3 次方程式および 4 次方程式の解法

カルダーノ（Gerolamo Cardano，1501 - 1576）が負数の平方根を議論した著書 Ars Magna（大いなる術，1545 年） の中で，デル・フェッロが発見した 3 次方程式の解法（カルダーノの公式）および弟子フェラーリ（Ludovico Ferrari, 1522-1565）が発見した 4 次方程式の解法（フェラーリの公式）を公表した．[*1]いずれもべき根および四則演算を有限回行う代数的解法によるものである．その後，デカルト，オイラー，ラグランジュらがそれぞれの解法を発表した．

■**[3 次方程式の解法]**　3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ では，1 次変換 $x = y + \alpha$ で 2 次の項が消せるので

$$x^3 + px + q = 0$$

から始めよう．$x = u + v$ と置くと

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

となる．ここで

$$u^3 + v^3 + q = 0, \quad 3uv + p = 0$$

となる u, v の組を探すと（**何で？ここが最大の山場！**「v を消去して」といっても良いし，「u^3 と v^3 とを解とする 2 次方程式の根と係数の関係に見立てて」といっても良い．）

$$u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \text{（分解方程式）}$$

を得る．これで

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

が得られる．u と v は対称であるから，この 2 根の内の片方を u^3 であるとすると，他方が v^3 ということになる．こうして

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

[*1] 3 次方程式の解を最初に見つけたのはシピオーネ・デル・フェッロ（Scipione del Ferro，1465-1526）だから本当は「デル・フェッロの公式」と呼ぶべきなのであろう．カルダーノも「デル・フェッロの解法」と呼んでいるという．

を得る．ここまでがカルダーノの議論である．

3 次方程式の解は，実際には 3 つある．$x^3 - a = 0$ の解は，$\sqrt[3]{a}$ だけではなく，ω は 1 の 3 乗根の 1 つ $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ を用いて書くと

$$\sqrt[3]{a},\quad \omega\sqrt[3]{a},\quad \omega^2\sqrt[3]{a}$$

である．これから解として

$$x = \omega^k \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}} + \omega^{3-k}\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$$

（ただし $k = 0, 1, 2$）を得る（カルダーノの公式）．

■**[4 次方程式の解法]**　4 次方程式に対するフェラーリの公式も，次の標準形からスタートする：

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

この式の左右両辺に $t^2 + 2tx^2$ を加えて

$$(x^2+t)^2 = (2t-p)x^2 - qx + (t^2 - r)$$

を得る．右辺について平方完成する条件は，x の 2 次式として判別式を 0 とすればよいので

$$q^2 - 4(2t-p)(t^2-r) = 0 \;\rightarrow\; 8t^3 - 4pt^2 - 8rt + 4pr - q^2 = 0$$

（4 次方程式に対する 3 次分解方程式）となる．この 3 次式を解いて，その解の内の 1 つ u を t に代入する．これを元の x の式に代入して書き直し

$$(x^2+u)^2 = (2u-p)\Big(x - \frac{q}{2(2u-p)}\Big)^2$$

となる．これから x の 2 次方程式

$$(x^2+u) = \pm\sqrt{2u-p}\Big(x - \frac{q}{2(2u-p)}\Big)$$

が得られる．この x についての 2 次方程式を解けば良い．