

クレジット:

UTokyo Online Education 数理手法Ⅲ 2018 寒野善博

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



対称行列の正定値性

実数を要素とする n 次の正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が条件

$$A^\top = A$$

を満たすとき, A は対称行列であるという. 対称行列 A が条件

$$\mathbf{0} \text{ でない任意のベクトル } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} > 0 \quad (1)$$

を満たすとき, A は正定値であるという. ここで, $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$ のことを A の 2 次形式という.

A が正定値であるとき, $A \succ 0$ と書く. 以下の四つの条件は互いに等価である:

- (a) $A \succ 0$ (つまり, 条件 (1) が成り立つ).
- (b) A の固有値はすべて正である.
- (c) ある直交行列 Q と対角要素がすべて正の対角行列 D を用いて, $A = QDQ^\top$ と書ける.
- (d) ある正則行列 S を用いて, $A = SS^\top$ と書ける.

ここで, 実正方行列 A に対して, スカラー λ および $\mathbf{0}$ でないベクトル \mathbf{x} が存在して条件

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

が成り立つとき, λ を A の固有値とよぶ (\mathbf{x} は λ に対応する固有ベクトルとよばれる). A が n 次の対称行列であれば, その固有値は実数であり, 固有ベクトルは実ベクトルであり, 互いに 1 次独立な固有ベクトルが n 本存在する. 次に, 直交行列とは, 実正方行列 Q で条件

$$Q^\top Q = I$$

(I は単位行列) を満たすもののことである. また, 正方行列 S が正則であるとは, S の逆行列が存在することである. なお, S が正則であることは, 条件 $\det S \neq 0$ (つまり, 0 が S の固有値ではないこと) と等価である. $A \succ 0$ であれば, A は正則である.

対称行列 A が条件

$$\text{任意のベクトル } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して } \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} \geq 0 \quad (2)$$

を満たすとき, A は半正定値であるという. A が半正定値であるとき, $A \succeq 0$ と書く. 以下の四つの条件は互いに等価である:

- (A) $A \succeq 0$ (つまり, 条件 (2) が成り立つ).
- (B) A の固有値はすべて非負である.
- (C) ある直交行列 Q と対角要素がすべて非負の対角行列 D を用いて, $A = QDQ^\top$ と書ける.
- (D) ある正方行列 S を用いて, $A = SS^\top$ と書ける.

定義より，正定値行列は半正定値でもある。

☆以下は，期末試験の範囲外☆

条件 (a), (b), (c) が互いに等価であることを説明する． n 次の対称行列 A は，対角化により，ある直交行列 Q と対角行列 D を用いて

$$A = QDQ^\top$$

と書ける．ここで， D および Q を

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

と表すと， $\lambda_i \in \mathbb{R}$ は A の固有値であり $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$ はそれに対応する固有ベクトルである． A の2次形式は， $\mathbf{y} = Q^\top \mathbf{x}$ とおくことで

$$\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top (QDQ^\top) \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top D \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

と表せる． Q は直交行列なので， \mathbf{x} が $\mathbf{0}$ でない任意のベクトルを動くときに \mathbf{y} も $\mathbf{0}$ でない任意のベクトルを動く．したがって， A が正定値であることと $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) とは等価である．

次に，“(c) \Rightarrow (d)”を示すには，

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \mathbf{q}_1 & \sqrt{\lambda_2} \mathbf{q}_2 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

とおけばよい．一方，(d)を仮定すると， A の2次形式は $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = (\mathbf{x}^\top S)(S^\top \mathbf{x}) = \|S^\top \mathbf{x}\|^2$ と表せる． S が正則であることから， $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ならば $S^\top \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が成り立つので，“(d) \Rightarrow (a)”が得られる．

最後に， $A \succ 0$ ならば，

$$A^{-1} = Q \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{bmatrix} Q^\top$$

である（積 AA^{-1} を計算してみればすぐに確認できる）．つまり， $A \succ 0$ ならば A は正則である．

(以上)