半正定値計画の応用例

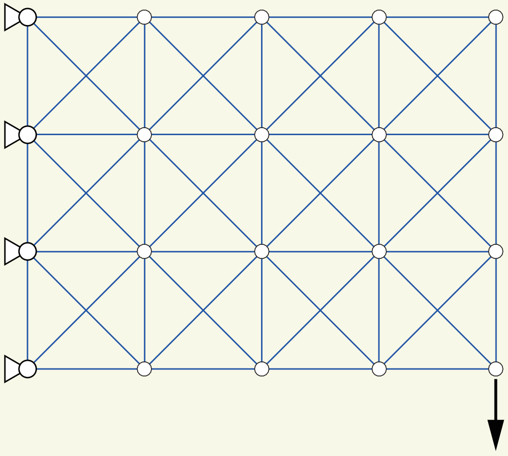
寒野 善博

東京大学 数理・情報教育研究センター

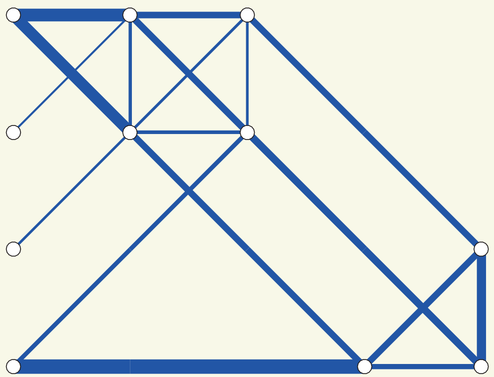
（数理手法 III）

最適設計（コート掛け問題）

- 決められた量の材料（例：鉄鋼）を使うとき
- 剛性が最大（= 変形が最小）になる設計は？

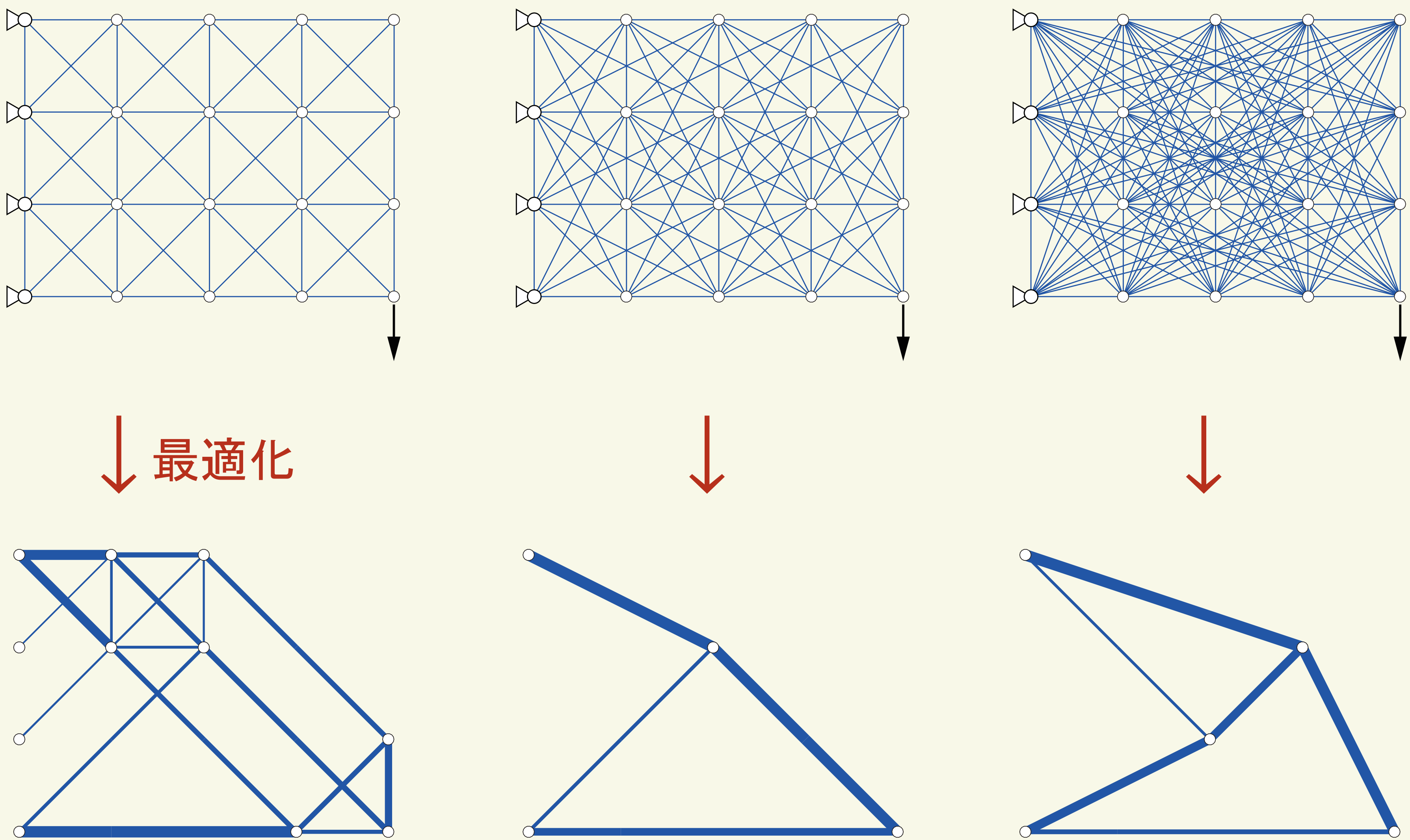


↓ 最適化



最適設計（コート掛け問題）

- 決められた量の材料（例：鉄鋼）を使うとき
- 剛性が最大（= 変形が最小）になる設計は？



固有振動数をターゲットにした最適設計

- 固有振動数：動的な剛性（変形しにくさ）の指標
  - 動的な力（例：地震や風）との共振も避けたい.
- 設計問題：

目的：	使用する材料の量（体積）	$\longrightarrow$ 最小化
制約：	最小固有振動数 $\geq \alpha$	

固有振動数をターゲットにした最適設計

- 固有振動数：動的な剛性（変形しにくさ）の指標
  - 動的な力（例：地震や風）との共振も避けたい.

- 設計問題：

目的：	使用する材料の量（体積）	$\longrightarrow$ 最小化
制約：	最小固有振動数 $\geq \alpha$	

- 固有値問題：

$$K\boldsymbol{\phi}_j = \lambda_j M \boldsymbol{\phi}_j$$

K　剛性行列 $\simeq$ バネ定数

M　質量行列 $\simeq$ おもりの質量

固有振動数をターゲットにした最適設計

- 固有振動数：動的な剛性（変形しにくさ）の指標
  - 動的な力（例：地震や風）との共振も避けたい.
- 設計問題：

目的：	使用する材料の量（体積）	$\longrightarrow$ 最小化
制約：	最小固有振動数 $\geq \alpha$	

- 固有値問題：

$$K\boldsymbol{\phi}_j = \lambda_j M \boldsymbol{\phi}_j$$

- 数理的なポイント

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad K - \alpha M \text{ が半正定値}$$

$\longrightarrow$ 半正定値計画で定式化できる.

最適解の例：平面アーチ（橋梁など）

著作権の都合により
ここに挿入されていた画像を削除しました

"Relaxation approach to topology optimization of frame structure under frequency constraint"
Shinji Yamada, Yoshihiro Kanno
Structural and Multidisciplinary Optimization
April 2016, Volume 53, Issue 4, pp 731–744, Springer

https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-015-1353-6

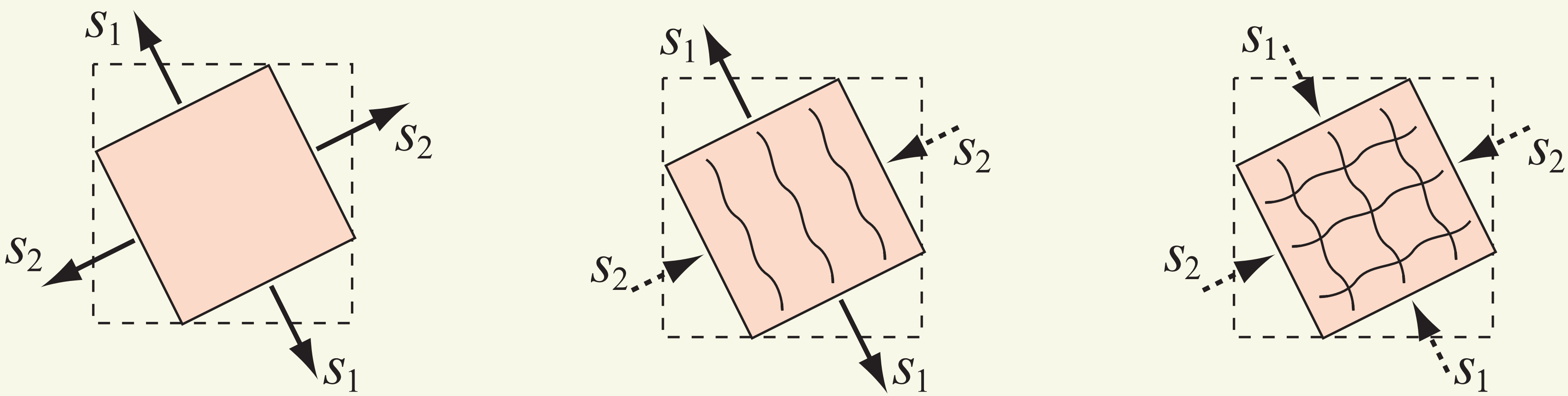
[Yamada & K. '16, *SMO*, 53:731–744]

変分原理における応用（膜の釣合い形状）

- 固体の釣合い形状は，一般に，変分原理により求められる．
  - 全ポテンシャルエネルギーの最小化

変分原理における応用（膜の釣合い形状）

- 固体の釣合い形状は，一般に，変分原理により求められる．
  - 全ポテンシャルエネルギーの最小化
- 応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$　　主応力 s_i（$=\boldsymbol{\sigma}$ の固有値）
- 膜は 三つの応力状態（場合分け）をもつため，取り扱いが難しい：



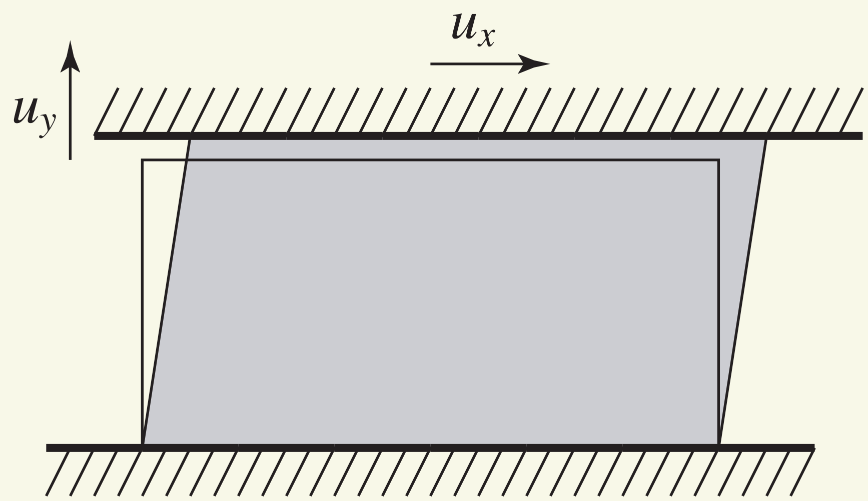
$s_1 > 0,\ s_2 > 0$　　　$s_1 > 0,\ s_2 = 0$　　　$s_1 = 0,\ s_2 = 0$

数理的なポイント：応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は常に半正定値

$\rightarrow$ 半正定値計画で定式化できる．

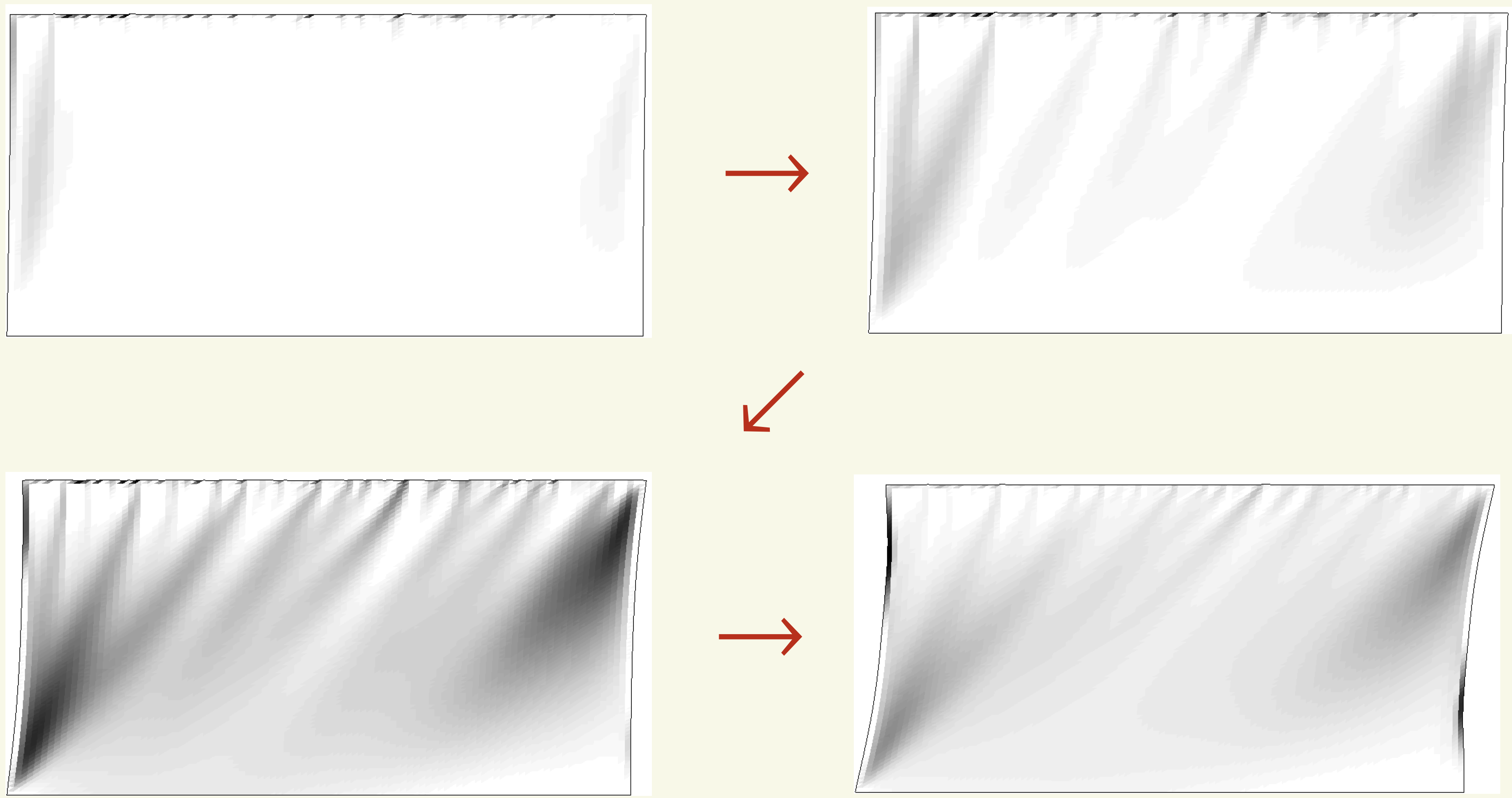
膜の釣合解析の例

- 半正定値計画問題を解くことで，変形形状が求められる．



膜の釣合解析の例

- 半正定値計画問題を解くことで，変形形状が求められる．



この他にも ⋯

- 非凸な最適化問題の緩和
- ロバスト最適化
- 制御
- データマイニング
- 計算化学（第一原理計算）

など，多くの応用がある．