R \to \infty$. よって

$$P(\tau_r < \infty) = \lim_{R\to\infty} P(\tau_r < \tau_R) = \frac{h_d(|x_0|)}{h_d(r)}$$

となり主張を得る。

(4) $d \geqq 2$ ならば $|h_d(r)| \to \infty$, $r \downarrow 0$. よって

$$P(\tau_0 < \tau_R) = \lim_{r\downarrow 0} P(\tau_r < \tau_R) = 0.$$

よって

$$P(\tau_0 < \infty) = \lim_{R\to\infty} P(\tau_0 < \tau_R) = 0.$$

∎

命題 7.2.4 (劣調和関数に対する最大値原理) D を $\mathbf{R}^d$ の有界な開集合とし、$x \in D$ とする。$u \in C_b^2(\mathbf{R}^N)$ であり D 上で $\triangle u \geqq 0$ ならば

$$u(x) \leqq \max\{u(y);\ y \in \partial D\}.$$

ただし ∂D は D の境界。

証明.

$$P(\inf\{t > 0;\ x + B(t) \in D^c\} < \infty) = 1$$

であるので命題 7.1.1 よりわかる。

∎

命題 7.1.1 における条件 $P(\tau_x < \infty) = 1$ をどのようにチェックするかが問題となるが、これに関係した結果として Stroock-Varadhan のサポート定理がある。

第8章　確率積分の拡張

$B(t)$, $t \geqq 0$, を一次元ブラウン運動とし、$f \in C^2(\mathbf{R})$ とすると伊藤の公式を拡大解釈するならば

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds$$

が成り立ってもよいように思う。しかし、ここには以下のような問題がある。まず、

$$M(t) = \int_0^t f'(B(s))dB(s)$$

はマルチンゲールであるかという問題である。例えば、定理 5.2.2 の類推より

$$E[M(t)^2] = E[\int_0^t f'(B(s))^2 ds]$$

が成立すると仮定すると $f(x) = \exp(x^4)$ の時、 $E[M(t)^2] = \infty$, $t > 0$, となるので $M(t)$ の可積分性は怪しくなる。

上記の式を正当化することが、この章の目的である。

8.1　局所連続マルチンゲール

以下では $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ は標準条件を満たすフィルター付き確率空間とする。

定義 8.1.1 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ が停止時刻の増大列とは以下が成立すること
(1) τ_n, $n \geqq 1$, は停止時刻。
(2) すべての $n \geqq 1$, $\omega \in \Omega$ に対して $\tau_{n+1}(\omega) \geqq \tau_n(\omega)$ が成立する。
(3) すべての $\omega \in \Omega$ に対して $\tau_n(\omega) \to \infty$, $n \to \infty$, が成立する。

定義 8.1.2 $M : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ が局所連続マルチンゲールであるとは以下が成立すること
(1) $M \in \mathcal{X}_c$
(2) 停止時刻の増大列 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して

$$M^{\tau_n} - M(0) \in \mathcal{M}_c^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

が成立する。

命題 8.1.3 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ は停止時刻の増大列、$X_n \in \mathcal{X}_c$, $n = 1, 2, \ldots,$ とする。任意の $n \geqq 1$ に対して

$$X_{n+1}^{\tau_n}(t) = X_n^{\tau_n}(t) \ a.s. \qquad t \in [0,\infty)$$

が成立するならば $X \in \mathcal{X}_c$ で

$$X^{\tau_n}(t) = X_n^{\tau_n}(t) \ a.s. \qquad t \in [0,\infty)$$

となるものが（ただ一つ）存在する。

証明. $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ を

$$\Omega_0 = \bigcap_{r\in\mathbf{Q},\, r>0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_{n+1}^{\tau_n}(r) = X_n^{\tau_n}(r)\}$$

とおくと $P(\Omega_0) = 1$ であるので、$\Omega_0 \in \mathcal{F}_0$ となる。$\omega \in \Omega_0$ ならば

$$.X_{n+1}^{\tau_n}(t,\omega) = X_n^{\tau_n}(t,\omega), \qquad t \in [0,\infty),\ n \geqq 1$$

であるので $n \geqq m \geqq 1$ ならば

$$X_n^{\tau_m}(t,\omega) = X_m^{\tau_m}(t,\omega), \qquad t \in [0,\infty)$$

となる。よって、$\omega \in \Omega_0,\, t \leqq \tau_m(\omega)$ ならば

$$X_n(t,\omega) = X_m(t,\omega), \qquad n \geqq m$$

となる。よって $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ を

$$X(t,\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(t,\omega), & \omega \in \Omega_0 \text{ の時} \\ 0, & \omega \notin \Omega_0 \text{ の時} \end{cases}$$

とおくと

$$.X^{\tau_n}(t,\omega) = X_n^{\tau_n}(t,\omega), \qquad \omega \in \Omega_0,\ t \in [0,\infty)$$

であり、$X \in \mathcal{X}_c$ であることがわかる。

∎

8.2 確率積分の拡張

以下では $B : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^d$ を d-次元 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-ブラウン運動とする。
$X \in \mathbf{X}_c$ に対して $\tau_n^X : \Omega \to [0,\infty]$ を

$$\tau_n^X(\omega) = \inf\{t \geqq 0;\ |X(t,\omega)| > n\}$$

とおく。

$$\{\tau_n^X < t\} = \bigcap_{r\in\mathbf{Q},\, r\in[0,t)} \{|X(r)| > n\}$$

であるので $\{\tau_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ は停止時刻の増大列である。

$$1_{\{\tau_n^X>0\}} X^{\tau_n^X}(t,\omega) = \begin{cases} X^{\tau_n^X}(t,\omega), & \tau_n^X(\omega) > 0 \text{ の時 }, \\ 0, & \tau_n^X(\omega) = 0 \text{ の時} \end{cases}$$

であるので

$$Y_n = 1_{\{\tau_n^X>0\}} X^{\tau_n^X}$$

とおくと $|Y_n(t,\omega)| \leqq n$ であるので $Y_n \in \mathcal{X}_c^{\infty}$ となることがわかる。よって $k = 1,\ldots,d,$ に対して $Y_n \bullet B^k \in \mathcal{M}_c^2$ が定義できる。命題 5.2.5 より

$$(Y_{n+1} \bullet B^k)^{\tau_n^X} = ((1_{\{\tau_n^X>0\}} Y_{n+1}^{\tau_n^X}) \bullet B^k)^{\tau_n^X} = ((1_{\{\tau_n^X>0\}} Y_n^{\tau_n^X}) \bullet B^k)^{\tau_n^X} = (Y_n \bullet B^k)^{\tau_n^X}$$

がわかるので命題 8.1.3 より $Z_k \in \mathcal{X}_c$ で

$$Z_k^{\tau_n^X} = (Y_n \bullet B^k)^{\tau_n^X}, \qquad n \geqq 1$$

となるものが存在する。これを $X \bullet B^k$ で表すことにする。
前と同じ記号を使うことは以下の命題により正当化できる。

命題 8.2.1 $X \in \mathcal{X}_c^2$ ならば $X \bullet B^k$ の 2 つの定義は一致する。

証明. 第 5 章で挙げた定義による $X \bullet B^k$ を U_k で表すことにすると命題 5.2.5 より

$$U_k^{\tau_n^X} = ((1_{\{\tau_n^X>0\}}X^{\tau_n^X}) \bullet B^k)^{\tau_n^X} = (Y_n \bullet B^k)^{\tau_n^X} = Z_k^{\tau_n^X}$$

となるので $U_k = Z_k$ であることがわかる。

∎

命題 8.2.2 $X \in \mathcal{X}_c$ であり σ が停止時刻であれば

$$(X \bullet B^k)^\sigma = ((1_{\{\sigma>0\}}X^\sigma) \bullet B^k)^\sigma$$

が成立する。

証明. Step 1. $1_{\{\sigma>0\}}X^\sigma \in \mathcal{X}_c^2$ の時に示す。

$$((X \bullet B^k)^\sigma)^{\tau_n^X} = ((X \bullet B^k)^{\tau_n^X})^\sigma = ((1_{\{\tau_n^X>0\}}X^{\tau_n^X}) \bullet B^k)^{\tau_n^X})^\sigma = ((1_{\{\tau_n^X>0\}}X^{\tau_n^X})^\sigma \bullet B^k)^{\tau_n^X}$$

$$= (((1_{\{\sigma>0\}}1_{\{\tau_n^X>0\}}X^{\tau_n^X})^\sigma \bullet B^k)^\sigma)^{\tau_n^X} = ((1_{\{\tau_n^X>0\}}((1_{\{\sigma>0\}}X^\sigma)^{\tau_n^X} \bullet B^k)^\sigma)^\sigma)^{\tau_n^X} = (((1_{\{\sigma>0\}}X^\sigma) \bullet B^k)^\sigma)^{\tau_n^X}$$

となるので $n \to \infty$ とすれば主張を得る。

Step 2. 一般の時

$\tilde{X} = 1_{\{\sigma>0\}}X^\sigma$ とおく。この時、$1_{\{\tau_n^X>0\}}\tilde{X}^{\tau_n^X} \in \mathcal{X}_c^2$ である。よって、

$$(\tilde{X} \bullet B^k)^{\tau_n^X} = ((1_{\{\tau_n^X>0\}}\tilde{X}^{\tau_n^X}) \bullet B^k)^{\tau_n^X} = ((1_{\{\tau_n^X\wedge\sigma>0\}}X^{\tau_n^X\wedge\sigma}) \bullet B^k)^{\tau_n^X}$$

$$= ((X \bullet B^k)^{\tau_n^X\wedge\sigma})^{\tau_n^X} = ((X \bullet B^k)^\sigma)^{\tau_n^X}$$

となる。$n \to \infty$ とすることで主張を得る。

∎

命題 8.2.3 $X, Y \in \mathcal{X}_c$, $a, b \in \mathbf{R}$ に対して

$$(aX + bY) \bullet B^k = a(X \bullet B^k) + b(Y \bullet B^k), \qquad k = 1, \ldots, d$$

が成立する。

証明. $\sigma_n = \tau_n^X \wedge \tau_n^Y$, $n = 1, 2 \ldots,$ とおくと

$$((aX + bY) \bullet B^k)^{\sigma_n} = ((a1_{\{\sigma_n>0\}}X^{\sigma_n} + b1_{\{\sigma_n>0\}}Y^{\sigma_n}) \bullet B^k)^{\sigma_n}$$

$$= a((1_{\{\sigma_n>0\}}X^{\sigma_n} \bullet B^k)^{\sigma_n} + b(1_{\{\sigma_n>0\}}Y^{\sigma_n}) \bullet B^k)^{\sigma_n} = a(X \bullet B^k)^{\sigma_n} + b(Y \bullet B^k)^{\sigma_n}$$

であるので $n \to \infty$ とすれば主張を得る。

∎

命題 8.2.4 (1) $X \in \mathcal{X}_c$, $k = 1, \ldots, d,$ ならば $X \bullet B^k$ は局所連続マルチンゲール。

(2) $X, Y \in \mathcal{X}_c$, $k, \ell = 1, \ldots, d,$ に対して

$$M(t) = (X \bullet B^k)(t)(Y \bullet B^\ell)(t) - \delta_{k,\ell}\int_0^t X(s)Y(s)ds \qquad t \in [0, \infty)$$

は局所連続マルチンゲール。

証明. (1) $(X \bullet B^k)^{\tau_n^X} = ((1_{\{\tau_n^X>0\}}X^{\tau_n^X}) \bullet B^k)^{\tau_n^X} \in \mathcal{M}_c^2$ であるので主張を得る。

(2) $\rho_n = \inf\{t \geqq 0;\ |M(t)| > n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ とおき、

$$\sigma_n = \rho_n \wedge \tau_n^X \wedge \tau_n^Y, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

とおくと $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ は増大する停止時刻の列であり

$$M^{\sigma_n} = (X \bullet B^k)^{\sigma_n}(t)(Y \bullet B^\ell)^{\sigma_n} - \delta_{k,\ell}\int_0^{t\wedge\sigma_n} X(s)Y(s)ds$$

となる。

$$N_n(t) = ((1_{\{\sigma_n>0\}}X^{\sigma_n} \bullet B^k)^{\sigma_n}(t)((1_{\{\sigma_n>0\}}Y^{\sigma_n} \bullet B^\ell)^{\sigma_n}(t) - \delta_{k,\ell}\int_0^t X^{\sigma_n}(s)Y^{\sigma_n}(s)ds$$

とおくと、 N は連続マルチンゲールであり

$$E[\sup_{t\in[0,T]}|M(t)|] < \infty, \qquad T > 0$$

また、$M^{\sigma_n}(t) = N^{\sigma_n}(t)$, $t \geqq 0$, であるので、M^{σ_n} は連続マルチンゲールであり、$|M^{\sigma_n}(t)| \leqq n$, $t \geqq 0$, となる。よって、$M^{\sigma_n} \in \mathcal{M}_c^2$ となるので主張を得る。

∎

命題 8.2.5 $X_k \in \mathcal{X}_c$, $k = 1, \ldots, d$, とし、$M = \sum_{k=1}^d X_k \bullet B^k$ とおく。この時以下が成立する。
(1) $M \in \mathcal{M}_c^2$ となる必要十分条件は

$$E[\sum_{k=1}^d \int_0^T X_k(t)^2 dt] < \infty, \qquad T > 0$$

となること。
(2) $M \in \mathcal{M}_c^2$ ならば

$$E[M(t)^2] = \sum_{k=1}^d E[\int_0^t X_k(s)^2 ds] < \infty, \qquad t \in [0, \infty)$$

証明. $\sigma_n = \min\{\tau_n^{X_k};\ k = 1, \ldots, d\}$ とおくと $M^{\sigma_n} \in \mathcal{M}_c^2$ であり

$$M^{\sigma_n}(t) = \sum_{k=1}^d ((1_{\{\sigma_n>0\}}X_k^{\sigma_n}) \bullet B^k)^{\sigma_n}(t)$$

となる。

$$M_n(t) = \sum_{k=1}^d ((1_{\{\sigma_n>0\}}X_k^{\sigma_n}) \bullet B^k)(t)$$

とおくと定理 5.2.2 より

$$N_n(t) = M_n(t)^2 - \sum_{k=1}^d \int_0^t 1_{\{\sigma_n>0\}}X_k^{\sigma_n}(s)^2 ds$$

は連続マルチンゲールであり $E[\sup_{t\in[0,T]}|N_n(t)|] < \infty$. よって $E[N^{\sigma_n}(t)] = 0$. 則ち

$$E[M_n^{\sigma_n}(T)^2] = \sum_{k=1}^d E[\int_0^{t\wedge\sigma_n} 1_{\{\sigma_n>0\}}X_k^{\sigma_n}(s)^2 ds] = \sum_{k=1}^d E[\int_0^{t\wedge\sigma_n} X_k(s)^2 ds].$$

よって Doob の不等式より

$$E[\sup_{t\in[0,T]} M^{\sigma_n}(t)^2] = E[\sup_{t\in[0,T]} M_n^{\sigma_n}(t)^2] \leqq 4E[M_n^{\sigma_n}(T)^2]$$

$$= 4\sum_{k=1}^{d} E[\int_0^{T\wedge\sigma_n} X_k(t)^2 dt]. \leqq 4\sum_{k=1}^{d} E[\int_0^{T} X_k(t)^2 dt].$$

$n \to \infty$ の時 $\sup_{t\in 0,T} M^{\sigma_n}(t)^2 \uparrow \sup_{t\in[0,T]} M(t)^2$ となるので単調収束定理により

$$E[\sup_{t\in[0,T]} M(t)^2] = \lim_{n\to\infty} E[\sup_{t\in[0,T]} M^{\sigma_n}(t)^2] \leqq 4\sum_{k=1}^{d} E[\int_0^{T} X_k(t)^2 dt].$$

まず $\sum_{k=1}^{d} E[\int_0^T X_k(t)^2 dt] < \infty$ と仮定する。この時、$E[\sup_{t\in[0,T]} M(t)^2] < \infty$ であることがわかる。よって

$$E[\sup_{t\in[0,T]} |M(t)|] \leqq E[\sup_{t\in[0,T]} |M(t)|^2]^{1/2} < \infty, \qquad T > 0.$$

従って有界収束定理より $t > s \geqq 0$, $A \in \mathcal{F}_s$ ならば

$$E[M(t), A] = \lim_{n\to\infty} E[M^{\sigma_n}(t), A] = \lim_{n\to\infty} E[M^{\sigma_n}(s), A] = E[M(s), A]$$

となるので $M \in \mathcal{M}_c^2$ であることが示された。

次に $M \in \mathcal{M}_c^2$ とする。この時、Doob の不等式より

$$E[\sup_{t\in[0,T]} M(t)^2] \leqq 4E[M(T)^2] < \infty, \qquad T > 0.$$

よって有界収束定理より

$$E[M(t)^2] = \lim_{n\to\infty} E[M^{\sigma_n}(t)^2] = \lim_{n\to\infty} E[M_n^{\sigma_n}(t)^2]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{d} E[\int_0^{t\wedge\sigma_n} X_k(s)^2 ds] = \sum_{k=1}^{d} E[\int_0^{t} X_k(s)^2 ds].$$

となるので主張 (1),(2) を得る。

∎

8.3 伊藤過程の拡張と伊藤の公式

定義 8.3.1 $\mathcal{I}_c$ は以下の条件を満たす $X \in \mathcal{X}_c$ の集合とする。
$Y_k \in \mathcal{X}_c$, $k = 0, 1, \ldots, d$, 及び $\mathcal{F}_0$ 可測確率変数 ξ が存在して

$$X(t) = \xi + \sum_{k=1}^{d} (Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s) ds, \qquad t \in [0, \infty).$$

命題 8.3.2 $X \in \mathcal{I}_c$ に対して、増大する停止時刻の列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及び $X_n \in \mathcal{I}_b$, $n = 1, 2, \ldots,$ が存在して $1_{\{\sigma_n > 0\}} X^{\sigma_n} = X_n^{\sigma_n}$, $n = 1, 2, \ldots,$ が成立する。

証明. $Y_k \in \mathcal{X}_c$, $k = 0, 1, \ldots, d$, 及び $\mathcal{F}_0$ 可測確率変数 ξ が存在して

$$X(t) = \xi + (Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s) ds, \qquad t \in [0, \infty).$$

であるとする。

$$\sigma_n = \tau_n^X \wedge \min\{\tau_n^{Y_k};\ k = 0, 1 \ldots d\}$$

とおくと $|1_{\{\sigma_n>0\}}\xi| \leqq n$ であり

$$1_{\{\sigma_n>0\}}X^{\sigma_n}(t) = 1_{\{\sigma_n>0\}}(\sum_{k=1}^{d}((1_{\{\sigma_n>0\}}Y_k^{\sigma_n}) \bullet B^k)^{\sigma_n}(t) + \int_0^{t\wedge\sigma_n} Y_0(s)ds)$$

であるので、

$$X_n = 1_{\{\sigma_n>0\}}\xi + \sum_{k=1}^{d}((1_{\{\sigma_n>0\}}Y_k^{\sigma_n}) \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0^{\sigma_n}(s)ds \qquad t \in [0,\infty)$$

とおけばよい。

∎

定義 8.3.3 $X \in \mathcal{I}_c$, $Z \in {}_c$ に対して $Z \bullet X \in \mathcal{I}_c$ を

$$(Z \bullet X)(t) = ((ZY_k) \bullet B^k)(t) + \int_0^t Z(s)Y_0(s)ds, \qquad t \in [0,\infty).$$

で定める。ただし ξ は $\mathcal{F}_0$ 可測確率変数、$Y_k \in \mathcal{X}_c$, $k = 0,1,\ldots,d$, であり

$$X(t) = \xi + \sum_{k=1}^{d}(Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds, \qquad t \in [0,\infty).$$

が成り立つものとする。

$(Z \bullet X)(t)$ は $\int_0^t Z(s)dX(s)$ とも表される。
次の命題は明らかであろう。

命題 8.3.4 (1) $X \in \mathcal{I}_c$, $Y, Z \in {}_c$, $a, b \in \mathbf{R}$ に対して

$$(aY + bZ) \bullet X = a(Y \bullet X) + b(Z \bullet X).$$

(2) $X \in \mathcal{I}_c$, $Y \in {}_c$ とする。σ が停止時刻であれば

$$(Y \bullet X)^\sigma(t) = ((1_{\{\sigma>0}\ Y^\sigma) \bullet X)^\sigma$$

となる。

命題 8.3.5 $X, \tilde{X} \in \mathcal{I}_c$, $Z \in {}_c$, とする。σ が停止時刻であり

$$1_{\{\sigma>0\}}X^\sigma = 1_{\{\sigma>0\}}\tilde{X}^\sigma$$

ならば

$$(Y \bullet X)^\sigma = (Y \bullet \tilde{X})^\sigma.$$

証明 $X - \tilde{X} \in \mathcal{I}_c$ であるので、$\mathcal{F}_0$-可測確率変数 ξ, $Y_k \in \mathcal{X}_c$, $k = 0,1,\ldots,d$, が存在して

$$X(t) - \tilde{X}(t) = \xi + \sum_{k=1}^{d}(Y_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Y_0(s)ds, \qquad t \in [0,\infty),$$

となる。この時、増大する停止時刻 $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して $1_{\{\rho_n>0\}}Y_k^{\rho_n} \in \mathcal{X}_c^b$ となる。$\sigma_n = \rho_n \wedge \sigma$ とおくと

$$1_{\{\sigma_n>0\}}X^{\sigma_n} = 1_{\{\rho_n>0\}}(1_{\{\sigma>0\}}X^\sigma)^{\rho_n}$$

であるので $1_{\{\sigma_n>0\}}X^{\sigma_n} = 1_{\{\sigma_n>0\}}\tilde{X}^{\sigma_n}$ となる。この時、

$$M_n(t) = \sum_{k=1}^{d}(Y_k^{\rho_n} \bullet B^k)(t)$$

とおくと $M_n \in \mathcal{M}_c^2$ となる。

$$0 = 1_{\{\sigma_n>0\}}X^{\sigma_n} - 1_{\{\sigma_n>0\}}\tilde{X}^{\sigma_n}$$
$$= 1_{\{\sigma_n>0\}}\xi + 1_{\{\sigma_n>0\}}M^{\sigma_n} + 1_{\{\sigma_n>0\}}\int_0^{t\wedge\sigma_n} Y_0(s)ds$$

であるので $1_{\{\sigma_n>0\}}\xi = 0$ であることがわかる。$1_{\{\sigma_n>0\}}M_n^{\sigma} \in \mathcal{M}_c^2$ であり

$$E[(1_{\{\sigma_n>0\}}M_n^{\sigma}(t))^2] = \sum_{k=1}^{d} E[(1_{\{\sigma_n>0\}}\int_0^{t\wedge\sigma_n} Y_k(s)^2 ds]$$
$$= \sum_{k=1}^{d}\sum_{\ell=1}^{2^m} E[(1_{\{\sigma>0\}}M_n^{\sigma}(\frac{\ell t}{2^m}) - 1_{\{\sigma>0\}}M_n^{\sigma}(\frac{(\ell-1)t}{2^m})^2]$$

であるので命題 6.1.2 の証明と同様に

$$1_{\{\sigma_n>0\}}\int_0^{t\wedge\sigma_n} Y_0(s)ds = 0$$

$$1_{\{\sigma_n>0\}}\sum_{k=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_n} Y_k(s)^2 ds = 0$$

$t \in [0,\infty)$ がわかり、

$$1_{\{\sigma_n>0\}}Y_k^{\sigma_n} = 0, \qquad k = 0,1,2\ldots,d,$$

を得る。よって、

$$(Z\bullet X)^{\sigma_n}(t) - (Z\bullet\tilde{X})^{\sigma_n}(t) = \sum_{k=1}^{d}(1_{\{\sigma_n>0\}}Y_k^{\sigma_n})^{\sigma_n}(t) + \int_0^{\sigma_n}(1_{\{\sigma_n>0\}}Y_0^{\sigma_n})^{\sigma_n}(s)ds = 0$$

を得る。$n\to\infty$ とすることで主張を得る。

∎

定義 8.3.6 $X, Y \in \mathcal{I}_c$, $Z \in \mathcal{X}_c$ に対して $\langle X, Y\rangle \in \mathcal{I}_c$ を

$$\langle X, Y\rangle(t) = \sum_{k=1}^{d} Z_k(s)W_k(s)ds,$$

で定める。ただし ξ, η は $\mathcal{F}_0$ 可測確率変数、$Z_k, W_k \in \mathcal{X}_c$, $k = 0,1,\ldots,d,$ であり

$$X(t) = \xi + (Z_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t Z_0(s)ds, \qquad t \in [0,\infty).$$

$$Y(t) = \eta + (W_k \bullet B^k)(t) + \int_0^t W_0(s)ds, \qquad t \in [0,\infty).$$

が成り立つものとする。

次の命題は明らかであろう。

命題 8.3.7 $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{I}_c$, $a_1, a_2, , b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ に対して $\langle X_1, Y_1\rangle = \langle Y_1, X_1\rangle$ であり

$$\langle a_1X_1 + a_2X_2, b_1Y_1 + b_2Y_2\rangle = a_1b_1\langle X_1, Y_1\rangle + a_2b_1\langle X_2, Y_1\rangle + a_1b_2\langle X_1, Y_2\rangle + a_2b_2\langle X_2, Y_2\rangle.$$

定理 8.3.8 [伊藤の公式] $N \geqq 1,\ X_1,\dots,X_N \in \mathcal{I}_c$ であり $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ は C^2-級とする。この時、$f(X_1(\cdot),\dots,X_N(\cdot)) \in \mathcal{I}_c$ であり

$$\begin{aligned} &f(X_1(t),\dots,X_N(t)) \\ &= f(X_1(0),\dots,X_N(0)) + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_1(s),\dots,X_N(s))dX_i(s) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_1(s),\dots,X_N(s))d\langle X_i, X_j\rangle(s) \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明. 各 $i = 1,\dots,N$ に対して停止時刻の増大列 $\{\sigma_{i,n}\}_{n=1}^\infty$, 及び $X_{i,n} \in \mathcal{I}_c^b$ が存在して

$$1_{\{\sigma_{i,n}>0\}} X_i^{\sigma_{i,n}} = X_{i,n}^{\sigma_{i,n}} \qquad i = 1,\dots,N,\ n \geqq 1$$

となるものが存在する。

$$\sigma_n = \min\{\sigma_{i,n} \wedge \tau_n^{X_i};\ i = 1,\dots,N\}, \qquad n \geqq 1$$

とおく。

任意の $n \geqq 1$ に対して $f_n \in C_b^2(\mathbf{R}^N)$ で

$$f_n(x_1,\dots,x_N) = f(x_1,\dots,x_N), \qquad x_1,\dots,x_n \in \mathbf{R},\ |x_i| \leqq n+1,\ i = 1,\dots,N$$

となるものが存在する。この時、

$$Y_n(t) = f_n(X_{1,n}(t),\dots,X_{N,n}(t)), \qquad t \in [0,\infty)$$

とおくと $Y_n \in \mathcal{I}_c^b$ であり、

$$\begin{aligned} &Y_n(t) \\ &= Y_n(0) + \sum_{i=1}^N Y_{n,i}(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N Y_{n,i,j}(t) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$Y_{n,i}(t) = \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x^i}(X_{1,n}(s),\dots,X_{N,n}(s))dX_{i,n}(s),$$

$$Y_{n,i,j}(t) = \int_0^t \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^i \partial x^j}(X_{1,n}(s),\dots,X_{N,n}(s))d\langle X_{i,n}, X_{j,n}\rangle(s),$$

$i,j = 1,\dots,N,$ である。今、

$$Y_i(t) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_1(s),\dots,X_N(s))dX_i(s)$$

$$Y_{i,j}(t) = \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_1(s),\dots,X_N(s))d\langle X_i, X_j\rangle(s)$$

とおくと

$$\begin{aligned} &1_{\{\sigma_n>0\}} Y_i^{\sigma_n} \\ &= \left(\int_0^\cdot 1_{\{\sigma_n>0\}} \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_1^{\sigma_n}(s),\dots,X_N^{\sigma_n}(s))dX_i(s)\right)^{\sigma_n} \\ &= \left(\int_0^\cdot 1_{\{\sigma_n>0\}} \frac{\partial f_n}{\partial x^i}(X_{1,n}^{\sigma_n}(s),\dots,X_{N,n}^{\sigma_n}(s))dX_{i,n}(s)\right)^{\sigma_n} \\ &= 1_{\{\sigma_n>0\}} Y_{n,i}^{\sigma_n} \end{aligned}$$

同様にして

$$1_{\{\sigma_n>0\}}Y_{ij}^{\sigma_n} = 1_{\{\sigma_n>0\}}Y_{n,i,j}^{\sigma_n}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}&1_{\{\sigma_n>0\}}Y^{\sigma_n}\\&= 1_{\{\sigma_n>0\}}Y^{\sigma_n}(0) + \sum_{i=1}^{N} 1_{\{\sigma_n>0\}}Y_i^{\sigma_n} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} 1_{\{\sigma_n>0\}}Y_{i,j}^{\sigma_n}\end{aligned}$$

を得る。$n \to \infty$ とすることで主張を得る。

∎