

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法 VI2017 楠岡成雄

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限って、特に記載のない限り、クリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下で利用することができます。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



## 数理手法VI 演習問題 (5)

$(\Omega, P, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)})$  を標準的条件を満たすフィルター付き確率空間とし、 $B(t) = (B^1(t), \dots, B^d(t))$  を  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ -標準ブラウン運動とする。

演習問題 5-1.  $X \in \mathcal{I}_b$  とする。この時、以下の条件を満たす  $C \in (0, \infty)$  が存在することを証明せよ。

任意の  $Z \in \mathcal{X}_c^\infty$ ,  $t \geq 0$ , に対して

$$E[(Z \cdot X)(t)^2] \leq C(1+t) E\left[\int_0^t Z(s)^2 ds\right]$$

が成立する。

これを用いて補題 7.3.1 から定理 7.3.2 が導かれる。

演習問題 5-2.  $X, Y \in \mathcal{I}_b$  に対して

$$\int_0^t Y(s) \circ dX(s) = \int_0^t Y(s) dX(s) + \frac{1}{2} \langle Y, X \rangle(t), \quad t \in [0, \infty)$$

で定める。この確率積分は Stratonovich 積分と呼ばれる。

以下のことを証明せよ。

任意の  $N \geq 1$ ,  $f \in C_b^3(\mathbf{R}^N)$ , 及び  $X_1, \dots, X_N \in \mathcal{I}_b$  に対して、

$$\begin{aligned} & f(X_1(t), \dots, X_N(t)) \\ &= f(X_1(0), \dots, X_N(0)) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_1(s), \dots, X_N(s)) \circ dX^i(s) \quad t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

が成り立つ。

演習問題 5-3.  $i, j = 1, \dots, d$  に対して

$$\int_0^t B^i(s) dB^j(s) + \int_0^t B^j(s) dB^i(s) = B^i(t)B^j(t) - \delta_{ij}t, \quad t \geq 0$$

となることを示せ。特に、

$$\int_0^t B^i(s) dB^i(s) = \frac{1}{2} B^i(t)^2 - \frac{1}{2}t, \quad t \geq 0$$

である。