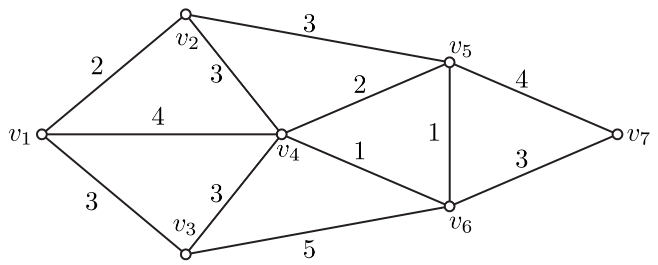
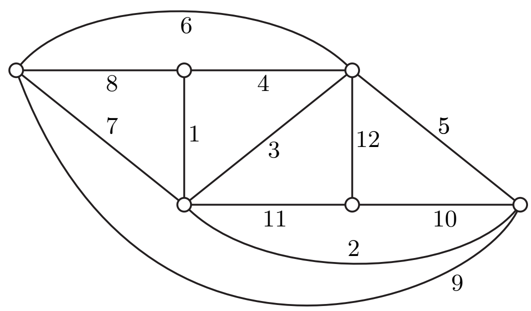
クレジット:
UTokyo Online Education 数理手法Ⅲ 2018 寒野善博

演習問題（離散最適化編）

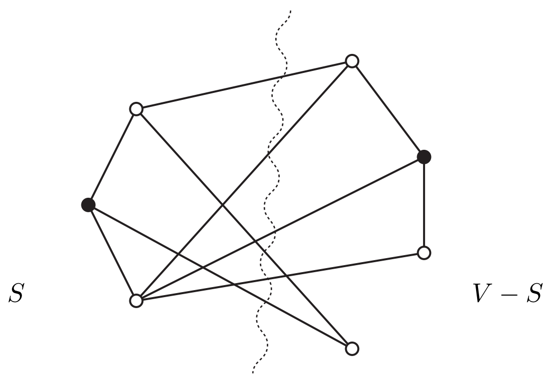
問 1　図のグラフにおいて，頂点 v_1 から頂点 v_7 への最短路を求めよ．



問 2　図のグラフの最小木を，クラスカルのアルゴリズムで求めよ．また，プリムのアルゴリズムでも求めてみよ．



問 3　無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき，カット $(S, V - S)$ に含まれる辺の数が最大になるような V の部分集合 S を求める問題は，最大カット問題とよばれている．最大カット問題に対して，次の近似解法を考える．まず，V からランダムにいくつかの点を選んで S とする．次に，$V - S$ に属する点のうち，それを S に移すことでカットの本数が増える点を S に移す．また，同様に，S に属する点のうち，それを $V - S$ に移すことでカットの本数が増える点を $V - S$ に移す．下の図の例では，波線で S と $V - S$ とが分けられているが，“•” で示す 2 点はいずれも所属を入れ替えることでカットの本数が増える．このような操作を，S が更新されなくなるまで繰り返す．この近似解法の近似比が 0.5 であることを示せ．



問 4　最短路問題を，整数計画問題として定式化せよ．

問 5　次のナップサック問題の最適解を，分枝限定法で求めよ．

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & 18x_1 + 35x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 7x_5 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 \leq 17, \\ & x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

問 6　2 次元平面上に，“∘” のラベルがついたデータ点 $(\alpha_1^\circ, \beta_1^\circ), \ldots, (\alpha_m^\circ, \beta_m^\circ)$ と “×” のラベルがついたデータ点 $(\alpha_1^\times, \beta_1^\times), \ldots, (\alpha_n^\times, \beta_n^\times)$ とが与えられている．直線 $\beta = x_1\alpha + x_2$ を引き，“∘” のラベルがついたデータは直線の下に，“×” のラベルがついたデータは上になるように x_1 および x_2 の値を決めたい．このルールを満たす直線が存在しないときには，ルールから外れる点の個数が最小となるように x_1 および x_2 を決めることとする．この問題を，混合整数計画問題として定式化せよ．

（以上）