数理手法VI 演習問題 (5)

$(\Omega, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)})$ を標準的条件を満たすフィルター付き確率空間とし、
$B(t) = (B^1(t), \dots, B^d(t))$ を $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$-標準ブラウン運動とする。

演習問題 5-1． $X \in \mathcal{I}_b$ とする。この時、以下の条件を満たす $C \in (0,\infty)$ が存在することをを証明せよ。

任意の $Z \in \mathcal{X}_c^\infty$, $t \geqq 0$, に対して

$$E[(Z\cdot X)(t)^2] \leqq C(1+t)\ E[\int_0^t Z(s)^2 ds]$$

が成立する。

これを用いて補題 7.3.1 から定理 7.3.2 が導かれる。

演習問題 5-2． $X, Y \in \mathcal{I}_b$ に対して

$$\int_0^t Y(s)\circ dX(s) = \int_0^t Y(s)dX(s) + \frac{1}{2}\langle Y, X\rangle(t), \qquad t \in [0,\infty)$$

で定める。この確率積分は Stratonovich 積分と呼ばれる。

以下のことを証明せよ。

任意の $N \geqq 1$, $f \in C_b^3(\mathbf{R}^N)$, 及び $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{I}_b$ に対して、

$$f(X_1(t), \dots, X_N(t))$$

$$= f(X_1(0), \dots, X_N(0)) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_1(s), \dots, X_N(s))\circ dX^i(s) \qquad t \in [0,\infty)$$

が成り立つ。

演習問題 5-3． $i, j = 1, \dots, d$ に対して

$$\int_0^t B^i(s)dB^j(s) + \int_0^t B^j(s)dB^i(s) = B^i(t)B^j(t) - \delta_{ij}t, \qquad t \geqq 0$$

となることを示せ。特に、

$$\int_0^t B^i(s)dB^i(s) = \frac{1}{2}B^i(t)^2 - \frac{1}{2}t, \qquad t \geqq 0$$

である。